

Д. Е. ОХОЦИМСКИЙ  
Ю. Г. СИХАРУЛИДЗЕ

# ОСНОВЫ МЕХАНИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЁТА



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1990

ББК 22.213  
О-92  
УДК 629.19 : 521.1

*Рекомендовано Государственным комитетом СССР по народному образованию для использования в учебном процессе студентами физико-технических и механико-математических специальностей вузов*

Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г. **Основы механики космического полета:** Учеб. пособие.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 448 с.— ISBN 5-02-014090-2

Излагаются основные положения механики космического полета. Большое внимание уделяется прикладным задачам. Теоретический материал иллюстрирован практическими достижениями в области исследования и освоения космического пространства.

Рассматриваются вопросы, связанные с теорией притяжения, классической задачей двух тел и ее применением к исследованию проблем прикладной баллистики и оптимальных перелетов между орбитами различных типов. Обсуждаются методы расчета траекторий полета к Луне и планетам Солнечной системы. Излагается теория точек либрации. Большое внимание уделяется возмущенному движению и его применению для оценки времени существования спутника, эволюции орбиты спутника под действием нецентрального поля притяжения и внешнего возмущающего тела.

Для студентов и аспирантов, а также для специалистов в области космической техники.

Табл. 19. Ил. 163. Библиогр. 93 назв.

Рецензенты:

профессор *Р. Ф. Анпазов*;

кафедра прикладной механики факультета аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института

О  $\frac{1603030000-091}{053(02)-90}$  80-90

© Физматлит, «Наука». 1990

ISBN 5-02-014090-2

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. МОДЕЛЬ ПОЛЯ ПРИТЯЖЕНИЯ . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1.1.1. Закон всемирного тяготения . . . . .	9
1.1.1. Взаимное притяжение двух материальных точек (9). 1.1.2. Силовое поле системы материальных точек (12).	
§ 1.2. Притяжение сферического тела . . . . .	13
1.2.1. Потенциал шара со сферическим распределением плотности (14). 1.2.2. Взаимное притяжение двух шаров со сферическим распределением плотности (15).	
§ 1.3. Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям . . . . .	16
1.3.1. Потенциал тела произвольной формы (16). 1.3.2. Вычисление коэффициентов разложения (19). 1.3.3. Зональные, тессеральные и секториальные гармоники (21).	
§ 1.4. Геоид. Сила тяжести . . . . .	23
1.4.1. Нормальный сфероид (24). 1.4.2. Ускорение силы тяжести (27).	
<b>Глава 2. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ . . . . .</b>	<b>30</b>
§ 2.1. Уравнения движения . . . . .	31
2.1.1. Абсолютное движение и относительное движение (31). 2.1.2. Движение непритягивающего спутника (32).	
§ 2.2. Интегралы уравнений движения . . . . .	33
2.2.1. Интеграл энергии (33). 2.2.2. Интеграл площадей (34). 2.2.3. Интеграл Лапласа (38). 2.2.4. Уравнение орбиты (40).	
§ 2.3. Скорость спутника . . . . .	41
2.3.1. Составляющие вектора скорости (42). 2.3.2. Связь скорости с типом орбиты (43). 2.3.3. Примеры круговых скоростей и периодов обращения спутников (44).	
§ 2.4. Характеристики орбит . . . . .	46
2.4.1. Эллиптическая орбита (47). 2.4.2. Гиперболическая орбита (49). 2.4.3. Параболическая орбита (55). 2.4.4. Круговая орбита (55).	
§ 2.5. Связь времен с положением на орбите . . . . .	56
2.5.1. Случай эллиптической орбиты (56). 2.5.2. Случай гиперболической орбиты (59). 2.5.3. Случай параболической орбиты (61). 2.5.4. Решение уравнения Кеплера (62).	
<b>Глава 3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ БАЛЛИСТИКИ . . . . .</b>	<b>66</b>
§ 3.1. Прямая задача баллистики . . . . .	66
3.1.1. Угловая дальность пассивного участка (66). 3.1.2. Высота апогея траектории (69). 3.1.3. Координаты конечной точки движения (70).	
§ 3.2. Оптимальная траектория . . . . .	72
3.2.1. Вычисление параметров оптимальной траектории (72). 3.2.2. Эллипс безопасности (76).	
§ 3.3. Обратная задача баллистики . . . . .	79
3.3.1. Выбор начальных условий (79). 3.3.2. Траектории с одинаковой начальной скоростью (80). 3.3.3. Исследование семейства траекторий между двумя фиксированными точками (83).	

§ 3.4. Параболическая траектория . . . . .	88
3.4.1. Параболическая траектория как предельный случай эллиптической (88). 3.4.2. Парабола безопасности (91).	
§ 3.5. Производные конечных параметров движения по начальным	
3.5.1. Продольное движение (92). 3.5.2. Боковое движение (96).	
<b>Глава 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ . . . . .</b>	<b>98</b>
§ 4.1. Основные элементы орбиты . . . . .	98
4.1.1. Выбор элементов орбиты (99). 4.1.2. Положение и скорость спутника в пространстве (100).	
§ 4.2. Определение орбиты по двум положениям и времени . . . . .	103
4.2.1. Эллиптическая орбита (105). 4.2.2. Гиперболическая орбита (114). 4.2.3. Параболическая орбита (119).	
§ 4.3. Определение орбиты по измерениям положения и скорости . . . . .	122
4.3.1. Использование измерений положения и скорости (122). 4.3.2. Использование многих измерений (124).	
§ 4.4. Трассы околоземных спутников . . . . .	126
4.4.1. Круговая орбита спутника (126). 4.4.2. Эллиптическая орбита спутника (129). 4.4.3. Суточный спутник (130).	
<b>Глава 5. МАНЕВРЫ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ</b>	<b>134</b>
§ 5.1. Двухимпульсный перелет между компланарными круговыми орбитами . . . . .	135
5.1.1. Формула Циолковского (135). 5.1.2. Оптимизация маневра (137). 5.1.3. Сокращение времени перелета (145).	
§ 5.2. Трехимпульсный биэллиптический перелет между компланарными круговыми орбитами . . . . .	148
5.2.1. Выбор оптимальной схемы маневра (148). 5.2.2. Области оптимальности двух- и трехимпульсных маневров (153).	
§ 5.3. Перелет с круговой орбиты на компланарную эллиптическую	155
§ 5.4. Перелет между компланарными эллиптическими орбитами	159
§ 5.5. Перелет с круговой орбиты на компланарную гиперболическую	162
§ 5.6. Поворот плоскости круговой орбиты . . . . .	179
5.6.1. Одноимпульсный поворот (170). 5.6.2. Трехимпульсный поворот (170). 5.6.3. Модифицированный трехимпульсный поворот (174).	
§ 5.7. Двухимпульсный перелет между некомпланарными круговыми орбитами . . . . .	179
5.7.1. Первый некомпланарный двухимпульсный перелет (179). 5.7.2. Второй некомпланарный двухимпульсный перелет (180).	
§ 5.8. Трехимпульсный перелет между некомпланарными круговыми орбитами . . . . .	182
5.8.1. Первый некомпланарный трехимпульсный перелет (182). 5.8.2. Второй некомпланарный трехимпульсный перелет (185). 5.8.3. Области оптимальности двух- и трехимпульсного перелетов (188).	
§ 5.9. Перелет с эллиптической орбиты на некомпланарную круговую	189
§ 5.10. Оптимальная ориентация импульса скорости для схода с орбиты	197
5.10.1. Получение максимального по величине угла входа в атмосферу (197). 5.10.2. Спуск с круговой орбиты (204). 5.10.3. Спуск из апоцентра эллиптической орбиты (207).	
<b>Глава 6. ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ . . . . .</b>	<b>208</b>
§ 6.1. Общая постановка задачи трех тел . . . . .	209
6.1.1. Уравнения движения трех притягивающих тел (209). 6.1.2. Интегралы задачи трех тел (210). 6.1.3. Движение трех тел относительно их барицентра (213). 6.1.4. Движение относительно одного из притягивающих тел (214).	
§ 6.2. Круговая ограниченная задача трех тел . . . . .	215
6.2.1. Уравнения движения тела пренебрежимо малой массы в гравитационном поле двух притягивающих тел (216). 6.2.2. Интеграл Якоби (218). 6.2.3. Плоская задача (220).	

§ 6.3. Точки либрации . . . . .	221
6.3.1. Поверхности нулевой относительной скорости (221). 6.3.2. Двойные точки поверхностей нулевой относительной скорости (228). 6.3.3. Вычисление координат точек либрации (230).	
§ 6.4. Анализ устойчивости точек либрации . . . . .	235
6.4.1. Неустойчивость прямолинейных точек либрации (236). 6.4.2. Условия устойчивости треугольных точек либрации (239).	
§ 6.5. Упрощенная постановка задачи трех тел . . . . .	242
6.5.1. Сфера действия (242). 6.5.2. Сфера притяжения (246). 6.5.3. Сфера влияния (248).	
<b>Глава 7. ПОЛЕТ К ЛУНЕ И ПЛАНЕТАМ . . . . .</b>	<b>249</b>
§ 7.1. Условия полета к Луне . . . . .	249
7.1.1. Параметры орбиты Луны (250). 7.1.2. Поле притяжения Луны (251). 7.1.3. Сферы действия, притяжения и влияния Луны (252). 7.1.4. Точный расчет траектории полета к Луне (252). 7.1.5. Приближенный расчет траектории полета к Луне (255).	
§ 7.2. Полет в плоскости орбиты Луны . . . . .	257
7.2.1. Задача попадания в Луну (257). 7.2.2. Облет Луны с пологим возвращением в атмосферу Земли (261). 7.2.3. Разгон (торможение) с использованием поля притяжения Луны (267).	
§ 7.3. Пространственная траектория к Луне . . . . .	273
7.3.1. Траектория с непрерывным выведением (274). 7.3.2. Полет к Луне с околоземной орбиты (280). 7.3.3. Посадка на поверхность Луны (283).	
§ 7.4. Полет к планетам . . . . .	284
7.4.1. Классификация межпланетных траекторий (286). 7.4.2. Точный расчет траектории к планете (288). 7.4.3. Приближенный расчет гелиоцентрического участка (289). 7.4.4. Планетоцентрические участки траектории (298). 7.4.5. Выбор оптимальной даты старта (305).	
§ 7.5. Последовательный облет нескольких небесных тел . . . . .	310
7.5.1. Использование гравитационного маневра (311). 7.5.2. Активно-гравитационный маневр (312). 7.5.3. Примеры последовательного облета небесных тел (321).	
§ 7.6. Полет в сторону Солнца . . . . .	323
7.6.1. Полет по траектории типа Гоманна (324). 7.6.2. Полет по биэллиптической траектории (325). 7.6.3. Полет по биэллиптической траектории с гравитационным маневром в афелии (330). 7.6.4. Расчет геоцентрического участка траектории полета к Солнцу (331).	
<b>Глава 8. ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА . . . . .</b>	<b>334</b>
§ 8.1. Метод оскулирующих элементов . . . . .	334
8.1.1. Оскулирующая орбита (335). 8.1.2. Уравнения для элементов возмущенного движения (337). 8.1.3. К выбору аргумента для системы оскулирующих элементов (346).	
§ 8.2. Действие возмущающих касательной, нормальной и бинормальной сил . . . . .	348
8.2.1. Учет возмущающих касательной и нормальной сил в уравнениях для оскулирующих элементов (349). 8.2.2. Влияние возмущающей касательной силы (351). 8.2.3. Влияние возмущающей нормальной силы (354). 8.2.4. Возмущения оскулирующих элементов эллиптической орбиты (355). 8.2.5. Задача поворота плоскости орбиты (358).	
§ 8.3. Эволюция орбиты ИСЗ под действием атмосферы . . . . .	360
8.3.1. Изотермическая модель атмосферы (361). 8.3.2. Упрощенная задача торможения ИСЗ в атмосфере на эллиптической орбите с малым эксцентриситетом (363). 8.3.3. Эволюция эллиптической орбиты при движении ИСЗ в неподвижной атмосфере (365). 8.3.4. Влияние вращения атмосферы на эволюцию орбиты (373).	
§ 8.4. Движение КА под действием постоянного касательного ускорения . . . . .	377
8.4.1. Преобразование уравнений движения (378). 8.4.2. Построение решения (380). 8.4.3. Асимптотика на большом удалении от центра притяжения (383). 8.4.4. Определение $\sigma$ и $\tau$ (391). 8.4.5. Результаты расчета и примеры (393).	

§ 85. Движение в нецентральной поле притяжения . . . . .	403
851 Составляющие возмущающего ускорения от сжатия Земли (403)	
852 Вековые гравитационные возмущения элементов эллиптической орбиты (405)	
853 Возмущения квазикруговой орбиты ИСЗ (409).	
§ 86. Возмущающее действие небесных тел . . . . .	410
861 Составляющие возмущающего ускорения от внешнего небесного тела (411)	
862 Эволюция орбиты под действием внешнего возмущающего тела (415)	
Приложение. КОРРЕКЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ . . . . .	425
Список литературы . . . . .	436
Основные обозначения . . . . .	440
Предметный указатель . . . . .	442

## ПРЕДИСЛОВИЕ

За 25 лет интенсивных исследований в области механики космического полета был опубликован ряд книг советских и зарубежных авторов, содержащих результаты теоретических и практических достижений. Можно назвать, например, книги Е. П. Аксенова [4], Р. Ф. Аппазова, С. С. Лаврова и В. П. Мишина [8], М. Б. Балка [11], В. А. Егорова [22], В. А. Ильина и Г. Е. Кузмака [29], В. И. Левантовского [38], П. Е. Эльясберга [62], Д. Ф. Лоудена [41], коллектива авторов (под редакцией Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова) [46] и др. За некоторым исключением, в перечисленных и многих других книгах авторы, как правило, всесторонне и глубоко освещают отдельные, довольно узкие вопросы механики космического полета. Для получения достаточно полной информации, охватывающей фундаментальные и прикладные проблемы в этой области, необходимо суммировать сведения из различных источников, что не всегда оправдано, особенно в учебном процессе.

Предлагаемая книга является попыткой в какой-то степени восполнить имеющийся пробел. В ее основу положен конспект лекций по механике космического полета [47], которые на протяжении многих лет читал Д. Е. Охотимский на механико-математическом факультете Московского государственного университета. При подготовке книги первоначальное содержание конспекта лекций было существенно переработано и пополнено результатами, полученными к настоящему времени. Излагая материал, авторы старались по возможности избегать бездоказательных утверждений, пусть даже со ссылками на цитируемую литературу. Лишь в отдельных случаях, когда чрезвычайная громоздкость выкладок могла явиться причиной неоправданного увеличения объема книги, приводятся сразу некоторые промежуточные или даже окончательные результаты в виде математических соотношений, графиков на основе выполненных расчетов и т. д.

Книга состоит из восьми глав. В главе 1 рассматриваются основные положения взаимодействия гравитирующих тел с усложнением формы центрального тела от сферы до геоида. Даны формулы разложения гравитационного потенциала в ряд по сферическим функциям.

В главе 2 изложена классическая задача двух тел. Приводятся интегралы уравнений движения в центральном поле притяжения и подробно анализируются основные типы орбит. Показана связь времени с положением на орбите.

В главе 3 теория эллиптического движения используется для решения прямой и обратной задач околоземной баллистики. Анализируются оптимальные условия старта и влияние начальных параметров на получающуюся траекто-

рию. Для малых угловых дальностей осуществляется переход от эллиптической траектории к параболической.

Глава 4 содержит сведения об элементах орбиты в пространстве. Показан способ определения орбит различных типов по двум положениям и времени перелета между заданными точками. Приведен также способ определения орбиты по измерениям положения и скорости с использованием многих измерений. Рассмотрены примеры построения трасс околоземных спутников.

В главе 5 исследуются оптимальные импульсные маневры в центральном поле притяжения. Рассматриваются компланарные перелеты между круговыми орбитами, круговой и эллиптической, эллиптическими орбитами, круговой и гиперболической. Обсуждаются различные способы поворота плоскости движения, оптимальные двух- и трехимпульсные схемы перелета между некомпланарными круговыми орбитами. Определены области рационального применения таких маневров. Даны результаты анализа оптимального импульсного торможения при сходе с круговой орбиты и апоцентра эллиптической орбиты.

Глава 6 посвящена изложению задачи трех тел. Рассмотрение начинается с общей постановки и получения интегралов задачи. Далее более подробно исследуется круговая ограниченная задача трех тел, определяются точки либрации и проводится анализ их устойчивости. Для упрощенной постановки задачи трех тел обсуждаются понятия сфер действия, притяжения и влияния.

Глава 7 имеет прикладной характер. Полученные в предыдущих главах результаты применяются для расчета траекторий к Луне и планетам Солнечной системы. Обсуждаются способы точного и приближенного построения таких траекторий. Определяются оптимальные даты старта и потребная характеристическая скорость. Приводятся траектории последовательного облета группы планет с использованием гравитационного или активно-гравитационного маневров в поле притяжения промежуточной планеты.

В главе 8 рассматривается возмущенное движение. Система уравнений движения в оскулирующих элементах используется для анализа эволюции орбиты под действием атмосферы, нецентральности поля притяжения и возмущений от внешнего небесного тела. Даны способы решения отдельных задач и примеры полученных решений.

По замыслам авторов, книга задумана как учебное пособие для студентов высших учебных заведений и аспирантов соответствующих специальностей. Вместе с тем она может быть полезной специалистам в области баллистики и управления движением космических летательных аппаратов.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Э. Л. Акиму и В. А. Степаньянцу за полезные обсуждения отдельных разделов. Авторы признательны Р. Ф. Аппазову и В. А. Ярошевскому, взявшим на себя труд по рецензированию рукописи и во многом способствовавшим улучшению представленного материала.



При анализе движения естественных и искусственных небесных тел приходится строить математическую модель, в той или иной степени адекватную истинной природе движения. Простейшая модель состоит в замене небесного тела точкой, в которой сосредоточена вся масса тела. Более сложные модели могут учитывать конечные размеры тела, однородность или неоднородность его внутренней структуры. Выбор модели зависит от постановки задачи и подчиняется общему правилу, согласно которому модель должна быть по возможности проще, но в то же время учитывать основные физические особенности, существенные для данной постановки.

В теоретической механике обычно пользуются понятием *силовой функции*  $U(x, y, z)$ , градиент которой определяет вектор силы:  $\mathbf{F} = \text{grad } U$ . В физике преимущественно пользуются понятием *потенциальной функции*  $\Pi(x, y, z)$ , которая отличается от силовой функции знаком:  $\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z)$ . В небесной механике принято использовать понятие силовой функции поля притяжения, которую многие авторы [5, 11, 20, 36, 45, 59] называют *потенциалом*. В таком случае потенциальная энергия в некоторой точке поля притяжения отличается от потенциала только знаком. При дальнейшем рассмотрении будем, как принято в небесной механике, пользоваться понятием потенциала (силовой функции).

Если в гравитационном поле находится тело единичной массы, то действующая на него сила численно равна ускорению силы притяжения. Поэтому можно говорить о потенциале поля гравитационного ускорения.

Основные вопросы теории притяжения как составной части небесной механики систематически изложены в работах [24, 28].

### § 1.1. Закон всемирного тяготения

Движение естественных небесных тел и свободное движение искусственных небесных тел (спутников, космических кораблей, межпланетных автоматических станций и др.) происходит под действием главным образом сил притяжения, или гравитационных сил. Эти силы определяются законом всемирного тяготения Ньютона.

**1.1.1. Взаимное притяжение двух материальных точек.** Во многих задачах механики космического полета оказывается возможным пренебречь размерами тела по сравнению с расстояниями, которые

характерны для этих задач. В таких случаях обычно тело заменяют его упрощенной моделью — *материальной точкой*. Понятно, что допустимость подобной замены определяется условиями задачи. Например, при исследовании орбиты спутника его можно рассматривать в качестве материальной точки, а при исследовании движения относительно центра масс нельзя отождествлять спутник с материальной точкой. По существу модель тела в виде материальной точки допустима в тех задачах, где рассматривается только поступательное движение, т. е. не учитывается вращение тела относительно центра масс. Иногда для краткости опускают слово «материальная», когда понятно, что речь идет о материальной точке.

Пусть  $M$  и  $m$  — массы двух материальных точек, которые условимся обозначать этими же буквами. Согласно закону всемирного тяготения *всякая материальная точка притягивает другую материальную точку с силой, пропорциональной произведению масс этих точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними*.

Обозначим через  $\mathbf{r}$  радиус-вектор, проведенный от точки  $M$  к точке  $m$ . Тогда сила  $\mathbf{F}$ , действующая на материальную точку  $m$  согласно закону Ньютона, будет определяться формулой

$$\mathbf{F} = -f \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}^0, \quad (1.1.1)$$

где  $f$  — коэффициент пропорциональности, называемый *постоянной притяжения* (или *постоянной тяготения*),  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$  — единичный вектор,  $r = |\mathbf{r}|$ . Величина постоянной притяжения зависит от выбора единиц измерения. Так, в системе СИ

$$f = 6,670(1 \pm 0,0007) \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}.$$

Если ввести произвольно ориентированную декартову систему прямоугольных координат с началом в точке  $M$ , то можно определить составляющие силы  $\mathbf{F}$  в этой системе координат:

$$X = -f \frac{Mm}{r^2} \frac{x}{r}, \quad Y = -f \frac{Mm}{r^2} \frac{y}{r}, \quad Z = -f \frac{Mm}{r^2} \frac{z}{r}, \quad (1.1.2)$$

где  $x, y, z$  — составляющие радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ .

В дальнейшем, кроме особо оговариваемых случаев, будем полагать, что масса материальной точки  $m$  равна единице массы ( $m = 1$ ).

Если в каждой точке пространства определена некоторая сила  $\mathbf{F}(x, y, z)$ , то говорят, что задано *силовое поле*. Поле, определяемое условием (1.1.1), называют *центральной* или *ньютоновским*.

Сила притяжения *консервативна*, поэтому она имеет потенциал

$$U(x, y, z) = f \frac{M}{r}, \quad (1.1.3)$$

частные производные от которого по координатам  $x, y, z$  дают со-

ставляющие силы притяжения материальной точки  $m$ . Действительно,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -f \frac{M}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -f \frac{M}{r^2} \frac{x}{r} = X \quad (1.1.4)$$

согласно равенству

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.1.5)$$

Аналогично найдем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -f \frac{M}{r^2} \frac{y}{r} = Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -f \frac{M}{r^2} \frac{z}{r} = Z. \quad (1.1.6)$$

Геометрическое место точек пространства, в которых потенциал принимает постоянное значение, т. е.

$$U(x, y, z) = \text{const}, \quad (1.1.7)$$

называется *поверхностью уровня* или *изопотенциальной поверхностью*. Для материальной точки  $M$  поверхностями уровня являются концентрические сферы с центром в этой точке.

Найдем физический смысл потенциала  $U(x, y, z)$ . С этой целью вычислим элементарную работу силового поля

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.1.8)$$

или

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Для потенциального силового поля

$$dA = dU, \quad (1.1.9)$$

откуда

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.1.10)$$

Работа силового поля при перемещении точки  $m$  из положения  $m_1$  в положение  $m_2$  определяется интегралом по пути

$$A = \int_{m_1 m_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.1.11)$$

Для потенциального поля

$$A = U(m_2) - U(m_1), \quad (1.1.12)$$

т. е. работа зависит только от конечного и начального положений точки, а не от пути движения. Для центрального ньютоновского поля

$$A = f \frac{M}{r_2} - f \frac{M}{r_1}, \quad (1.1.13)$$

где  $r_1, r_2$  — величины радиусов-векторов, проведенных из  $M$  соответственно в  $m_1$  и  $m_2$ . Пусть  $r_2 \rightarrow r$ , а  $r_1 \rightarrow \infty$ , тогда

$$A = f \frac{M}{r} = U(x, y, z). \quad (1.1.14)$$

Следовательно, потенциал определяет работу, которая совершается при приближении материальной точки с массой  $m$  из бесконечности на расстояние  $r$  от  $M$ . Потенциальная функция, которая определяет потенциальную энергию в рассматриваемой точке гравитационного поля, для центрального ньютоновского поля имеет вид  $\Pi(x, y, z) = -fM/r$ .

**1.1.2. Силовое поле системы материальных точек.** Рассмотрим совокупность  $n$  притягивающих материальных точек с массами  $M_i$ , имеющих координаты  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) в некоторой декартовой системе прямоугольных координат с началом в произвольной точке  $O$ . Пусть  $m$  — точка с единичной массой, а  $x^*, y^*, z^*$  — ее координаты. Определим, какая сила притяжения действует на материальную точку  $m$  в силовом поле, порождаемом системой притягивающих материальных точек  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Обозначим

$$r_i = \sqrt{(x^* - x_i)^2 + (y^* - y_i)^2 + (z^* - z_i)^2} \quad (1.1.15)$$

— расстояние между точками  $M_i$  и  $m$ ,

$$\begin{aligned} X_i &= -f \frac{M_i}{r_i^2} \frac{x^* - x_i}{r_i}, \\ Y_i &= -f \frac{M_i}{r_i^2} \frac{y^* - y_i}{r_i}, \\ Z_i &= -f \frac{M_i}{r_i^2} \frac{z^* - z_i}{r_i} \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

— составляющие силы  $F_i$ , с которой точка  $M_i$  притягивает точку  $m$ . Равнодействующая всех сил притяжения точек  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , приложенная к точке  $m$ , будет иметь следующие составляющие в системе координат  $Oxyz$ :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n X_i = -f \sum_{i=1}^n \frac{M_i (x^* - x_i)}{r_i^3}, \\ Y &= \sum_{i=1}^n Y_i = -f \sum_{i=1}^n \frac{M_i (y^* - y_i)}{r_i^3}, \\ Z &= \sum_{i=1}^n Z_i = -f \sum_{i=1}^n \frac{M_i (z^* - z_i)}{r_i^3}. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

С другой стороны, эти составляющие можно представить в виде частных производных от потенциала системы притягивающих материальных точек, который получается суммированием потенциалов, соответствующих каждой из точек:

$$U = f \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{r_i}. \quad (1.1.18)$$

Рассмотрим систему взаимно притягивающихся по закону Ньютона материальных точек  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , которые могут свободно перемещаться в пространстве. Пусть

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (1.1.19)$$

— расстояние между произвольными точками  $M_i$  и  $M_j$ . Тогда составляющие равнодействующей сил притяжения, приложенных к точке  $M_i$ , можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} X_i &= -f \left( \sum_{j=1}^{i-1} M_i M_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3} + \sum_{j=i+1}^n M_i M_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3} \right), \\ Y_i &= -f \left( \sum_{j=1}^{i-1} M_i M_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^3} + \sum_{j=i+1}^n M_i M_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^3} \right), \\ Z_i &= -f \left( \sum_{j=1}^{i-1} M_i M_j \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^3} + \sum_{j=i+1}^n M_i M_j \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^3} \right). \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

В этом случае имеем потенциал поля

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{i-1} \frac{M_i M_j}{r_{ij}} + \sum_{j=i+1}^n \frac{M_i M_j}{r_{ij}} \right), \quad (1.1.21)$$

и его частные производные по координатам произвольной точки  $M_i$  равны составляющим равнодействующей сил притяжения, приложенной к рассматриваемой точке:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = X_i, \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} = Y_i, \quad \frac{\partial U}{\partial z_i} = Z_i \quad (1.1.22)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Потенциал (1.1.21) системы  $n$  материальных точек зависит от  $3n$  координат этих точек.

## § 1.2. Притяжение сферического тела

Более сложной моделью небесного тела по сравнению с материальной точкой является шар со сферическим распределением плотности. Для такого шара во всех точках, равноудаленных от его центра, плотность одинакова. В частном случае, когда плотность одинакова во всех точках, имеем однородный шар.

Покажем, что для многих задач механики космического полета нет необходимости рассматривать притягивающее тело в виде шара, поскольку тело со сферическим распределением плотности притягивает внешнюю материальную точку подобно материальной точке, совпадающей с центром шара и имеющей такую же массу.

### 1.2.1. Потенциал шара со сферическим распределением плотности.

Предположим, что притягивающее тело с массой  $M$  имеет форму шара радиуса  $R$  и сферическое распределение плотности  $\rho(l)$ . Здесь  $l$  — расстояние рассматриваемой точки от центра шара (рис. 1.1). Пусть притягиваемая точка  $m$  с единичной массой находится на расстоянии  $r$  от центра шара, причем  $r > R$ . Для определения положения произвольной точки  $N$  внутри шара введем сферические координаты  $l, \lambda, \varphi$ . Угол  $\lambda$  отсчитывается в некоторой фиксированной плоскости тела  $M$ , перпендикулярной к прямой  $Mm$  и условно называемой экваториальной плоскостью ( $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ ). Угол  $\varphi$  подобно широте определяет отклонение точки  $N$  от экватора в меридиональной плоскости ( $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ).

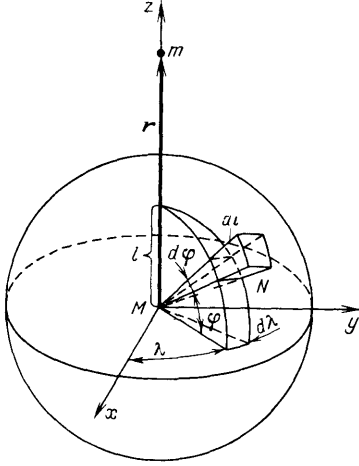


Рис. 1.1. Притяжение материальной точки сферическим телом

Выделим элементарный объем, заключенный между сферами радиусов  $l$  и  $l + dl$ , двумя меридиональными плоскостями, соответствующими углам  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$ , а также двумя плоскостями, которые проходят через центр шара (точку  $M$ ) и пересекают указанные меридиональные плоскости на широтах  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$ . С точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем  $dl, d\lambda, d\varphi$ , этот объем имеет длину  $l d\varphi$  (в меридиональной плоскости), ширину  $l \cos \varphi d\lambda$  (в плоскости, параллельной экватору) и высоту  $dl$ . Отсюда величина элементарного объема

$$dv = l^2 \cos \varphi dl d\varphi d\lambda \quad (1.2.1)$$

и его масса

$$dM = \rho(l) l^2 \cos \varphi dl d\varphi d\lambda. \quad (1.2.2)$$

Поскольку шар — физическое тело, будем рассматривать его потенциал. Потенциал шара со сферическим распределением плотности на внешнюю материальную точку  $m$  можно записать с помощью интеграла по объему шара  $v_M$ :

$$U = \int \int \int_{v_M} \frac{\rho(l) l^2 \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \sin \varphi}} dl d\varphi d\lambda. \quad (1.2.3)$$

Вычисляя этот интеграл, получим

$$\begin{aligned}
 U &= f \int_0^R \rho(l) l^2 dl \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \sin \varphi}} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda = \\
 &= f \cdot 2\pi \int_0^R \rho(l) l^2 dl \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \sin \varphi}} d\varphi = \\
 &= f \frac{1}{r} \cdot 4\pi \int_0^R \rho(l) l^2 dl. \tag{1.2.4}
 \end{aligned}$$

Второй сомножитель в (1.2.4) равен массе притягивающего тела:

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(l) l^2 dl. \tag{1.2.5}$$

С учетом полученного соотношения можно окончательно записать

$$U = f \frac{M}{r}. \tag{1.2.6}$$

Эта формула совпадает с (1.1.3). Следовательно, для шара со сферическим распределением плотности потенциал на внешнюю материальную точку совпадает с потенциалом материальной точки, расположенной в центре шара и имеющей такую же массу. Отсюда можно сделать вывод, что сила, с которой такой шар притягивает внешнюю материальную точку, не изменится, если всю массу шара поместить в его центре.

**1.2.2. Взаимное притяжение двух шаров со сферическим распределением плотности.** Рассмотрим взаимное притяжение двух внешних по отношению друг к другу шаров, имеющих массы  $M_1$  и  $M_2$  и сферическое распределение плотности. Центры шаров обозначим через  $O_1$  и  $O_2$ . Сила притяжения является равнодействующей всех сил, с которыми частицы одного тела притягивают частицы другого тела.

Выделим во втором шаре достаточно малый элементарный объем, считая его материальной точкой  $N_2$  с массой  $dM_2$ . Тогда для шара  $M_1$  со сферическим распределением плотности и материальной точки  $N_2$  задача сводится к рассмотренной в п. 1.2.1. Сила притяжения шара  $M_1$ , с которой он действует на материальную точку  $N_2$ , вычисляется по формуле

$$\mathbf{F}_{M_1 N_2} = -f \frac{M_1 dM_2}{|O_1 N_2|^2} \frac{\overrightarrow{O_1 N_2}}{|O_1 N_2|}, \tag{1.2.7}$$

где  $\overrightarrow{O_1 N_2}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O_1$  в точку  $N_2$ . С такой же силой, но направленной в противоположную сторону, притягивает материальная точка  $N_2$  шар  $M_1$ , причем согласно полу-

ченным ранее результатам всю массу этого шара можно считать сосредоточенной в его центре  $O_1$ . Отсюда следует, что равнодействующая сил, с которыми все элементарные массы, образующие шар  $M_2$ , притягивают шар  $M_1$ , совпадает с равнодействующей сил, с которыми эти элементарные массы притягивают материальную точку, расположенную в центре первого шара и имеющую массу  $M_1$ . Таким образом, два внешних по отношению друг к другу тела, имеющих форму шара со сферическим распределением плотности, притягиваются взаимно как материальные точки, т. е. с силой, прямо пропорциональной их массе и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами.

Гипотеза о сферическом распределении плотности притягивающих тел, существенно упрощающая постановку, оказывается допустимой во многих задачах, связанных с поступательным движением естественных и искусственных небесных тел, в частности, в задаче о движении далекого искусственного спутника Земли на большом промежутке времени или движении близкого спутника на коротком промежутке времени.

### § 1.3. Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям

Если упрощенные модели небесного тела в виде материальной точки или шара со сферическим распределением плотности оказываются неадекватными рассматриваемой задаче, то приходится вводить более сложные модели. Для Земли часто используют модели в виде тела, ограниченного эллипсоидом вращения (сфероид), трехосным эллипсоидом, и некоторые другие, более сложные модели.

**1.3.1. Потенциал тела произвольной формы.** Пусть тело с массой  $M$  и объемом  $v_M$  имеет произвольную форму, причем его плотность является кусочно-непрерывной функцией координат  $\rho(x, y, z)$ . Поместим декартову прямоугольную систему координат  $Oxyz$  в центре масс тела  $M$  и рассмотрим вне этого тела материальную точку  $m$  с единичной массой и координатами  $x, y, z$ . Потенциал притяжения тела  $M$  на внешнюю точку  $m$  вычисляется по формуле

$$U = f \iiint_{v_M} \frac{\rho(r_0)}{l} dv, \quad (1.3.1)$$

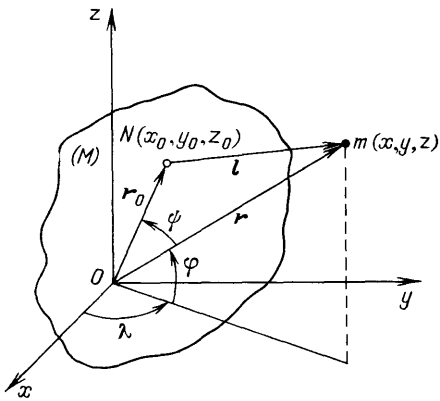


Рис. 1.2. Притяжение тела произвольной формы



где  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  — радиус-вектор произвольной текущей точки  $L$  тела  $M$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор точки  $m$ ,  $l$  — величина вектора  $\mathbf{l} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  (рис. 1.2). Найдем

$$l = \sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \psi + r_0^2}, \quad (1.3.2)$$

или

$$l = r \sqrt{1 - 2\left(\frac{r_0}{r}\right) \cos \psi + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}, \quad (1.3.3)$$

где

$$\cos \psi = \frac{xx_0 + yy_0 + zz_0}{rr_0}. \quad (1.3.4)$$

Разложим теперь  $1/l$  в ряд по степеням  $r_0/r$ . Обычно такое разложение осуществляют по сферическим функциям, что позволяет представить потенциал с помощью рядов, приемлемых по сложности для последующего использования в расчетах или аналитических исследованиях.

В теории сферических функций используются *полиномы* (многочлены) *Лежандра* [16]. Такой полином  $n$ -го порядка можно задавать формулой Родрига

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n} \quad (1.3.5)$$

или формулой вида

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^h (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^{2r} r! (n-r)! (n-2r)!} z^{n-2r}, \quad (1.3.6)$$

где

$$h = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n \text{ — четное число,} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Для полиномов Лежандра справедливо следующее соотношение:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(z). \quad (1.3.7)$$

Воспользуемся соотношением (1.3.7) для разложения  $1/l$  в ряд по полиномам Лежандра:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos \psi). \quad (1.3.8)$$

Затем найдем

$$U = f \int \int \int \left[ \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos \psi) \right] \rho \, dv. \quad (1.3.9)$$

Выразим правую часть (1.3.9) в сферических координатах  $\lambda, \varphi, r$  (рис. 1.2). Предварительно подставим в формулу (1.3.4) соотношения

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda, & y &= r \cos \varphi \sin \lambda, & z &= r \sin \varphi, \\ x_0 &= r_0 \cos \varphi_0 \cos \lambda_0, & y_0 &= r_0 \cos \varphi_0 \sin \lambda_0, & z_0 &= r_0 \sin \varphi_0; \end{aligned}$$

тогда получим

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0). \quad (1.3.10)$$

Далее необходимо воспользоваться теоремой сложения для полиномов Лежандра [16]:

$$\begin{aligned} P_n [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)] &= P_n (\sin \varphi) P_n (\sin \varphi_0) + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)} (\sin \varphi) P_n^{(k)} (\sin \varphi_0) \cos k (\lambda - \lambda_0). \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Отсюда с учетом (1.3.10) и соотношения

$$\cos k (\lambda - \lambda_0) = \cos k \lambda \cos k \lambda_0 + \sin k \lambda \sin k \lambda_0$$

получим

$$\begin{aligned} P_n (\cos \psi) &= P_n (\sin \varphi) P_n (\sin \varphi_0) + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)} (\sin \varphi) \cos k \lambda P_n^{(k)} (\sin \varphi_0) \cos k \lambda_0 + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)} (\sin \varphi) \sin k \lambda P_n^{(k)} (\sin \varphi_0) \sin k \lambda_0. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Здесь  $P_n^{(k)}$  — присоединенная функция Лежандра порядка  $n$  и индекса  $k$ , которая связана с полиномом Лежандра условием

$$P_n^{(k)}(z) = (1-z^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(z)}{dz^k}. \quad (1.3.13)$$

После подстановки соотношения (1.3.12) в (1.3.9) получим для потенциала тела произвольной формы следующую формулу общего вида:

$$\begin{aligned} U &= f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n (\sin \varphi) \iiint_{v_M} r_0^n P_n (\sin \varphi_0) \rho \, dv + \\ &+ f \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{(k)} (\sin \varphi) \cos k \lambda \times \\ &\times \iiint_{v_M} \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r_0^n P_n^{(k)} (\sin \varphi_0) \cos k \lambda_0 \cdot \rho \, dv + \end{aligned}$$

$$+ f \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \sin k\lambda \times \\ \times \int \int \int_{v_M} \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r_0^n P_n^{(k)}(\sin \varphi_0) \sin k\lambda_0 \cdot \rho \, dv. \quad (1.3.14)$$

**1.3.2. Вычисление коэффициентов разложения.** Введем безразмерные коэффициенты  $J_n$ ,  $C_{nk}$ ,  $S_{nk}$ , зависящие от формы притягивающего тела и распределения его масс:

$$J_n = -\frac{1}{MR_0^n} \int \int \int_{v_M} r_0^n P_n(\sin \varphi_0) \rho \, dv, \\ C_{nk} = \frac{1}{MR_0^n} \int \int \int_{v_M} \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r_0^n P_n^{(k)}(\sin \varphi_0) \cos k\lambda_0 \cdot \rho \, dv, \quad (1.3.15) \\ S_{nk} = \frac{1}{MR_0^n} \int \int \int_{v_M} \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r_0^n P_n^{(k)}(\sin \varphi_0) \sin k\lambda_0 \cdot \rho \, dv,$$

где  $R_0$  — некоторый линейный размер притягивающего тела  $M$  (для Земли в качестве линейного размера обычно используют средний экваториальный радиус). При расчете коэффициентов  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$  должно выполняться условие  $1 \leq k \leq n$ .

Вычислим некоторые коэффициенты (1.3.15). Полином Лежандра нулевого порядка при любом значении аргумента равен единице, следовательно,  $P_0(\sin \varphi_0) = 1$ . Кроме того,

$$\int \int \int_{v_M} \rho \, dv = M, \quad (1.3.16)$$

отсюда имеем

$$J_0 = -1. \quad (1.3.17)$$

Далее, полином Лежандра первого порядка равен своему аргументу, т. е.  $P_1(\sin \varphi_0) = \sin \varphi_0$ . Учитывая это, вычислим по формуле (1.3.13) присоединенную функцию Лежандра первого порядка и первого индекса:  $P_1^{(1)}(\sin \varphi_0) = \cos \varphi_0$ . Тогда

$$J_1 = -\frac{1}{MR_0} \int \int \int_{v_M} r_0 \sin \varphi_0 \cdot \rho \, dv = -\frac{1}{MR_0} \int \int \int z_0 \, dm = -\frac{z_M}{R_0}, \\ C_{11} = \frac{1}{MR_0} \int \int \int_{v_M} r_0 \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 \cdot \rho \, dv = \frac{1}{MR_0} \int \int \int x_0 \, dm = \frac{x_M}{R_0}, \\ S_{11} = \frac{1}{MR_0} \int \int \int_{v_M} r_0 \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 \cdot \rho \, dv = \frac{1}{MR_0} \int \int \int y_0 \, dm = \frac{y_M}{R_0}, \quad (1.3.18)$$

где  $x_M, y_M, z_M$  — координаты центра масс притягивающего тела  $M$ ,  $dm = \rho dv$  — дифференциал массы. Так как начало координат совпадает с центром масс, то  $x_M = y_M = z_M = 0$ . Отсюда

$$J_1 = 0, \quad C_{11} = 0, \quad S_{11} = 0. \quad (1.3.19)$$

Теперь вычислим по формуле (1.3.6) полином Лежандра второго порядка

$$P_2(\sin \varphi_0) = \frac{1}{2}(-1 + 3 \sin^2 \varphi_0), \quad (1.3.20)$$

а затем по формуле (1.3.13) найдем присоединенную функцию Лежандра второго порядка и индексами  $k = 1, 2$ :

$$P_2^{(1)}(\sin \varphi_0) = 3 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0, \quad P_2^{(2)}(\sin \varphi_0) = 3 \cos^2 \varphi_0. \quad (1.3.21)$$

Используя полученные результаты, определим коэффициенты

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{1}{2MR_0^2} \int \int \int_{v_M} r_0^2 (-1 + 3 \sin^2 \varphi_0) \rho dv = \\ &= \frac{1}{2MR_0^2} \int \int \int_{v_M} r_0^2 (\cos^2 \varphi_0 - 2 \sin^2 \varphi_0) \rho dv = \\ &= \frac{1}{2MR_0^2} \int \int \int_{v_M} [2(r_0^2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \lambda_0 + r_0^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda_0) - \\ &- (r_0^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda_0 + r_0^2 \sin^2 \varphi_0) - (r_0^2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \lambda_0 + r_0^2 \sin^2 \varphi_0)] \rho dv = \\ &= \frac{2C - (A + B)}{2MR_0^2}, \end{aligned}$$

$$C_{21} = \frac{1}{MR_0^2} \int \int \int_{v_M} r_0^2 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \lambda_0 \cdot \rho dv = \frac{E}{MR_0^2},$$

$$S_{21} = \frac{1}{MR_0^2} \int \int \int_{v_M} r_0^2 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin \lambda_0 \cdot \rho dv = \frac{D}{MR_0^2},$$

$$\begin{aligned} C_{22} &= \frac{1}{4MR_0^2} \int \int \int_{v_M} r_0^2 \cos^2 \varphi_0 \cos 2\lambda_0 \cdot \rho dv = \\ &= \frac{1}{4MR_0^2} \int \int \int_{v_M} [(r_0^2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \lambda_0 + r_0^2 \sin^2 \varphi_0) - \\ &- (r_0^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda_0 + r_0^2 \sin^2 \varphi_0)] \rho dv = \frac{B - A}{4MR_0^2}, \end{aligned}$$

$$S_{22} = \frac{1}{4MR_0^2} \int \int \int_{v_M} r_0^2 \cos^2 \varphi_0 \sin 2\lambda_0 \cdot \rho dv = \frac{F}{2MR_0^2}. \quad (1.3.22)$$

Здесь

$$A = \iiint_{v_M} (y_0^2 + z_0^2) dm, \quad B = \iiint_{v_M} (x_0^2 + z_0^2) dm, \\ C = \iiint_{v_M} (x_0^2 + y_0^2) dm \quad (1.3.23)$$

— осевые моменты инерции,

$$D = \iiint_{v_M} y_0 z_0 dm, \quad E = \iiint_{v_M} x_0 z_0 dm, \quad F = \iiint_{v_M} x_0 y_0 dm \quad (1.3.24)$$

— центробежные моменты инерции притягивающего тела  $M$ .

Вычисленные коэффициенты (1.3.19) позволяют представить формулу (1.3.14) для потенциала притяжения на внешнюю точку тела произвольной формы в окончательном виде:

$$U = f \frac{M}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 P_n(\sin \varphi) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{R_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) \right]. \quad (1.3.25)$$

Ряд (1.3.25) сходится абсолютно и равномерно, если расстояние  $r$  от центра притягивающего тела  $M$  до притягиваемой материальной точки  $m$  больше, чем расстояние  $r_{\max}$  от центра тела до его наиболее удаленной точки. В самом деле, так как  $|P_n(\sin \varphi_0)| \leq 1$ , то ряды (1.3.8) и (1.3.9) сходятся абсолютно и равномерно при  $r > r_{\max} \geq r_0$ . Заметим, что в тех случаях, когда одна из осей координат совпадает с главной центральной осью инерции притягивающего тела  $M$ , обращаются в нуль центробежные моменты инерции, содержащие соответствующую координату.

Формула (1.3.25) рекомендована Международным астрономическим союзом в качестве стандартной записи потенциала притяжения Земли. Для Земли  $\lambda$  — долгота притягиваемой материальной точки, отсчитываемая от гринвичского меридиана;  $\varphi$  — широта точки, отсчитываемая от плоскости экватора;  $M$  — масса Земли;  $R_0$  — средний экваториальный радиус Земли. Поскольку в этом случае ось  $Oz$  является главной центральной осью инерции (как ось вращения Земли), то  $C_{21} = S_{21} = 0$ .

**1.3.3. Зональные, тессеральные и секторальные гармоники.** В разложении потенциала (1.3.25) обычно различают составляющие трех типов. Рассмотрим сначала слагаемые вида

$$- f \frac{M}{r} J_n \left( \frac{R_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi), \quad (1.3.26)$$

собранные в первую сумму. Знак (1.3.26) зависит от знака  $P_n(\sin \varphi)$ . Так как полином Лежандра  $n$ -го порядка имеет  $n$  дейст-

вительных различных корней (причем каждый по абсолютной величине меньше 1), функция  $P_n(\sin \varphi)$  будет менять знак на  $n$  широтах. Следовательно, сфера разделяется на  $n + 1$  широтную зону, в которых слагаемые вида (1.3.26) принимают попеременно положительные и отрицательные значения. Поэтому слагаемые вида (1.3.26) называют *зональными гармониками  $n$ -го порядка*.

Рассмотрим теперь из второй суммы (1.3.25) слагаемые вида

$$f \frac{M}{r} \left( \frac{R_0}{r} \right)^n C_{nk} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \cos k\lambda \quad (1.3.27)$$

и

$$f \frac{M}{r} \left( \frac{R_0}{r} \right)^n S_{nk} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \sin k\lambda, \quad (1.3.28)$$

где  $1 \leq k < n$ . Эти слагаемые обращаются в нуль на  $n - k$  параллелях, где

$$P_n^{(k)}(\sin \varphi) = 0, \text{ или } \frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^k} = 0,$$

и на  $2k$  меридианах, где

$$\cos k\lambda = 0 \text{ или } \sin k\lambda = 0.$$

Такими параллелями и меридианами сфера делится на  $n + k + 1$  сферическую трапецию, в каждой из которых указанные слагаемые сохраняют знак. Эти слагаемые называют *тессеральными гармониками порядка  $n$  и индекса  $k$* .

Если  $n = k$ , то имеем оставшиеся слагаемые второй суммы (1.3.25)

$$f \frac{M}{r} \left( \frac{R_0}{r} \right)^n C_{nn} P_n^{(n)}(\sin \varphi) \cos n\lambda \quad (1.3.29)$$

и

$$f \frac{M}{r} \left( \frac{R_0}{r} \right)^n S_{nn} P_n^{(n)}(\sin \varphi) \sin n\lambda. \quad (1.3.30)$$

Здесь  $\text{sign } P_n^{(n)}(\sin \varphi) = \text{const}$ , так как

$$\frac{d^n P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^n} = \text{const}.$$

Отсюда видно, что слагаемые (1.3.29) и (1.3.30) меняют знак только на меридианах, определяемых условиями

$$\cos n\lambda = 0, \quad \sin n\lambda = 0. \quad (1.3.31)$$

Эти условия выделяют  $2n$  меридиональных секторов, в которых слагаемые (1.3.29) и (1.3.30) сохраняют знак, поэтому их называют *секториальными гармониками  $n$ -го порядка*.

Разложение потенциала притяжения Земли на отдельные гармоники имеет вполне определенный физический смысл. Первое сла-

гаемое (1.3.25) соответствует шару со сферическим распределением плотности. Вторая зональная гармоника  $J_2$  учитывает полярное сжатие Земли (вдоль оси вращения) и является самой существенной поправкой при переходе к нецентральному полю притяжения. Зональные гармоники нечетного порядка и тессеральные гармоники, для которых число  $n - k$  нечетно, учитывают асимметрию Земли относительно плоскости экватора, а секториальные и тессеральные гармоники — асимметрию Земли относительно оси вращения. Коэффициент  $J_2$  имеет порядок  $10^{-3}$ , а все остальные коэффициенты разложения (1.3.25) имеют порядок  $10^{-6}$  и выше. В работе [4] приведены значения коэффициентов  $J_n$  до 21-го порядка включительно. Поскольку коэффициенты разложения убывают весьма медленно, ряд (1.3.25) также сходится весьма медленно.

Известны другие методы описания нецентрального поля притяжения Земли. Например, в работе [5] была рассмотрена обобщенная задача двух неподвижных центров с фиксированными массами и найдена соответствующая силовая функция, совпадающая в главном с (1.3.25). Такой подход позволяет интегрировать в квадратурах дифференциальные уравнения движения материальной точки в построенном нецентральному полю притяжения. Для высокоточных численных расчетов траекторий движения вблизи поверхности Земли иногда используется модель в виде совокупности большого числа материальных точек (порядка нескольких сотен), координаты и масса которых определены на основе экспериментальных данных. Такая модель поля притяжения Земли является достаточно сложной даже для реализации с помощью ЭВМ, однако она позволяет учесть локальные аномалии, связанные с неоднородностью внутренней структуры Земли, которые весьма сложно описать другими способами.

Для уточнения модели поля притяжения Земли используются главным образом результаты траекторных измерений движения околоземных и межпланетных космических аппаратов.

#### § 1.4. Геоид. Сила тяжести

Если тело находится на поверхности Земли, то помимо силы притяжения на него действует также центробежная сила инерции, порождаемая суточным вращением Земли. Равнодействующую этих сил называют *силой тяжести*. Потенциал силы тяжести равен сумме потенциалов силы притяжения и центробежной силы:

$$U_{\tau} = U + U_{цб}. \quad (1.4.1)$$

Геометрическое место точек, в которых потенциал силы тяжести имеет одно и то же значение, называют *уровенной поверхностью* потенциала силы тяжести. В геодезии уровенную поверхность, совпадающую со свободной невозмущенной поверхностью океанов и продолженную под материками, принято называть *геоидом*. (Иногда

в баллистике под геоидом понимают не поверхность, а тело, которое ограничено поверхностью мирового океана при некотором среднем уровне воды, свободной от возмущений.) Во всех точках геоида сила тяжести направлена по нормали к нему. Вместо геоида часто рассматривают близкие к нему фигуры, допускающие более простое математическое описание.

**1.4.1. Нормальный сфероид.** Рассмотрим фигуру Земли при некоторых упрощающих предположениях. Пусть распределение плотности Земли обладает осевой симметрией, тогда часть коэффициентов формулы (1.3.25) обращается в нуль ( $C_{nk} = S_{nk} = 0$ ). Это значит, что в формуле (1.3.25), записанной применительно к такой модели фигуры Земли, останутся только зональные гармоники:

$$U = f \frac{M}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right]. \quad (1.4.2)$$

Учтем суточное вращение Земли с угловой скоростью  $\omega_3$ . Центробежная сила инерции, которая действует на материальную точку  $m$  с единичной массой, расположенную на широте  $\varphi$  и расстоянии  $r$  от центра Земли, направлена перпендикулярно оси вращения и по величине равна

$$F_{цб} = \omega_3^2 r \cos \varphi. \quad (1.4.3)$$

Потенциал центробежной силы инерции вычисляется по формуле

$$U_{цб} = \frac{1}{2} \omega_3^2 r^2 \cos^2 \varphi. \quad (1.4.4)$$

Сложив обе составляющие потенциала силы тяжести, (1.4.2) и (1.4.4), получим уравнение уровневой поверхности:

$$f \frac{M}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right] + \frac{1}{2} \omega_3^2 r^2 \cos^2 \varphi = C_0, \quad (1.4.5)$$

где  $C_0$  — произвольная постоянная.

Для получения уравнения модели геоида в рассматриваемой постановке надо определить постоянную  $C_0$  таким образом, чтобы экваториальный радиус уровневой поверхности совпадал с экваториальным радиусом Земли, т. е.  $r = R_0$  при  $\varphi = 0$ . Отсюда

$$C_0 = f \frac{M}{R_0} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n P_n(0) \right] + \frac{1}{2} \omega_3^2 R_0^2,$$

или

$$C_0 = f \frac{M}{R_0} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n P_n(0) + \frac{1}{2} q \right], \quad (1.4.6)$$

где

$$q = \frac{\omega_3^2 R_0^3}{fM}. \quad (1.4.7)$$



Тогда уравнение модели геоида

$$\begin{aligned} f \frac{M}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \frac{1}{2} q \left( \frac{r}{R_0} \right)^3 \cos^2 \varphi \right] = \\ = f \frac{M}{R_0} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n P_n(0) + \frac{1}{2} q \right]. \quad (1.4.8) \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, коэффициент  $J_2$  на три порядка больше, чем ближайшие следующие за ним коэффициенты  $J_3$  и  $J_4$ . С учетом этого можно еще более упростить модель геоида, отбросив в (1.4.8) слагаемые с номерами  $n > 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 P_2(\sin \varphi) + \frac{1}{2} q \left( \frac{r}{R_0} \right)^3 \cos^2 \varphi \right] = \\ = \frac{1}{R_0} \left[ 1 - J_2 P_2(0) + \frac{1}{2} q \right]. \quad (1.4.9) \end{aligned}$$

При наличии осевой симметрии в распределении плотности Земли моменты инерции (1.3.23) относительно двух взаимно перпендикулярных осей, расположенных в экваториальной плоскости, будут совпадать, т. е.  $A = B$ . Отсюда согласно (1.3.22) найдем

$$J_2 = \frac{C - A}{MR_0^2}. \quad (1.4.10)$$

Учитывая далее формулу (1.3.20), можно преобразовать (1.4.9) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{C - A}{2MR_0^2} \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} q \left( \frac{r}{R_0} \right)^3 \cos^2 \varphi \right] = \\ = \frac{1}{R_0} \left[ 1 + \frac{C - A}{2MR_0^2} + \frac{1}{2} q \right]. \quad (1.4.11) \end{aligned}$$

Уравнение (1.4.11) описывает поверхность, которую называют *нормальным сфероидом* (или *эллипсоидом Клеро*). Заметим, что иногда под нормальным сфероидом понимают не поверхность, а тело, ограниченное этой поверхностью.

Несколько преобразуем формулу (1.4.11):

$$\frac{r}{R_0} = \frac{1 + \frac{C - A}{2MR_0^2} \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} q \left( \frac{r}{R_0} \right)^3 \cos^2 \varphi}{1 + \frac{C - A}{2MR_0^2} + \frac{1}{2} q}. \quad (1.4.12)$$

Здесь  $(C - A)/MR_0^2$  и  $q$  — величины первого порядка малости, а отношение  $R_0/r$  отличается от единицы на величину первого по-

рядка малости. Отбросив в правой части (1.4.12) величины выше первого порядка малости, получим

$$r = R_0(1 - \alpha \sin^2 \varphi), \quad (1.4.13)$$

где

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{C - A}{MR_0^2} + \frac{q}{2}. \quad (1.4.14)$$

Покажем, что уравнение (1.4.13) с точностью до величин первого порядка малости совпадает с уравнением сжатого эллипсоида вращения. Действительно, в декартовой прямоугольной системе координат  $Oxyz$ , начало которой совпадает с центром масс эллипсоида, ось  $Oz$  проходит по оси вращения, а оси  $Ox$  и  $Oy$  расположены в экваториальной плоскости, уравнение эллипсоида вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{R_0^2} + \frac{z^2}{R_{\pi}^2} = 1, \quad (1.4.15)$$

где  $R_0$  и  $R_{\pi}$  — соответственно экваториальный и полярный радиусы эллипсоида. Переходя к сферическим координатам

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = R \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = R \sin \varphi$$

(здесь  $R$  — расстояние от начала координат до точки на поверхности эллипсоида,  $\varphi$  и  $\lambda$  — ее широта и долгота), получим

$$\frac{R^2 \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \frac{R^2 \sin^2 \varphi}{R_{\pi}^2} = 1,$$

откуда

$$R = R_0 \left[ \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \alpha)^2} \right]^{-1/2}, \quad (1.4.16)$$

где

$$\alpha = \frac{R_0 - R_{\pi}}{R_0} \quad (1.4.17)$$

— сжатие эллипсоида. Если сохранить в разложении правой части (1.4.16) в ряд слагаемые только первого порядка относительно сжатия  $\alpha$ , то получим уравнение

$$R = R_0(1 - \alpha \sin^2 \varphi), \quad (1.4.18)$$

которое совпадает с (1.4.13). Итак, с точностью до малых первого порядка нормальный сфероид совпадает с эллипсоидом вращения, у которого  $\alpha$  — сжатие, а  $R_0$  — экваториальный радиус. Поэтому во многих задачах в качестве фигуры Земли рассматривают эллипсоид.

В 1964 году Международный астрономический союз в качестве рекомендуемой модели фигуры Земли принял общий земной эллипсоид, параметры которого с учетом более поздних уточнений имеют следующие значения [31]:

— экваториальный радиус  $R_0 = 6\,378\,137$  м,

$$\text{— сжатие } \alpha = \frac{R_9 - R_{\Pi}}{R_9} = \frac{1}{298,25},$$

— произведение постоянной тяготения на массу Земли  $fM = 398600,4 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ .

Эти параметры выбраны из условий, что объем эллипсоида равен объему Земли, их экваториальные плоскости совпадают, причем малая ось эллипсоида направлена по оси вращения Земли, сумма квадратов разности по высоте между поверхностями эллипсоида и геоида минимальна.

Иногда оказывается целесообразным повысить точность локального описания фигуры Земли (например, на территории одного государства) за счет использования так называемого *референц-эллипсоида*. Указанный эллипсоид ориентируют таким образом, чтобы его поверхность наилучшим образом совпадала с поверхностью геоида в рассматриваемом месте. При этом центр масс тела, ограниченного референц-эллипсоидом, может не совпадать с центром масс Земли, однако их оси вращения должны быть параллельными. В Советском Союзе в качестве референц-эллипсоида принят эллипсоид Ф. Н. Красовского (1940 г.) с большой полуосью 6 378 245 м и сжатием 1/298,3.

Установлено, что Земля имеет сжатие не только вдоль полярной оси, но также в экваториальной плоскости, правда, примерно в 100 раз более слабое. Поэтому в некоторых задачах рассматривают модель фигуры Земли в виде трехосного эллипсоида. Один из таких трехосных эллипсоидов, отвечающий современным данным астрономии, геодезии и гравиметрии, имеет следующие величины полуосей [25]:  $a = 6378266,30$  м,  $b = 6378053,70$  м,  $c = 6356774,72$  м.

**1.4.2. Ускорение силы тяжести.** Определим ускорение силы тяжести  $\mathbf{g}_r$ , действующее на тело, которое находится на поверхности Земли:

$$\mathbf{g}_r = \text{grad } U_r. \quad (1.4.19)$$

Будем рассматривать модель, соответствующую нормальному сфероиду. Для градиента потенциала силы тяжести имеем

$$\text{grad } U_r = \frac{\partial U_r}{\partial n} \mathbf{n}^0, \quad (1.4.20)$$

где  $\mathbf{n}^0$  — единичный вектор внешней нормали к уровенной поверхности. Угол  $\varepsilon$  между вектором  $\mathbf{n}^0$  и радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  произвольной точки поверхности сфероида равен разности географической  $\varphi_r$  и геоцентрической широт, т. е.

$$\varepsilon = \varphi_r - \varphi.$$

Величина угла  $\varepsilon$  принимает максимальное значение на широте  $\varphi = 45^\circ$ , причем  $\varepsilon_{\max} \approx \alpha$ . Проекция ускорения силы тяжести на радиус-вектор

$$g_{rr} = -g_r \cos \varepsilon, \quad (1.4.21)$$

но, с другой стороны, на поверхности сфероида

$$g_{\tau r} = \frac{\partial U_{\tau}}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (1.4.22)$$

и с точностью до первой степени сжатия  $\alpha$  имеем из (1.4.21) и (1.4.22)

$$g_{\tau} = - \frac{\partial U_{\tau}}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (1.4.23)$$

Для принятой модели

$$U_{\tau} = f \frac{M}{r} \left[ 1 + \frac{C-A}{2MR_0^2} \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} q \left( \frac{r}{R_0} \right)^3 \cos^2 \varphi \right], \quad (1.4.24)$$

поэтому

$$g_{\tau} = f \frac{M}{R^2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{C-A}{MR_0^2} \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) - q \left( \frac{R}{R_0} \right)^3 \cos^2 \varphi \right]. \quad (1.4.25)$$

Подставляя сюда соотношения (1.4.13) с заменой  $r = R$  и (1.4.14), получим с точностью до слагаемых не выше первого порядка малости:

$$g_{\tau} = f \frac{M}{R_0^2} \left[ 1 + \alpha - \frac{3}{2} q + \left( \frac{5}{2} q - \alpha \right) \sin^2 \varphi \right]. \quad (1.4.26)$$

Обозначим

$$g_{\tau_0} = f \frac{M}{R_0^2} \left( 1 + \alpha - \frac{3}{2} q \right) \quad (1.4.27)$$

— ускорение силы тяжести на экваторе, тогда с точностью до величины первого порядка малости формулу (1.4.26) можно привести к виду

$$g_{\tau} = g_{\tau_0} (1 + \beta \sin^2 \varphi), \quad (1.4.28)$$

где

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha. \quad (1.4.29)$$

Соотношение (1.4.28), определяющее с точностью до малых первого порядка изменение силы тяжести на поверхности неоднородного сфероида, было получено Клеро [33].

Для более сложных моделей геоида можно найти соответствующие зависимости, позволяющие учесть малые величины второго и более высокого порядка. Так, с точностью до малых второго порядка [18]

$$g = g_0 (1 + \beta_1 \sin^2 \varphi - \beta_2 \sin^2 2\varphi), \quad (1.4.30)$$

где

$$\beta_1 = \frac{5}{2} q - \alpha - \frac{53}{14} q\alpha, \quad \beta_2 = \frac{5}{8} q\alpha - \frac{1}{8} \alpha^2. \quad (1.4.31)$$

В свое время различными авторами были предложены формулы для вычисления ускорения силы тяжести. Некоторые из этих формул приведены ниже по данным работ [4, 18, 25]. Численные коэффициенты соответствуют размерности ускорения силы тяжести см/с<sup>2</sup>. Небольшое различие в коэффициентах обусловлено несовпадением исходных значений параметров фигуры Земли.

Формула Гельмерга (1901 г.,  $\alpha = 1/298,2$ ):

$$g_{\tau} = 978,030(1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi).$$

Формула для общего земного эллипсоида МАС (1964 г.,  $\alpha = 1/298,25$ ):

$$g_{\tau} = 978,0319(1 + 0,00530240 \sin^2 \varphi - 0,00000585 \sin^2 2\varphi).$$

Формула Аксенова (1977 г.):

$$g_{\tau} = 978,028(1 - 0,0000072 \sin \varphi + 0,005364 \sin^2 \varphi + \\ + 0,000012 \sin^3 \varphi - 0,000063 \sin^4 \varphi).$$

Формула Загребина — Резановой для трехосного эллипсоида (1969 г., полярное сжатие  $1/298,25$ , экваториальное сжатие  $1/30000$ ):

$$g_{\tau} = 978,0318[1 + 0,00530240 \sin^2 \varphi + 0,00001651 \cos^2 \varphi \cdot \\ \cdot \cos 2(\lambda - 15^\circ) - 0,00000585 \sin^2 2\varphi].$$

Здесь  $\varphi$  — геоцентрическая широта,  $\lambda$  — долгота. Все формулы, кроме предпоследней, имеют точность второго порядка малости относительно сжатия. Предпоследняя формула учитывает величины до четвертого порядка малости включительно и различие в сжатиях для северного и южного полушарий.

## ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

Одной из наиболее простых и одновременно достаточно полно отражающих истинную природу движения небесных тел является задача двух тел. При постановке этой модельной задачи предполагается, что существуют только два взаимно притягивающихся небесных тела  $M$  и  $m$ , причем первое из них часто имеет большую массу и является шаром со сферическим распределением плотности. Малое тело  $m$  можно рассматривать в качестве материальной точки. Как показано в п. 1.2.1, сила притяжения шара со сферическим распределением плотности, действующая на внешнюю материальную точку, не изменится, если всю массу шара сосредоточить в его центре. Таким образом, задача о движении двух тел по существу сводится к задаче о движении двух материальных точек  $M$  и  $m$ . Материальную точку с большей массой ( $M$ ) обычно называют *притягивающим центром*. Если же речь идет о теле  $M$ , то его называют *центральной телом*. Выбор центрального тела зависит от исследуемой задачи. Например, при изучении движения искусственного спутника в околоземном пространстве за центральное тело прини-

Т а б л и ц а 2.1

Космические объекты искусственного происхождения  
по состоянию на 31 марта 1988 года  
(Flight International.— 1988.— V. 134, No. 4124)

Принадлежность	Число объектов на околоземных орбитах и в дальнем космосе		Число объектов, сошедших с орбит	
	аппараты	фрагменты	аппараты	фрагменты
СССР	1064	2236	1346	7538
США	530	2611	571	2206
Япония	35	47	5	34
Франция	15	24	7	46
Канада	14	0	0	0
Великобритания	9	1	6	4
Прочие страны и организации	95	469	39	96
Итого	1762	5388	1974	9927

мают Землю, а при изучении орбитального движения Земли как планеты Солнечной системы за центральное тело принимают Солнце. Меньшее тело (или материальную точку)  $m$  часто для краткости называют *спутником*.

4 октября 1957 года в Советском Союзе был выведен на орбиту первый искусственный спутник Земли. По состоянию на 31 марта 1988 года в космическом пространстве находились 1762 околоземных спутника и автоматических межпланетных аппарата, а общее число объектов, включая последние ступени ракет-носителей и их фрагменты, достигло 7150 (табл. 2.1). К указанной дате прекратили существование (сошли с околоземной орбиты и разрушились в атмосфере) 1974 спутника и 9927 крупных фрагментов ракет-носителей.

Установим основные закономерности задачи двух тел, которые являются определяющими для движения небесных тел, как естественных, так и искусственных.

## § 2.1. Уравнения движения

Для описания движения центра масс тела или материальной точки необходимо ввести некоторое начало отсчета — систему координат. При рациональном выборе системы координат часто удается значительно упростить уравнения движения.

Различают *инерциальную* и *неинерциальную* системы координат. Инерциальной называют такую систему координат, которая находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного поступательного движения относительно «абсолютной» системы отсчета, например, удаленных звезд, условно называемых неподвижными. Всякая другая система координат является неинерциальной. Заметим, что часто при решении задач механики некоторые неинерциальные системы координат оказывается возможным рассматривать в качестве инерциальных. При этом допускается несущественная для данной задачи погрешность, но зато удается значительно упростить задачу в целом.

Уравнения движения в инерциальной системе координат имеют наиболее простой вид и записываются на основе второго закона Ньютона: произведение массы тела на его ускорение равно действующей силе.

**2.1.1. Абсолютное движение и относительное движение.** Рассмотрим движение материальных точек  $M$  и  $m$  в некоторой инерциальной системе координат. Единственной силой, под действием которой совершается движение, является сила притяжения. Для материальной точки  $m$  эта сила определяется формулой (1.1.1):

$$\mathbf{F} = -f \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}^0.$$

Здесь  $\mathbf{r}^0$  — единичный вектор, направленный от  $M$  к  $m$ ,  $r$  — относительное расстояние. Сила, действующая на материальную точку  $M$ , равна по величине  $|\mathbf{F}|$ , но направлена в противоположную сторону.

Запишем на основе второго закона Ньютона уравнения абсолютного движения материальных точек с массами  $m$  и  $M$ :

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_1}{dt^2} = -f \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}^0, \quad M \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_2}{dt^2} = f \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}^0,$$

или

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_1}{dt^2} = -f \frac{M}{r^2} \mathbf{r}^0, \quad \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_2}{dt^2} = f \frac{m}{r^2} \mathbf{r}^0, \quad (2.1.1)$$

где  $\boldsymbol{\rho}_1$  — радиус-вектор, проведенный из начала инерциальной системы координат в точку  $m$ , а  $\boldsymbol{\rho}_2$  — радиус-вектор, проведенный из начала инерциальной системы координат в точку  $M$ . Понятно, что

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 + \mathbf{r}, \quad (2.1.2)$$

где  $\mathbf{r} = r\mathbf{r}^0$ .

Вычитая из первого уравнения (2.1.1) второе, получим с учетом (2.1.2) уравнение движения материальной точки  $m$  относительно притягивающего центра  $M$ :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -f \frac{M+m}{r^2} \mathbf{r}^0, \quad (2.1.3)$$

или

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu^*}{r^2} \mathbf{r}^0, \quad (2.1.4)$$

если обозначить

$$\mu^* = f(M+m) \quad (2.1.5)$$

— произведение постоянной притяжения на сумму масс взаимно притягивающихся материальных точек.

Уравнение (2.1.4) является основным в задаче двух тел. В координатной форме оно эквивалентно трем уравнениям второго порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\mu^*}{r^3} x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\mu^*}{r^3} y, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\mu^*}{r^3} z, \quad (2.1.6)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**2.1.2. Движение непритягивающего спутника.** Во многих задачах небесной механики  $m \ll M$  и оказывается возможным пренебречь ускорением, которое спутник  $m$  сообщает притягивающему центру  $M$ . В результате приходим к *ограниченной задаче двух тел* (или задаче о непритягивающем спутнике). Тогда можно совместить начало инерциальной системы координат с притягивающим центром  $M$  ( $\boldsymbol{\rho}_1 = \mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\rho}_2 = 0$ ) и записать уравнение относительного движения спутника в следующем виде:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -f \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}^0,$$



или

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}^0, \quad (2.1.7)$$

где

$$\mu = fM \quad (2.1.8)$$

— произведение постоянной притяжения на массу притягивающего центра.

Из сравнения уравнений (2.1.4) и (2.1.7) следует, что притягивающий спутник с массой  $m$  движется относительно притягивающего центра с массой  $M$  так, как двигался бы непритягивающий

Т а б л и ц а 2.2

Характеристики тел Солнечной системы [1]

Небесное тело	Гравитационный параметр $\mu$ , км <sup>3</sup> /с <sup>2</sup>	Экваториальный радиус, км	Ускорение силы притяжения на экваторе, отнесенное к $g$
Солнце	132,712438 · 10 <sup>9</sup>	696000	27,96
Меркурий	22032	2439	0,38
Венера	324858,8	6052	0,91
Земля	398600,5	6378,14	1,0
Луна	4902,79	1738	0,166
Марс	42828,29	3397,2	0,38
Юпитер	126712000	71398	2,54
Сатурн	37934100	60000	1,08
Уран	5803160	25400	0,92
Нептун	6871308	24300	1,19
Плутон	44238	2500	0,72

спутник вокруг притягивающего центра с массой  $M + m$ . Если, как предполагалось,  $m \ll M$ , то можно принять  $\mu^* \approx \mu$ . Значения  $\mu$  для различных тел Солнечной системы приведены в табл. 2.2 [1].

## § 2.2. Интегралы уравнений движения

Движение спутника относительно притягивающего центра описывается системой дифференциальных уравнений шестого порядка (2.1.6). *Общий интеграл* этой системы есть совокупность шести независимых между собою *первых интегралов*. Вычислим первые интегралы системы (2.1.6).

**2.2.1. Интеграл энергии.** Умножим скалярно векторное уравнение движения (2.1.7) на  $2\mathbf{r}$ , где  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}$  — скорость движения, точкой сверху обозначена производная по времени. С учетом равенства  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$  получим

$$2\mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}} = - \frac{2\mu}{r^3} \dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}.$$

или

$$\frac{d(\dot{\mathbf{r}}^2)}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \frac{d(r^2)}{dt}.$$

Но  $\dot{\mathbf{r}}^2 = \mathbf{V}^2 = V^2$  и  $\mathbf{r}^2 = r^2$ ; поэтому можно записать

$$\frac{d(V^2)}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \frac{d(r^2)}{dt},$$

а затем

$$\frac{d(V^2)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{2\mu}{r} \right).$$

Отсюда следует *интеграл энергии*

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = h. \quad (2.2.1)$$

Здесь  $h$  — постоянная интеграла энергии, равная удвоенной величине полной энергии единицы массы спутника. Первое слагаемое в (2.2.1) — это удвоенная кинетическая энергия единицы массы спутника, а второе слагаемое — удвоенная потенциальная энергия единицы массы спутника. Из интеграла энергии следует, что полная энергия в задаче двух тел есть величина постоянная. Расстояние спутника от притягивающего центра ограничено, если  $h < 0$ , и может увеличиваться неограниченно, если  $h \geq 0$ . Действительно, предположим, что спутник может неограниченно удаляться от притягивающего центра, т. е.  $r \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow V_\infty$ . Тогда из интеграла энергии (2.2.1) получим в пределе

$$V_\infty^2 = h. \quad (2.2.2)$$

Это условие имеет смысл только при  $h \geq 0$ , так как слева стоит квадрат скорости на бесконечности. В рассматриваемом случае физический смысл постоянной интеграла энергии определяется условием (2.2.2). Если же  $h < 0$ , то исходное предположение о возможности неограниченного удаления спутника от притягивающего центра оказывается неверным.

Из интеграла энергии следует, что при удалении спутника от притягивающего центра его скорость уменьшается, а в случае приближения — увеличивается. В этом проявляется гравитационное действие притягивающего центра.

**2.2.2. Интеграл площадей.** Умножим теперь уравнение движения (2.1.7) векторно на  $\mathbf{r} = \mathbf{V}$ , полагая сначала, что  $\mathbf{r} \times \mathbf{V} \neq 0$ , т. е. векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{V}$  неколлинеарны. Тогда

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{r}. \quad (2.2.3)$$

По определению векторного произведения  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ . Вычислим далее

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.2.4)$$

С учетом этого соотношения можно представить (2.2.3) в виде

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0, \text{ или } \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) = 0.$$

Отсюда найдем векторный интеграл площадей

$$\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{C}, \quad (2.2.5)$$

который эквивалентен трем скалярным интегралам

$$yV_z - zV_y = C_x, \quad zV_x - xV_z = C_y, \quad xV_y - yV_x = C_z. \quad (2.2.6)$$

Здесь  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ ,  $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)$ ; проекции векторов рассматриваются в системе координат, начало которой совпадает с притягивающим центром, а оси имеют постоянную ориентацию в пространстве.

Если умножить уравнение (2.2.5) скалярно на  $\mathbf{r}$ , то получим

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (2.2.7)$$

Отсюда следует, что вектор  $\mathbf{r}$  всегда находится в плоскости, проходящей через центр притяжения и определяемой нормальным к ней вектором  $\mathbf{C}$ . Эта плоскость, т. е. плоскость движения спутника, называется *неизменяемой плоскостью Лапласа*. Чтобы получить уравнение плоскости движения спутника в координатной форме, умножим уравнения (2.2.6) соответственно на  $x, y, z$  и сложим. Тогда получим

$$C_x x + C_y y + C_z z = 0. \quad (2.2.8)$$

Постоянный вектор  $\mathbf{C}$  можно определить с помощью векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{V}$ , заданных в любой момент времени. Например, если эти векторы заданы в начальный момент времени, то

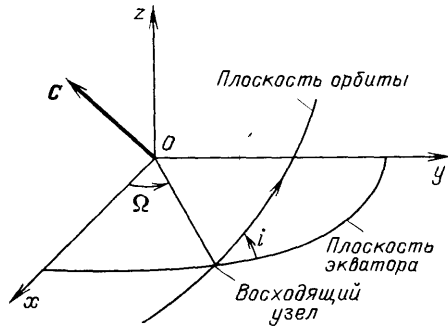
$$\mathbf{C} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{V}_0. \quad (2.2.9)$$

Вектор  $\mathbf{C}$  можно также определить, задав его величину  $C$  и три угла  $\alpha, \beta, \gamma$ , образуемые этим вектором с координатными осями. Поскольку

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

то лишь два угла являются линейно независимыми. Можно вообще задавать два любых независимых угла, связанных с вектором  $\mathbf{C}$ . Обычно в небесной механике рассматривают угол  $i$  между плоскостью Лапласа и основной координатной плоскостью (например,

плоскостью экватора) и угол  $\Omega$  — долготу восходящего узла, отсчитываемую от условного нулевого направления (например, на точку весеннего равноденствия) до линии пересечения плоскости движения спутника с плоскостью экватора (рис. 2.1). Эта линия пересечения плоскостей является *линией узлов*. *Восходящим узлом* называют точку пересечения траектории спутника с плоскостью экватора при переходе из южного полушария в северное. *В нисходящем узле* спутник переходит из северного полушария в южное. С помощью углов  $i$  и  $\Omega$  запишем составляющие вектора  $\mathbf{C}$  в экваториальной прямоугольной декартовой системе координат, ось  $Ox$  которой направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $Oy$  лежит



в экваториальной (или основной координатной) плоскости, а ось  $Oz$  дополняет систему координат до правой:

$$\begin{aligned} C_x &= C \sin i \sin \Omega, \\ C_y &= -C \sin i \cos \Omega, \\ C_z &= C \cos i. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Установим физический смысл интеграла площадей. По определению модуля векторного произведения имеем

$$rV \cos \theta = C, \quad (2.2.11)$$

где  $\theta$  — угол наклона траектории, т. е. угол между вектором скорости и нормалью к радиусу-вектору ( $\theta + \frac{\pi}{2}$  — угол между  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{V}$ ). Обозначим далее

$$V_n = V \cos \theta; \quad (2.2.12)$$

тогда

$$rV_n = C, \quad (2.2.13)$$

или в полярных координатах

$$r^2 \dot{\vartheta} = C, \quad (2.2.14)$$

где  $\vartheta$  — полярный угол, отсчитываемый от некоторого направления.

Последнее соотношение допускает простое истолкование интеграла площадей. В самом деле, пусть спутник в момент  $t$  занимает положение  $M_1$ , а в момент  $t + \Delta t$  — положение  $M_2$  (рис. 2.2). За время  $\Delta t$  радиус-вектор спутника «заметает» площадь, которую с точностью до малых первого порядка относительно  $\Delta \vartheta$  можно вычислить по формуле

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta \vartheta. \quad (2.2.15)$$

Разделив обе части этого равенства на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta}. \quad (2.2.16)$$

Здесь  $dS/dt$  — *секториальная скорость* спутника относительно притягивающего центра. С учетом соотношения (2.2.14) можно записать

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}. \quad (2.2.17)$$

Отсюда следует, что секториальная скорость спутника постоянна, а величина интеграла площадей численно равно удвоенной секториальной скорости.

Если за время от  $t_0$  до  $t$  спутник проходит путь от точки  $M_0$  до точки  $M$  и заметает площадь  $S$ , то, интегрируя уравнение (2.2.17) в пределах указанного промежутка времени, получим соотношение

$$S = \frac{C}{2} (t - t_0), \quad (2.2.18)$$

которое выражает *второй закон Кеплера*:

*Площадь, заметаемая радиусом-вектором спутника, пропорциональна времени, в течение которого она заметена, или за равные промежутки времени радиус-вектор спутника заметает равные площади.*

Из интеграла площадей, записанного с помощью полярных координат (2.2.14), следует, что угловая скорость спутника увеличивается по мере приближения к притягивающему центру и уменьшается при удалении от него. Эта закономерность использована в системе телевизионной связи «Орбита», включающей приемо-передающие станции на территории Советского Союза и спутники связи типа «Молния». Спутники выводятся на траекторию, у которой самая близкая к поверхности Земли точка находится в южном полушарии на высоте около 500 км, а наиболее удаленная точка находится в северном полушарии на высоте около 40500 км, плоскость орбиты наклонена к экватору под углом  $\sim 63^\circ$ . Поэтому спутники медленно перемещаются по небесной сфере в северном полушарии, что увеличивает располагаемое для связи время и одновременно улучшает условия работы поворотных антенн наземных станций, отслеживающих движение спутника.

При выводе интеграла площадей (2.2.5) предполагалось, что векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{V}$  неколлинеарны. Пусть теперь они будут коллинеарными, т. е.  $\mathbf{r} \times \mathbf{V} = 0$ . Легко показать, что в этом случае спутник

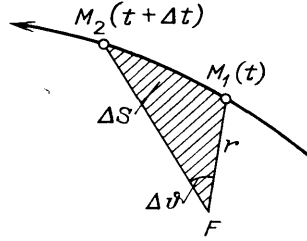


Рис. 2.2. «Заметаемая» площадь

движется прямолинейно вдоль радиуса-вектора и понятие плоскости движения теряет смысл.

**2.2.3. Интеграл Лапласа.** Перемножим векторно уравнение движения (2.1.7) и интеграл площадей (2.2.5):

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{V}). \quad (2.2.19)$$

Преобразуем сначала левую часть равенства (2.2.19) с учетом  $\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{V}}$  и  $\mathbf{C} = \text{const}$ :

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C} = \frac{d}{dt} (\mathbf{V} \times \mathbf{C}), \quad (2.2.20)$$

а затем правую часть с помощью известного тождества для двойного векторного произведения и соотношений  $\mathbf{r}^2 = r^2$ ,  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = rr\dot{}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) &= -\frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(r^2)] = \\ &= -\frac{\mu}{r^3} (rr\dot{r} - \dot{r}r^2) = -\mu \left( \frac{r\dot{r}}{r^2} - \frac{\dot{r}}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left( \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Приравняв соотношения (2.2.20) и (2.2.21), получим

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{V} \times \mathbf{C}) = \frac{d}{dt} \left( \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{V} \times \mathbf{C} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0,$$

откуда следует векторный интеграл Лапласа

$$\mathbf{V} \times \mathbf{C} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{f}. \quad (2.2.22)$$

Если спроектировать равенство (2.2.22) на оси некоторой системы координат, то дополнительно к четырем первым интегралам движения (2.2.1) и (2.2.6) получим еще три. Установим связь между некоторыми интегралами движения. Предварительно заметим, что обе составляющие вектора Лапласа  $\left( \mathbf{V} \times \mathbf{C} \text{ и } -\mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$  лежат в плоскости движения спутника. Следовательно, и сам вектор Лапласа всегда лежит в плоскости движения. Имеем

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{C} = 0, \quad (2.2.23)$$

или

$$f_x C_x + f_y C_y + f_z C_z = 0, \quad (2.2.24)$$

где  $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ . Условие (2.2.24) является первым соотношением связи между интегралами. Для установления второго условия связи

рассмотрим скалярное произведение

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{f} = f^2 = \left( \mathbf{V} \times \mathbf{C} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right)^2 = (\mathbf{V} \times \mathbf{C})^2 - 2\mu (\mathbf{V} \times \mathbf{C}) \frac{\mathbf{r}}{r} + \mu^2 \frac{r^2}{r^2}.$$

Здесь

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{C})^2 = |\mathbf{V} \times \mathbf{C}|^2 = (VC)^2 = V^2 C^2,$$

так как  $\mathbf{V} \perp \mathbf{C}$ , и

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) = C^2 = C^2, \quad \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Тогда

$$f^2 = V^2 C^2 - \frac{2\mu C^2}{r} + \mu^2,$$

или

$$f^2 = \mu^2 + C^2 \left( V^2 - \frac{2\mu}{r} \right).$$

Отсюда с учетом (2.2.1) получим окончательно второе условие связи

$$f^2 = \mu^2 + C^2 h. \quad (2.2.25)$$

Таким образом, из семи первых интегралов уравнений движения независимыми являются только пять, а следовательно, полученные семь интегралов не образуют общего интеграла уравнений движения.

Покажем один из возможных способов вычисления последнего, шестого интеграла системы (2.1.6). Из семи найденных интегралов (2.2.1), (2.2.6), (2.2.22), а также условий связи (2.2.24), (2.2.25) можно выразить любые пять параметров движения через шестой и постоянные интегрирования  $h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z$ . Предположим, что в качестве такого параметра движения взята координата  $x$ , тогда

$$\begin{aligned} y &= \Phi_1(x, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z), \\ z &= \Phi_2(x, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z), \\ \dot{x} &= \Phi_3(x, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z), \\ \dot{y} &= \Phi_4(x, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z), \\ \dot{z} &= \Phi_5(x, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z). \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Здесь  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ , и легко видеть, что третье уравнение системы (2.2.26) интегрируется в квадратурах методом разделения переменных  $x$  и  $t$ :

$$\int \frac{dx}{\Phi_3(x, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z)} = t + K, \quad (2.2.27)$$

где  $K$  — шестая произвольная постоянная. Отсюда в принципе можно определить координату  $x$  как функцию времени  $t$ . После подстановки найденного выражения для  $x$  в систему (2.2.26) получим

шесть соотношений для параметров движения, определяющих их зависимость от времени и шести произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} x &= \Psi_1(t, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z, K), \\ y &= \Psi_2(t, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z, K), \\ z &= \Psi_3(t, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z, K), \\ \dot{x} &= \Psi_4(t, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z, K), \\ \dot{y} &= \Psi_5(t, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z, K), \\ \dot{z} &= \Psi_6(t, h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z, K). \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Уравнения (2.2.28) составляют общий интеграл уравнений движения (2.1.6). Напомним, что из восьми постоянных интегрирования  $h, C_x, C_y, C_z, f_x, f_y, f_z, K$  лишь шесть являются независимыми в силу соотношений (2.2.24), (2.2.25).

Таким образом, показано существование общего решения в задаче двух тел. Произвольные постоянные задачи определяются из начальных условий, что, вообще говоря, является довольно сложной процедурой, которая в буквенном виде не разрешается. Поэтому обычно общее решение ищется в другой форме, где в качестве независимой переменной используется не время движения, а полярный угол  $\vartheta$ .

**2.2.4. Уравнение орбиты.** Согласно условию (2.2.8) движение спутника происходит в неизменяемой плоскости, т. е. траектория представляет собой *плоскую кривую*, которую называют *орбитой спутника*. Для получения уравнения орбиты используем вектор Лапласа. Предварительно найдем скалярное произведение  $\mathbf{f}$  на  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{V} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{r} - \frac{\mu \mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) - \mu r = C^2 - \mu r.$$

Но по определению скалярного произведения

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} = fr \cos \vartheta,$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{r}$ , тогда

$$fr \cos \vartheta = C^2 - \mu r$$

и

$$r(\mu + f \cos \vartheta) = C^2,$$

откуда

$$r = \frac{C^2}{\mu + f \cos \vartheta}.$$

Вводя обозначения

$$p = \frac{C^2}{\mu} \quad (2.2.29)$$

и

$$e = \frac{f}{\mu}, \quad (2.2.30)$$



получим окончательно уравнение орбиты спутника в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (2.2.31)$$

Здесь  $p$  — параметр орбиты, определяющий ее линейные размеры, а  $e$  — эксцентриситет орбиты, характеризующий ее форму.

С другой стороны, соотношение (2.2.31) представляет собой уравнение конического сечения в полярных координатах с полюсом в фокусе. Это коническое сечение симметрично относительно вектора Лапласа, а полярный угол  $\vartheta$ , который называют *истинной аномалией*, определяет поворот текущего радиуса-вектора относительно оси симметрии. Полученный результат отражает *первый закон Кеплера*:

*Движение спутника относительно притягивающего центра всегда совершается по коническому сечению (по эллипсу, окружности, гиперболу, параболе или прямой), в одном из фокусов которого находится притягивающий центр.*

Главная, или фокальная, ось орбиты, совпадающая с направлением вектора Лапласа, называется в астрономии *линией апсид*. Точки пересечения этой линии с орбитой называют *апсидальными*, или просто *апсидами*. Апсиды совпадают с вершинами конического сечения и имеют специальные названия. В общем случае ближайшую к притягивающему центру апсиду называют *перигентром*, а наиболее удаленную — *апоцентром*. Заметим, что перигентр существует для любых орбит, а апоцентр — только для замкнутой. В зависимости от притягивающего центра апсиды имеют свои собственные названия. Например, для Земли это *перигей* и *апогей*, для Луны — *периселений* и *апоселений*, для Солнца — *перигелий* и *афелий* и т. д.

Преобразуем теперь формулу (2.2.30) для эксцентриситета орбиты с учетом уравнения связи (2.2.25):

$$e = \sqrt{1 + h \frac{C^2}{\mu^2}}. \quad (2.2.32)$$

Из соотношений (2.2.29) и (2.2.32) следует, что по заданным величинам произведения постоянной тяготения на массу центрального тела ( $\mu$ ), постоянной интеграла энергии ( $h$ ) и постоянной интеграла площадей ( $C$ ) можно вычислить параметр орбиты и ее эксцентриситет, т. е. задать форму и размеры орбиты в ее плоскости.

### § 2.3. Скорость спутника

В зависимости от формы и размеров орбиты, а также положения спутника на орбите его скорость может меняться в достаточно широком диапазоне. Наряду с расстоянием до притягивающего центра скорость спутника является одним из основных параметров

движения. Разложим вектор скорости на две составляющие. Будем считать, что одна составляющая ( $V_r$ ) направлена по радиусу-вектору, а вторая ( $V_n$ ) — по нормали к радиусу-вектору в сторону движения (рис. 2.3). Тогда

$$\mathbf{V} = V_r \mathbf{r}^0 + V_n \mathbf{n}^0, \quad (2.3.1)$$

где  $\mathbf{r}^0$ ,  $\mathbf{n}^0$  — соответствующие единичные векторы. Составляющую  $V_r$  называют *радиальной*, а составляющую  $V_n$  — *трансверсальной*.

**2.3.1. Составляющие вектора скорости.** Установим зависимость составляющих скорости  $V_r$  и  $V_n$  от параметра  $p$  и эксцентриситета  $e$  орбиты, а также истинной аномалии  $\vartheta$ .

Рис. 2.3. Составляющие скорости спутника

Сначала рассмотрим радиальную составляющую скорости

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (2.3.2)$$

Дифференцируя уравнение орбиты (2.2.31) по истинной аномалии, получим

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{pe \sin \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \frac{r^2 e \sin \vartheta}{p}. \quad (2.3.3)$$

Далее, из уравнения (2.2.14) и соотношения (2.2.29) найдем

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \quad (2.3.4)$$

и окончательно

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta. \quad (2.3.5)$$

Для трансверсальной составляющей скорости имеем

$$V_n = r \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (2.3.6)$$

Подставляя сюда производную (2.3.4), получим

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta). \quad (2.3.7)$$

Полная скорость спутника

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_n^2},$$

или

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}. \quad (2.3.8)$$

Из этой формулы следует, что полная скорость спутника на заданной орбите изменяется в фиксированных пределах. Максималь-

ная скорость достигается в перигеуме орбиты ( $\phi = 0$ )

$$V_{\max} = V_{\text{п}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e), \quad (2.3.9)$$

а минимальная скорость — в апогеуме орбиты ( $\phi = \pi$ , если апоцентр данной орбиты существует)

$$V_{\min} = V_{\text{а}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 - e). \quad (2.3.10)$$

Вычислим с помощью уравнения орбиты (2.2.31) расстояния от притягивающего центра до спутника в перигеуме

$$r_{\min} = r_{\text{п}} = \frac{p}{1 + e} \quad (2.3.11)$$

и в апогеуме

$$r_{\max} = r_{\text{а}} = \frac{p}{1 - e}. \quad (2.3.12)$$

Как следует из формулы (2.3.5), в перигеуме и апогеуме орбиты радиальная составляющая скорости обращается в нуль. С помощью формул (2.3.9)–(2.3.12) можно установить связь между величинами скоростей и радиусами апсидальных точек

$$\frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{а}}} = \frac{r_{\text{а}}}{r_{\text{п}}},$$

или

$$V_{\text{п}}r_{\text{п}} = V_{\text{а}}r_{\text{а}}. \quad (2.3.13)$$

Это соотношение по своей форме напоминает «правило рычага» из задачи равновесия моментов сил (вместо сил здесь фигурируют скорости  $V_{\text{п}}$  и  $V_{\text{а}}$ ). По существу (2.3.13) отражает равенство секториальной скорости в перигеуме и апогеуме.

**2.3.2. Связь скорости с типом орбиты.** С помощью формулы (2.2.32), определяющей эксцентриситет орбиты через постоянную интеграла энергии, установим зависимость типа орбиты от скорости движения. Как было показано в п. 2.2.1, для замкнутых орбит  $h < 0$ . Следовательно, в этом случае по формуле (2.2.32) имеем  $0 \leq e < 1$ . Такие орбиты называют *эллиптическими*. Из интеграла энергии (2.2.1) видно, что в любой точке эллиптической орбиты выполняется неравенство

$$V^2 < \frac{2\mu}{r}. \quad (2.3.14)$$

В частном случае, когда  $e = 0$ , движение происходит по *круговой орбите*. Согласно уравнению орбиты (2.2.31) при  $e = 0$  имеем  $r = p = r_{\text{кр}}$ , где  $r_{\text{кр}}$  — радиус круговой орбиты. Для этого случая по формуле (2.3.8) можно установить, что

$$V = V_{\text{кр}}(r_{\text{кр}}) = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{кр}}}}, \quad (2.3.15)$$

т. е. скорость движения равна круговой скорости, соответствующей данному радиусу орбиты. Скорость (2.3.15) на поверхности планеты ( $r_{кр} = R$ ) иногда называют *первой космической*. В сочетании с величиной радиуса круговой орбиты скорость (2.3.15) характеризует вполне определенный уровень полной энергии спутника, необходимой для движения по круговой орбите.

Космический аппарат (КА) может неограниченно удаляться от притягивающего центра, если  $h \geq 0$ . При выполнении строгого равенства ( $h = 0$ ) скорость на бесконечности  $V_\infty = 0$ . Такую орбиту называют *параболической* ( $e = 1$ ), для нее скорость определяется формулой

$$V = V_{\text{пар}}(r) = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}. \quad (2.3.16)$$

*Параболическая скорость* (2.3.16) на поверхности планеты ( $r = R$ ) иногда называют *второй космической*. Это — минимальная скорость, которую необходимо сообщить КА, чтобы он неограниченно удалился от притягивающего центра. Из сравнения круговой скорости движения (2.3.15) с параболической (2.3.16) видно, что

$$V_{\text{пар}} = \sqrt{2}V_{\text{кр}}. \quad (2.3.17)$$

Если  $h > 0$ , то  $e > 1$ , и орбита является *гиперболической*. Для такой орбиты на основе интеграла энергии (2.2.1) и соотношения (2.2.2) можно записать

$$V_r^2(r) - \frac{2\mu}{r} = V_\infty^2,$$

или

$$V_r^2(r) = V_{\text{пар}}^2(r) + V_\infty^2. \quad (2.3.18)$$

Следовательно, квадрат местной (на данном расстоянии  $r$ ) гиперболической скорости равен сумме квадратов местной параболической скорости и скорости на бесконечности. Второе слагаемое ( $V_\infty$ ) с учетом (2.3.18) иногда называют *гиперболическим избытком скорости*.

**2.3.3. Примеры круговых скоростей и периодов обращения спутников.** Величина круговой скорости (2.3.15) зависит только от параметра  $\mu$  — произведения постоянной тяготения на массу притягивающего тела и радиуса орбиты  $r_{кр}$ . Для некоторых тел Солнечной системы в табл. 2.3 приведены величины круговых скоростей как функции высоты орбиты

$$H_{кр} = r_{кр} - R, \quad (2.3.19)$$

где  $R$  — радиус небесного тела. Величины  $\mu$  и  $R$  соответствуют табл. 2.2.

Зная круговую скорость и радиус орбиты, можно посчитать *период обращения* спутника  $T$ , т. е. время между двумя последовательными прохождениями через одну и ту же точку орбиты.

Действительно, если угловая орбитальная скорость спутника на круговой орбите

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{V_{\text{кр}}}{r_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{кр}}^3}}, \quad (2.3.20)$$

то период обращения

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{кр}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r_{\text{кр}}^{3/2}. \quad (2.3.21)$$

В табл. 2.3 приведены также периоды обращения спутников на круговых орбитах. Из этих данных следует, что параметры движе-

Т а б л и ц а 2.3

Орбитальные скорости (км/с) и периоды обращения (мин) спутников на круговых экваториальных орбитах

Высота орбиты, км		Небесное тело				
		Земля	Луна	Марс	Венера	Юпитер
100	$V_{\text{кр}}$	7,844	1,633	3,499	7,267	42,098
	$T$	86,5	117,8	104,7	88,7	177,9
200	$V_{\text{кр}}$	7,784	1,590	3,450	7,208	42,069
	$T$	88,5	127,6	109,2	90,8	178,2
300	$V_{\text{кр}}$	7,726	1,551	3,403	7,151	42,039
	$T$	90,5	137,6	113,8	93,0	178,6
500	$V_{\text{кр}}$	7,613	1,480	3,315	7,041	41,981
	$T$	94,6	158,3	123,1	97,4	179,3
1000	$V_{\text{кр}}$	7,350	1,338	3,121	6,787	41,836
	$T$	105,1	214,3	147,5	108,8	181,2
10000	$V_{\text{кр}}$	4,933	0,646	1,788	4,499	39,455
	$T$	347,7	1901,9	784,7	373,7	216,0
100000	$V_{\text{кр}}$	1,936	0,219	0,644	1,750	27,190
	$T$	5754,9	48532	16824	6345,4	660,1

ния спутников Земли и Венеры близки. Такой результат объясняется почти одинаковыми характеристиками гравитационных полей указанных планет.

### § 2.4. Характеристики орбит

Невозмущенное движение спутника в центральном поле притяжения часто называют *кеплеровским движением*. Согласно первому закону Кеплера орбита представляет собой кривую второго порядка, в одном из фокусов которой находится притягивающий центр. Форма и размеры орбиты, определяющие ее тип, зависят от начальных условий движения. Пусть в начальный момент заданы скорость  $V_0$  и радиус-вектор спутника  $r_0$ . Найдем единичную нормаль к плоскости движения, фиксирующую эту плоскость,

$$C^0 = \frac{r_0 \times V_0}{|r_0 \times V_0|}. \quad (2.4.1)$$

Теперь будем рассматривать орбиту, лежащую в зафиксированной плоскости. Начальный угол наклона траектории (т. е. угол между вектором скорости и местным горизонтом в начальной точке) определяется по формуле

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{r_0 \cdot V_0}{r_0 V_0}. \quad (2.4.2)$$

Зная теперь величины  $V_0$ ,  $r_0$ ,  $\theta_0$ , можно с помощью (2.2.11) и (2.2.29) вычислить параметр орбиты

$$p = \frac{r_0^2 V_0^2 \cos^2 \theta_0}{\mu} = r_0 v_0 \cos^2 \theta_0, \quad (2.4.3)$$

где

$$v_0 = r_0 V_0^2 / \mu = V_0^2 / V_{кр}^2(r_0) \quad (2.4.4)$$

— безразмерный параметр, характеризующий уровень кинетической энергии спутника. Затем с помощью интеграла энергии (2.2.1) и формулы (2.2.32) определим эксцентриситет орбиты

$$e = \sqrt{1 + \left(V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right) \frac{r_0^2 V_0^2 \cos^2 \theta_0}{\mu^2}} = \sqrt{1 + (v_0 - 2) v_0 \cos^2 \theta_0}. \quad (2.4.5)$$

При  $v_0 = 1$  начальная скорость равна местной круговой, т. е. соответствующей величине начального радиуса. В этом случае по формуле (2.4.5) имеем  $e = |\sin \theta_0|$ . Если одновременно выполняются условия  $v_0 = 1$  и  $\theta_0 = 0$ , то орбита является круговой, если же  $v_0 = 1$ , но  $\theta_0 \neq 0$ , то орбита оказывается эллиптической. При  $v_0 = 2$  начальная скорость равна местной параболической, а  $e = 1$ . Спутник движется по параболической орбите, а величина  $\theta_0$  при этом не имеет существенного значения. При  $v_0 > 2$  ( $e > 1$ ) скорость спутника превышает параболическую, и он движется по гиперболической орбите.

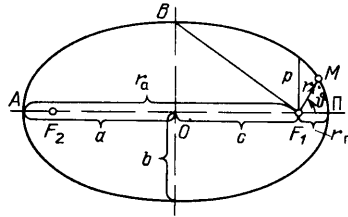
Как видно из общего уравнения орбиты произвольного типа (2.2.31), параметр орбиты равен величине радиуса-вектора спутни-

ка при значении истинной аномалии  $\vartheta = 90^\circ$ , т. е.

$$r|_{\vartheta=90^\circ} = p.$$

Самыми распространенными типами орбит являются эллиптическая и гиперболическая.

**2.4.1. Эллиптическая орбита.** Наиболее часто встречаются орбиты эллиптического типа ( $h < 0$ ,  $0 < e < 1$ ). Как известно, эллипс представляет собой геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная. В одном из фокусов эллипса находится притягивающий центр, а второй фокус оказывается «пустым». Основными параметрами эллиптической орбиты (рис. 2.4) являются большая полуось



$$a = \frac{r_{\Pi} + r_a}{2}, \quad (2.4.6) \quad \text{Рис. 2.4. Эллиптическая орбита}$$

определяющая среднее расстояние до притягивающего центра, и малая полуось  $b$ . Фокусное расстояние  $c$  называют еще *линейным эксцентриситетом*.

Подставим радиусы перигенетры (2.3.11) и апогенетры (2.3.12) в (2.4.6), тогда

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (2.4.7)$$

и

$$p = a(1 - e^2). \quad (2.4.8)$$

Найдем теперь

$$c = OF_1 = O\Pi - F\Pi = a - r_{\Pi} = a - \frac{p}{1 + e},$$

или с учетом (2.4.8)

$$c = a - \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = ae. \quad (2.4.9)$$

Отсюда

$$e = \frac{c}{a}. \quad (2.4.10)$$

Из геометрических построений ясно, что сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов равна  $2a$ . Поэтому  $BF_1 = a$  (см. рис. 2.4) и

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{ap} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.4.11)$$

Иногда в качестве исходных параметров орбиты удобнее использовать радиусы перицентра  $r_{\text{п}}$  и апоцентра  $r_{\text{а}}$ . Согласно формулам (2.3.11) и (2.3.12)

$$1 + e = \frac{p}{r_{\text{п}}}, \quad 1 - e = \frac{p}{r_{\text{а}}}. \quad (2.4.12)$$

Отсюда

$$p = \frac{2r_{\text{п}}r_{\text{а}}}{r_{\text{п}} + r_{\text{а}}} \quad (2.4.13)$$

и

$$e = \frac{r_{\text{а}} - r_{\text{п}}}{r_{\text{п}} + r_{\text{а}}}. \quad (2.4.14)$$

Далее с учетом (2.4.12) преобразуем соотношения (2.3.9) и (2.3.10) для скорости спутника в перицентре и апоцентре:

$$V_{\text{п}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e) = \sqrt{\frac{\mu p}{r_{\text{п}}^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{п}}}} \sqrt{\frac{2r_{\text{а}}}{r_{\text{п}} + r_{\text{а}}}} = \underbrace{V_{\text{кр}}(r_{\text{п}})} \sqrt{\frac{2r_{\text{а}}}{r_{\text{п}} + r_{\text{а}}}}, \quad (2.4.15)$$

$$V_{\text{а}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 - e) = \sqrt{\frac{\mu p}{r_{\text{а}}^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{а}}}} \sqrt{\frac{2r_{\text{п}}}{r_{\text{п}} + r_{\text{а}}}} = V_{\text{кр}}(r_{\text{а}}) \sqrt{\frac{2r_{\text{п}}}{r_{\text{п}} + r_{\text{а}}}}. \quad (2.4.16)$$

Установим связь между большой полуосью  $a$  и постоянной интеграла энергии  $h$ . С этой целью запишем интеграл энергии для спутника, находящегося в перицентре орбиты:

$$V_{\text{п}}^2 - \frac{2\mu}{r_{\text{п}}} = h.$$

Здесь

$$V_{\text{п}}^2 = \frac{2\mu r_{\text{а}}}{r_{\text{п}}(r_{\text{п}} + r_{\text{а}})}$$

и

$$r_{\text{п}} = a - c = a(1 - e),$$

поэтому

$$h = \frac{2\mu r_{\text{а}}}{r_{\text{п}}(r_{\text{п}} + r_{\text{а}})} - \frac{2\mu}{r_{\text{п}}} = -\frac{2\mu}{r_{\text{п}} + r_{\text{а}}} = -\frac{\mu}{a}, \quad (2.4.17)$$

а интеграл энергии принимает вид

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (2.4.18)$$

Воспользуемся уравнением (2.4.18) для определения скорости спутника в точке, соответствующей концу малой полуоси (точка  $B$  на рис. 2.4). В этой точке  $r = a$  и  $V^2 = \mu/a = V_{\text{кр}}^2(a)$ , т. е. скорость спутника равна местной круговой скорости.



**2.4.2. Гиперболическая орбита.** Среди возможных незамкнутых орбит наиболее часто встречаются орбиты гиперболического типа ( $h > 0$ ,  $e > 1$ ). Гипербола — это геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная. Из геометрических построений ясно, что эта разность равна  $2a$ , где  $a$  — действительная полуось гиперболы. В самом деле, пусть спутник находится в перигеуме орбиты (точка П на рис. 2.5). Тогда разность расстояний спутника до фокусов есть

$$PF_2 - PF_1 = PF_2 - AF_2 = PA = 2a,$$

так как  $PF_1 = AF_2$  из условия симметрии.

Движение спутника всегда происходит по той ветви гиперболы, в фокусе которой находится притягивающий центр. Значение истинной аномалии, при котором расстояние спутника до притягивающего центра неограниченно увеличивается ( $r \rightarrow \infty$ ) (а знаменатель в уравнении орбиты (2.2.31) обращается в нуль), называется *предельным* ( $\vartheta_{\text{пред}}$ ). По определению

$$\vartheta_{\text{пред}} = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right). \quad (2.4.19)$$

При движении по гиперболической траектории истинная аномалия может меняться в диапазоне

$$|\vartheta| < \pi - \vartheta_0, \quad (2.4.20)$$

где  $\cos \vartheta_0 = 1/e$ . Для гиперболической орбиты полный угол разворота равен углу между асимптотами, т. е.

$$\vartheta_{\text{полн}} = 2\vartheta_{\text{пред}} - \pi. \quad (2.4.21)$$

Установим некоторые геометрические соотношения для гиперболической орбиты. Радиус перигеума  $r_{\text{п}}$  определяется уравнением орбиты (2.2.31) при  $\vartheta = 0$ :

$$r_{\text{п}} = \frac{p}{1 + e}. \quad (2.4.22)$$

Но из построений на рис. 2.5 видно, что

$$r_{\text{п}} = c - a = a(e - 1). \quad (2.4.23)$$

Отсюда

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}. \quad (2.4.24)$$

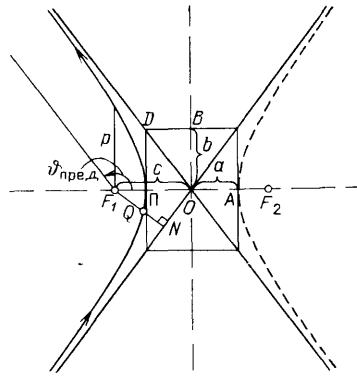


Рис. 2.5. Гиперболическая орбита

Согласно (2.4.23) имеем также

$$e = 1 + \frac{r_{\text{п}}}{a}. \quad (2.4.25)$$

По построению  $OP = a$ , с другой стороны,

$$OP = OD \cos(\pi - \vartheta_{\text{пред}}) = \frac{OD}{e}$$

(см. рис. 2.5). Отсюда

$$OD = ae = c \quad (2.4.26)$$

и

$$OD = OF_1.$$

Найдем теперь

$$(OD)^2 = c^2 = a^2 e^2,$$

но из прямоугольного треугольника  $DPO$

$$(OD)^2 = a^2 + b^2,$$

следовательно, эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (2.4.27)$$

и мнимая полуось гиперболической орбиты

$$b = a\sqrt{e^2 - 1}. \quad (2.4.28)$$

Из соотношений (2.4.24) и (2.4.27) получим

$$p = a(e^2 - 1) = \frac{b^2}{a}. \quad (2.4.29)$$

Введем теперь понятие *прицельной дальности* [47]. Когда  $\vartheta \approx \pm\vartheta_{\text{пред}}$ , направление движения спутника практически совпадает с асимптотой гиперболы. Предположим теперь, что спутник движется к притягивающему центру на достаточно большом расстоянии ( $\vartheta \approx -\vartheta_{\text{пред}}$ ). Если бы в этот момент сила притяжения исчезла, то спутник, продолжая двигаться по асимптоте гиперболы, пролетел бы на расстоянии  $F_1N$  от точки  $F_1$  (рис. 2.5). Расстояние  $F_1N$  называют прицельной дальностью. Вычислим прицельную дальность. С этой целью рассмотрим прямоугольные треугольники  $OPD$  и  $ONF_1$ . Согласно (2.4.26) у них одинаковые гипотенузы ( $OD = OF_1 = c$ ), а в силу симметрии асимптот гиперболы равны острые углы ( $\angle POD = \angle NOF_1 = \pi - \vartheta_{\text{пред}}$ ). Следовательно, указанные треугольники равны и

$$F_1N = DP = b, \quad (2.4.30)$$

т. е. прицельная дальность равна мнимой полуоси гиперболы. Полученный результат позволяет выразить величину интеграла площадей (2.2.11) через параметры движения в бесконечно удаленной

точке (скорость  $V_\infty$  и перпендикулярное к ней плечо  $F_1N = b$ ):

$$C = bV_\infty. \quad (2.4.31)$$

С помощью этого соотношения можно установить физический смысл действительной полуоси гиперболической орбиты. В самом деле,

$$p = \frac{C^2}{\mu} = \frac{b^2V_\infty^2}{\mu}. \quad (2.4.32)$$

Приравняв правые части (2.4.29) и (2.4.32), получим

$$a = \frac{\mu}{V_\infty^2}. \quad (2.4.33)$$

Оценим величину полного угла поворота траектории спутника при полете мимо притягивающего центра. Из соотношений (2.4.19) и (2.4.21) имеем

$$\sin \frac{\vartheta_{\text{полн}}}{2} = -\cos \vartheta_{\text{пред}} = \frac{1}{e}.$$

Далее, по формулам (2.4.25) и (2.4.33) найдем

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{1 + \frac{r_{\text{п}}V_\infty^2}{\mu}},$$

поэтому

$$\sin \frac{\vartheta_{\text{полн}}}{2} = \frac{1}{1 + \frac{r_{\text{п}}V_\infty^2}{\mu}}. \quad (2.4.34)$$

Радиус перицентра орбиты не может быть меньше радиуса центрального тела, т. е.  $r_{\text{п}} \geq R$ . Отсюда

$$\sin \frac{\vartheta_{\text{полн}}}{2} \leq \frac{1}{1 + \frac{RV_\infty^2}{\mu}},$$

где  $\mu/R = V_{\text{кр}}^2(R)$  — круговая скорость на поверхности центрального тела. Окончательно получим следующую оценку для полного угла поворота при ближнем облете центрального тела

$$\sin \frac{\vartheta_{\text{полн}}}{2} \leq \frac{1}{1 + \left[ \frac{V_\infty}{V_{\text{кр}}(R)} \right]^2}. \quad (2.4.35)$$

По формуле (2.3.18) вычислим соответствующую этому предельному маневру величину скорости в перицентре, отнесенную к мест-

ной круговой скорости:

$$\frac{V_{\pi}}{V_{\text{кр}}(R)} = \sqrt{2 + \left[ \frac{V_{\infty}}{V_{\text{кр}}(R)} \right]^2}. \quad (2.4.36)$$

Формула (2.4.35) справедлива для любого небесного тела, поскольку полный угол поворота зависит только от отношения скорости на бесконечности к круговой скорости на поверхности центрального тела. Если  $V_{\infty} \rightarrow 0$ , то  $\vartheta_{\text{полн}} \rightarrow 180^\circ$ . Предельный случай ( $V_{\infty} = 0$ ) соответствует облету центрального тела по параболической траектории с изменением направления движения на противоположное ( $\vartheta_{\text{полн}} = 180^\circ$ ). При неограниченном возрастании скорости на бесконечности ( $V_{\infty} \rightarrow \infty$ ) полный угол поворота уменьшается до нуля, т. е. траектория остается практически прямолинейной. На рис. 2.6 показано изменение предельного угла поворота  $\vartheta_{\text{пред}}$  и относительной скорости в перигентре  $V_{\pi}/V_{\text{кр}}(R)$  в зависимости от величины  $V_{\infty}/V_{\text{кр}}(R)$ .

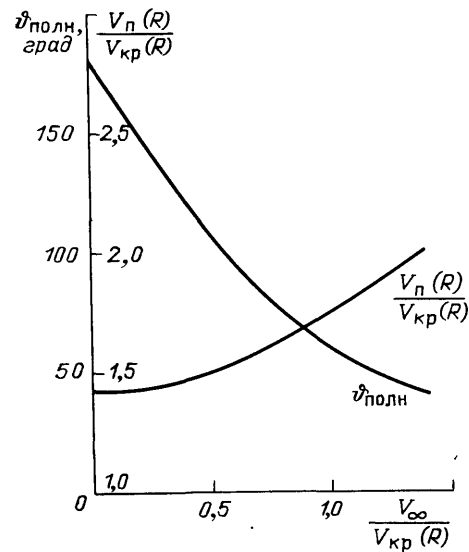


Рис. 2.6. Характеристики предельного маневра при движении по гиперболической орбите

Обсудим также некоторые другие понятия, связанные с гиперболическими орбитами. Величину  $\varepsilon = F_1Q/F_1N$  (см. рис. 2.5) называют *поджатием* орбиты под действием притя-

жения центрального тела. Здесь  $F_1N = b$ , а из прямоугольного треугольника  $OF_1N$  следует, что

$$F_1N = F_1O \cos \vartheta_1, \quad \text{tg } \vartheta_1 = -\frac{ON}{F_1N} = -\frac{a}{b},$$

где  $F_1O = c = ae$ ,  $\vartheta_1 = \angle OF_1N = -\left(\vartheta_{\text{пред}} - \frac{\pi}{2}\right)$ , так как  $\vartheta_1 < 0$ .

Отсюда

$$b = ae \cos \vartheta_1, \quad \frac{b}{a} = e \cos \vartheta_1.$$

Согласно уравнению орбиты (2.2.31) и соотношению (2.4.29)

$$F_1Q = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta_1} = \frac{b^2}{a(1 + e \cos \vartheta_1)}$$

тогда поджатие орбиты

$$\varepsilon = \frac{b}{a(1 + e \cos \vartheta_1)} = \frac{1}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \vartheta_1}. \quad (2.4.37)$$

Будем называть *эффективным радиусом* ( $R_{\text{эф}}$ ) центрального тела величину прицельной дальности, при которой центральное тело достигается, т. е. гиперболическая орбита либо попадает в него, либо хотя бы касается. Сначала рассмотрим попадание в переднюю полу-сферу, которая выделяется так называемой *картинной плоскостью*, проходящей через центр тела перпендикулярно к  $V_\infty$  (рис. 2.7, а).

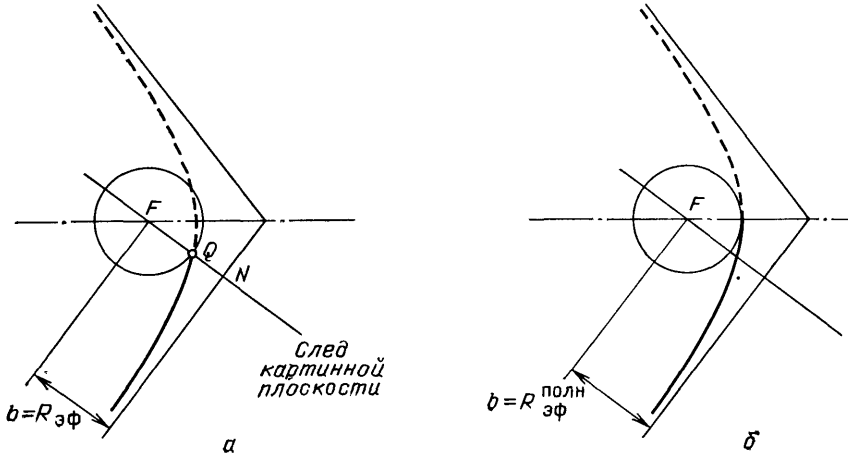


Рис. 2.7. Эффективный и полный эффективный радиусы центрального тела

В этом случае  $F_1N = b = R_{\text{эф}}$  и  $F_1Q = R$ , откуда  $\varepsilon = R/R_{\text{эф}}$ . Но для поджатия справедлива общая формула (2.4.37), что позволяет записать равенство

$$\frac{R}{b} = \frac{1}{1 + \frac{a}{b}},$$

затем

$$1 + \frac{a}{b} = \frac{b}{R}$$

и после умножения обеих частей на  $b/R$

$$\left(\frac{b}{R}\right)^2 - \frac{b}{R} - \frac{a}{R} = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно  $\frac{b}{R}$ , найдем

$$\frac{b}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{a}{R}},$$

но  $a = \mu/V_\infty^2$  и  $b = R_{эф}$ , поэтому

$$\frac{R_{эф}}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \left[ \frac{V_{кр}(R)}{V_\infty} \right]^2}, \quad (V_\infty \neq 0). \quad (2.4.38)$$

Формула (2.4.38) позволяет вычислить отношение эффективно-го радиуса центрального тела к его истинному радиусу при условии попадания траектории в переднюю полусферу. Если еще увеличивать прицельную дальность, точка попадания будет смещаться в заднюю полусферу, а в предельном случае орбита только коснется поверхности центрального тела. Этой орбите соответствует *полный эффективный радиус* центрального тела  $R_{эф}^{полн}$  (рис. 2.7, б). Его

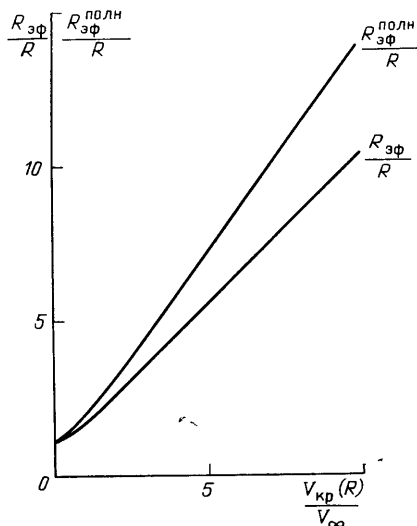


Рис. 2.8. Величины эффективного и полного эффективного радиусов центрального тела

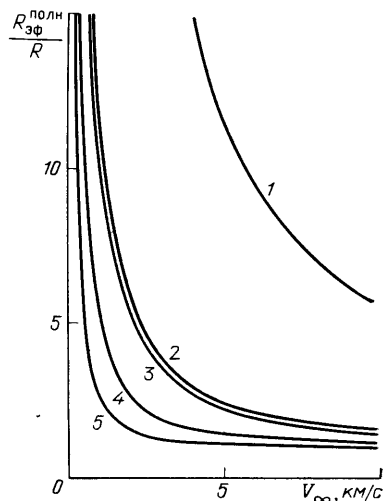


Рис. 2.9. Соотношение полного эффективного и истинного радиусов небесных тел: 1 — Юпитер; 2 — Земля; 3 — Венера; 4 — Марс; 5 — Луна

величину вычислим с помощью интеграла площадей, записанного для бесконечно удаленной точки и для перицентра:

$$bV_\infty = r_\pi V_\pi.$$

Из условия касания поверхности  $r_\pi = R$ , поэтому  $b/R = V_\pi/V_\infty$ . По формуле (2.3.18) вычислим

$$\frac{V_\pi}{V_\infty} = \sqrt{1 + 2 \left[ \frac{V_{кр}(R)}{V_\infty} \right]^2}$$

и окончательно найдем

$$\frac{R_{\text{эф}}^{\text{полн}}}{R} = \sqrt{1 + 2 \left[ \frac{V_{\text{кр}}(R)}{V_{\infty}} \right]^2}. \quad (2.4.39)$$

На рис. 2.8 показано изменение эффективного и полного эффективного радиусов центрального тела, отнесенных к его радиусу, в зависимости от величины  $V_{\text{кр}}(R)/V_{\infty}$ . Соотношение полного эффективного и истинного радиусов некоторых небесных тел показано на рис. 2.9. Условие  $R_{\text{эф}}^{\text{полн}} > R$  для задачи попадания эквивалентно замене притягивающего центрального тела на непритягивающее, но с увеличенным в несколько раз радиусом.

**2.4.3. Параболическая орбита.** Такая орбита встречается редко, поскольку она требует выполнения строгого ограничения по скорости:  $V = V_{\text{пар}}(r) = \sqrt{2\mu/r}$ . При малейшей ошибке по скорости в ту или иную сторону орбита становится либо эллиптической, либо гиперболической. Для параболы эксцентриситет  $e = 1$ , и она представляет собой геометрическое место точек, одинаково удаленных от фокуса и прямой, называемой *директрисой* (рис. 2.10). Уравнение параболической орбиты

$$r = \frac{p}{1 + \cos \vartheta}. \quad (2.4.40)$$

Из геометрических построений ясно, что параметр орбиты  $p = r_{\text{п}}/2$ .

Для параболической орбиты, граничной между эллиптическими и гиперболическими орбитами, можно вычислить величину большой полуоси, устремляя эксцентриситет  $e$  к 1 в формулах (2.4.7) и (2.4.24). Тогда получим, что большая полуось параболической орбиты неограниченно велика.

**2.4.4. Круговая орбита.** Эта орбита является частным случаем эллиптической ( $e = 0$ ). Чтобы спутник двигался по круговой орбите, его скорость должна равняться по величине местной круговой скорости  $V = V_{\text{кр}}(r) = \sqrt{\mu/r}$  и быть направленной перпендикулярно радиус-вектору. Нарушение любого из двух указанных условий приводит к эллиптической орбите.

Уравнение круговой орбиты  $r_{\text{кр}} = \text{const}$ , а понятия перигентра и истинной аномалии теряют смысл, поскольку все точки круговой орбиты одинаково удалены от притягивающего центра. Поэтому вместо истинной аномалии обычно рассматривают полярный угол, отсчет которого ведут от некоторого фиксированного направления.

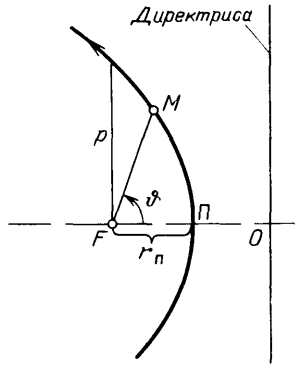


Рис. 2.10. Параболическая орбита

В отличие от параболической орбиты, круговая орбита часто используется в модельных задачах механики космического полета. Это объясняется тем, что для задания круговой орбиты достаточно одного параметра (радиуса орбиты или ее высоты над поверхностью центрального тела).

### § 2.5. Связь времени с положением на орбите

Для определения закона орбитального движения спутника необходимо установить зависимость параметров движения от времени. Расстояние спутника от притягивающего центра и его скорость можно достаточно просто вычислить, если известна величина истинной аномалии. Поэтому необходимо связать истинную аномалию с временем движения. Из интеграла площадей можно получить

$$dt = \frac{r^2}{C} d\vartheta. \quad (2.5.1)$$

Проинтегрируем уравнение (2.5.1) от точки орбиты, соответствующей перигею, где  $t = t_{\Pi}$  и  $\vartheta = 0$ , до некоторой произвольной точки, где спутник находится в момент времени  $t$ , а величина истинной аномалии при этом равна  $\vartheta$ . Тогда

$$t - t_{\Pi} = \frac{1}{C} \int_0^{\vartheta} r^2 d\vartheta. \quad (2.5.2)$$

Но  $C = \sqrt{\mu p}$  и  $r = p/(1 + e \cos \vartheta)$  согласно (2.2.29) и уравнению орбиты (2.2.31); поэтому

$$t - t_{\Pi} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2}. \quad (2.5.3)$$

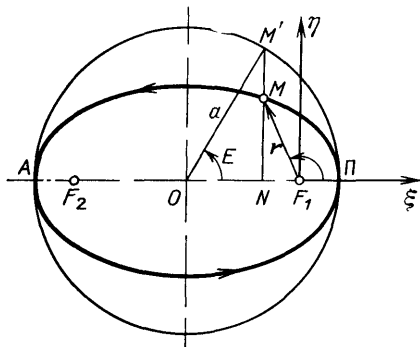


Рис. 2.11. Связь между эксцентриситетом и истинной аномалиями

Интеграл (2.5.3) зависит от знака эксцентриситета  $e$ , т. е. от типа орбиты спутника.

**2.5.1. Случай эллиптической орбиты.** Для эллиптической орбиты  $0 < e < 1$ . Чтобы вычислить интеграл (2.5.3), необходимо перейти к новой переменной, смысл которой поясним с помощью некоторых геометрических построений. Пусть дана эллиптическая орбита с центром  $O$ , фокусами  $F_1$  и  $F_2$ , перигеем  $\Pi$  и апоцентром  $A$  (рис. 2.11). Точка  $M$  соответствует текущему положению спутника в момент времени  $t$ . Построим окружность радиуса  $a$  с центром в точке  $O$  и опустим перпендикуляр из точки  $M$  на линию апсид. Продолжим этот перпендикуляр до пересечения с окружностью (точка  $M'$ ). Прямая  $OM'$  образует с направлением на перигей



угол  $E$ , который называют *эксцентрической аномалией*. Из геометрических построений видно, что при изменении истинной аномалии  $\vartheta$  от  $0$  до  $360^\circ$  эксцентрическая аномалия  $E$  также изменяется от  $0$  до  $360^\circ$ . Оба угла одновременно принимают значения  $0$ ,  $180^\circ$  и  $360^\circ$ .

Установим связь между эксцентрической и истинной аномалиями. Из рис. 2.11 видно, что

$$ON + NF_1 = OF_1 = c = ae,$$

где

$$ON = a \cos E, \quad NF_1 = -r \cos \vartheta.$$

Поэтому

$$ae = a \cos E - r \cos \vartheta$$

и после подстановки  $r$  из уравнения орбиты (2.2.31) получим

$$\frac{p \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} = a (\cos E - e).$$

Отсюда

$$\cos \vartheta = \frac{\cos E - e}{\frac{p}{a} + e^2 - e \cos E},$$

но согласно (2.4.7)  $p/a = 1 - e^2$ , поэтому

$$\cos \vartheta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}. \quad (2.5.4)$$

Далее найдем

$$M'N = a \sin E, \quad MN = r \sin \vartheta.$$

На основании свойств эллипса и формулы (2.4.11)

$$\frac{MN}{M'N} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2},$$

или

$$\frac{r \sin \vartheta}{a \sin E} = \sqrt{1 - e^2},$$

откуда

$$r \sin \vartheta = a \sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Подставим сюда  $r$  из уравнения орбиты, а  $\cos \vartheta$  заменим соотношением (2.5.4), тогда

$$\sin \vartheta = \frac{a}{p} \sqrt{1 - e^2} \left[ 1 + \frac{e (\cos E - e)}{1 - e \cos E} \right] \sin E,$$

или

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}. \quad (2.5.5)$$

Теперь вычислим

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{(1 - e)(1 + \cos E)},$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (2.5.6)$$

Полученное уравнение (2.5.6) устанавливает связь между эксцентрической и истинной аномалиями. Произведем теперь замену переменной  $\vartheta$  на  $E$  в интеграле (2.5.3). Предварительно, дифференцируя соотношение (2.5.5), найдем

$$\cos \vartheta d\vartheta = \sqrt{1-e^2} \frac{\cos E - e}{(1-e \cos E)^2} dE$$

и, используя (2.5.4), запишем

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} dE. \quad (2.5.7)$$

С учетом соотношений (2.5.4) и (2.5.7)

$$t - t_{\Pi} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^E \frac{(1-e \cos E)^2}{(1-e^2)^2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} dE,$$

или

$$t - t_{\Pi} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu} (1-e^2)^{3/2}} \int_0^E (1-e \cos E) dE.$$

Интегрируя, получим

$$t - t_{\Pi} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{p}{1-e} \right)^{3/2} (E - e \sin E),$$

но согласно (2.4.7)  $p/(1-e^2) = a$ , поэтому окончательно

$$t - t_{\Pi} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E - e \sin E). \quad (2.5.8)$$

Введем теперь понятие средней аномалии

$$M = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - t_{\Pi}),$$

тогда соотношение (2.5.8) можно преобразовать в уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = M. \quad (2.5.9)$$

Пусть требуется вычислить время движения спутника между двумя точками эллиптической орбиты, истинные аномалии которых  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  известны. Сначала по формуле (2.5.6) определим эксцентрисические аномалии  $E_1$  и  $E_2$ , а затем, используя уравнение (2.5.8), вычислим время движения

$$t_2 - t_1 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1)].$$

Если спутник совершает полный оборот по орбите ( $E_2 = E_1 + 2\pi$ ), то полученная формула будет определять период обращения

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}. \quad (2.5.10)$$

Отсюда видно, что период обращения на эллиптической орбите зависит только от параметра  $\mu$  — произведения постоянной тяготения на массу притягивающего центра и величины большой полуоси  $a$ , т. е. среднего расстояния спутника в орбитальном движении. Заметим, что полученная ранее формула (2.3.21) для периода обращения на круговой орбите является частным случаем (2.5.10) при  $a = r_{кр}$ .

Предположим, что  $T_1$  и  $T_2$  — периоды обращения двух спутников относительно одного и того же притягивающего центра и  $a_1, a_2$  — большие полуоси их эллиптических орбит. Тогда с помощью формулы (2.5.10) легко установить, что

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (2.5.11)$$

Это соотношение определяет *третий закон Кеплера*:

*Квадраты периодов обращения двух спутников (с пренебрежимо малыми массами) вокруг одного и того же притягивающего центра относятся как кубы больших полуосей их орбит.*

**2.5.2. Случай гиперболической орбиты.** Для гиперболической орбиты  $e > 1$ . Как и в предыдущем случае, произведем замену переменной в подынтегральном выражении (2.5.3). Предварительно заметим, что для гиперболы, у которой  $a = b = 1$ , справедливы соотношения (рис. 2.12):

$$\frac{H}{2} = S_{опм}, \quad x = \pm \operatorname{ch} H, \quad y = \operatorname{sh} H \quad (2.5.12)$$

(здесь знак абсциссы зависит от выбранной ветви гиперболы). Для левой ветви произвольной гиперболы можно по аналогии с (2.5.12) записать

$$x = -a \operatorname{ch} H, \quad y = b \operatorname{sh} H = a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H. \quad (2.5.13)$$

Введем вспомогательную систему координат  $F_1\xi\eta$  с началом в притягивающем центре (рис. 2.12). Тогда

$$\begin{aligned} \xi &= F_1O - NO = c - a \operatorname{ch} H = a(e - \operatorname{ch} H), \\ \eta &= a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \end{aligned}$$

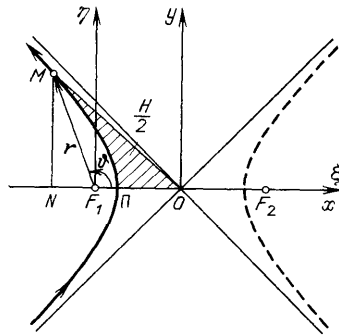


Рис. 2.12. К выводу уравнения связи времени с положением на гиперболической орбите

но, с другой стороны,

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos \vartheta, \\ \eta &= r \sin \vartheta,\end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}a(e - \operatorname{ch} H) &= r \cos \vartheta, \\ a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H &= r \sin \vartheta.\end{aligned}\quad (2.5.14)$$

Возводя обе части (2.5.14) в квадрат и складывая почленно, получим

$$\begin{aligned}r^2 &= a^2(e - \operatorname{ch} H)^2 + a^2(e^2 - 1)\operatorname{sh}^2 H = \\ &= a^2[e^2(1 + \operatorname{sh}^2 H) - 2e \operatorname{ch} H + \operatorname{ch}^2 H - \operatorname{sh}^2 H] = \\ &= a^2(e^2 \operatorname{ch}^2 H - 2e \operatorname{ch} H + 1) = a^2(e \operatorname{ch} H - 1)^2,\end{aligned}$$

откуда

$$r = a(e \operatorname{ch} H - 1). \quad (2.5.15)$$

Найдем

$$\begin{aligned}\cos \vartheta &= \frac{\xi}{r} = \frac{e - \operatorname{ch} H}{e \operatorname{ch} H - 1}, \\ \sin \vartheta &= \frac{\eta}{r} = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H}{e \operatorname{ch} H - 1},\end{aligned}\quad (2.5.16)$$

а затем вычислим

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H}{(e - 1)(1 + \operatorname{ch} H)},$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}. \quad (2.5.17)$$

Это соотношение устанавливает связь между  $\vartheta$  и  $H$ . Заметим, что когда спутник, начав двигаться из перицентра, неограниченно удаляется от притягивающего центра, истинная аномалия изменяется от 0 до  $\vartheta_{\text{пред}}$ , а величина  $H$  изменяется от 0 до  $\infty$ .

Продифференцируем теперь вторую формулу (2.5.16):

$$\begin{aligned}\cos \vartheta d\vartheta &= \\ &= \sqrt{e^2 - 1} \frac{e \operatorname{ch}^2 H - \operatorname{ch} H - e \operatorname{sh}^2 H}{(e \operatorname{ch} H - 1)^2} dH = \sqrt{e^2 - 1} \frac{e - \operatorname{ch} H}{e \operatorname{ch} H - 1} \frac{1}{e \operatorname{ch} H - 1} dH\end{aligned}$$

и с учетом первой формулы (2.5.16) найдем

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e \operatorname{ch} H - 1} dH. \quad (2.5.18)$$

Произведем замену переменных в (2.5.3) с учетом (2.5.16) и (2.5.18):

$$\begin{aligned} t - t_{\Pi} &= \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^H \frac{(e \operatorname{ch} H - 1)^2}{(e^2 - 1)^2} \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e \operatorname{ch} H - 1} dH = \\ &= \left( \frac{p}{e^2 - 1} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^H (e \operatorname{ch} H - 1) dH. \end{aligned}$$

После интегрирования получим соотношение для гиперболической орбиты, аналогичное уравнению (2.5.8):

$$t - t_{\Pi} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (e \operatorname{sh} H - H), \quad (2.5.19)$$

где  $a = p/(e^2 - 1)$  с учетом (2.4.24).

Время перелета между двумя заданными точками гиперболической орбиты определяется по формуле

$$t_2 - t_1 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [e(\operatorname{sh} H_2 - \operatorname{sh} H_1) - (H_2 - H_1)], \quad (2.5.20)$$

где  $H_1$  и  $H_2$  — соответствующие значения переменных, вычисленные с помощью формулы (2.5.17) по заданным величинам  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ .

**2.5.3. Случай параболической орбиты.** Для параболической орбиты эксцентриситет  $e = 1$ , и уравнение орбиты можно представить в виде

$$r = \frac{p}{1 + \cos \vartheta} = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{r_{\Pi}}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}} = r_{\Pi} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right), \quad (2.5.21)$$

так как  $p/2 = r_{\Pi}$ .

Произведя замену переменной

$$u = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \quad (2.5.22)$$

откуда

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} u \quad (2.5.23)$$

и

$$d\vartheta = \frac{2u}{1 + u^2} du,$$

вычислим интеграл (2.5.3):

$$\begin{aligned} t - t_{\Pi} &= \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + \cos \vartheta)^2} = \frac{p^{3/2}}{4\sqrt{\mu}} \int_0^{\vartheta} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2 d\vartheta = \\ &= \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\mu}} \int_0^u (1 + u^2) du = \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\mu}} \left( u + \frac{1}{3} u^3 \right), \end{aligned}$$

или

$$t - t_{\text{п}} = \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\mu}} \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta}{2} \right). \quad (2.5.24)$$

Это — аналог уравнения (2.5.8) для параболической орбиты.

В уравнении (2.5.24) можно выразить  $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$  через  $r$  — расстояние спутника до притягивающего центра. Действительно, с учетом (2.5.21)

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\frac{r}{r_{\text{п}}} - 1}, \quad 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{3} \left( \frac{r}{r_{\text{п}}} + 2 \right),$$

тогда

$$\begin{aligned} t - t_{\text{п}} &= \frac{(2r_{\text{п}})^{3/2}}{2\sqrt{\mu}} \frac{1}{3} \left( \frac{r}{r_{\text{п}}} + 2 \right) \sqrt{\frac{r}{r_{\text{п}}} - 1} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2r_{\text{п}}^3}{\mu}} \left( \frac{r}{r_{\text{п}}} + 2 \right) \sqrt{\frac{r}{r_{\text{п}}} - 1}, \end{aligned}$$

или

$$t - t_{\text{п}} = \frac{1}{3} (r + 2r_{\text{п}}) \sqrt{\frac{2}{\mu} (r - r_{\text{п}})}. \quad (2.5.25)$$

Полученная формула позволяет вычислить, сколько времени необходимо затратить при движении по параболической орбите от перигея до заданного расстояния  $r$ .

Время движения между двумя произвольными точками параболической орбиты определяется по формуле

$$t_2 - t_1 = \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\mu}} \left[ \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2} + \frac{1}{3} \left( \operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta_2}{2} - \operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta_1}{2} \right) \right]. \quad (2.5.26)$$

Связь времени движения с расстоянием до притягивающего центра в случае прямолинейной траектории движения подробно рассматривается в работе [20].

**2.5.4. Решение уравнения Кеплера.** Если время перелета спутника между двумя точками с известными величинами истинной аномалии вычисляется достаточно просто, то обратная задача, т. е. определение положения спутника в заданный момент времени, требует решения трансцендентного уравнения Кеплера или его аналогов для гиперболической и параболической орбит.

Сначала покажем, что для любого значения  $e$  из диапазона  $0 < e < 1$  уравнение Кеплера имеет одно и только одно решение. Будем считать, что средняя аномалия  $M$ , определяющая угол поворота радиуса-вектора спутника при движении с постоянной угловой скоростью  $\sqrt{\mu/a^3}$ , может принимать любые значения в соответствии с изменением времени  $t$ . Используя уравнение Кеплера (2.5.9), рас-

смотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(E) = E - e \sin E - M \quad (2.5.27)$$

и ее производную

$$\varphi'(E) = 1 - e \cos E > 0, \quad (2.5.28)$$

строго положительную, поскольку  $e < 1$ . Функция  $\varphi(E)$  монотонно возрастает и на неограниченном интервале изменения аргумента  $E$  имеет единственный корень  $E^*$ , т. е.  $\varphi(E^*) = 0$ . Отсюда  $E^*$  — единственное решение уравнения Кеплера.

Обсудим алгоритм решения уравнения Кеплера. Если требуемая точность невелика, то можно воспользоваться графическим способом. В этом случае корень уравнения (2.5.27) находят как абсциссу точки пересечения прямой  $x(E) = (E - M)/e$  с синусоидой  $x(E) = \sin E$ .

Известно большое число алгоритмов, позволяющих найти приближенное решение уравнения Кеплера с любой степенью точности. Как правило, при построении таких алгоритмов стараются учесть особенности решаемой задачи, например, величину эксцентриситета орбиты, для упрощения вычислений. Так, если эксцентриситет орбиты мал, то можно ограничиться тремя первыми членами разложения  $E$  в ряд по  $e$  [45]:

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M. \quad (2.5.29)$$

В качестве примера использования итерационных методов для решения уравнения Кеплера обсудим *метод неподвижной точки* [11]. Запишем уравнение Кеплера в виде

$$E = e \sin E + M. \quad (2.5.30)$$

За нулевое приближение  $E_0$  искомого корня  $E^*$  можно принять любое число, например 0,  $M$  и др. Последовательность приближения  $E_n$  к  $E^*$  определяется следующим алгоритмом:

$$E_{n+1} = e \sin E_n + M. \quad (2.5.31)$$

Можно показать, что последовательность  $\{E_n\}$  сходится при любом выборе начального приближения. С этой целью рассмотрим ряд

$$E_0 + (E_1 - E_0) + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_2) + \dots + (E_{n+1} - E_n) \dots, \quad (2.5.32)$$

частные суммы которого совпадают с членами последовательности  $\{E_n\}$ . Используя (2.5.31), получим

$$\begin{aligned} |E_{n+1} - E_n| &= e |\sin E_n - \sin E_{n-1}| = \\ &= 2e \left| \sin \frac{E_n - E_{n-1}}{2} \cos \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right| \leq e |E_n - E_{n-1}|, \end{aligned} \quad (2.5.33)$$

так как

$$\left| \sin \frac{E_n - E_{n-1}}{2} \right| \leq \left| \frac{E_n - E_{n-1}}{2} \right|, \quad \left| \cos \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right| \leq 1.$$

Согласно (2.5.33)

$$\begin{aligned} |E_2 - E_1| &\leq e|E_1 - E_0|, \\ |E_3 - E_2| &\leq e|E_2 - E_1| \leq e^2|E_1 - E_0|, \\ &\dots \\ |E_{n+1} - E_n| &\leq e^n|E_1 - E_0|. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что члены ряда (2.5.32), начиная со второго, межорируются соответствующими членами сходящейся геометрической прогрессии

$$|E_1 - E_0| + e|E_1 - E_0| + e^2|E_1 - E_0| + \dots + e^n|E_1 - E_0| + \dots$$

(сходимость обеспечивается, так как  $0 < e < 1$ ). Отсюда следует сходимость ряда (2.5.32) и последовательности  $\{E_n\}$ . Пусть  $E^*$  — предел этой последовательности, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E^*.$$

Переходя в (2.5.31) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$E^* = e \sin E^* + M,$$

откуда  $E^*$  — решение уравнения Кеплера (и «неподвижная точка»  $E^* = f(E^*)$  преобразования  $y = f(E)$ , где  $f(E) = e \sin E + M$ ).

Определим точность  $n$ -го приближения:

$$\begin{aligned} |E^* - E_n| &= |(E_{n+1} - E_n) + (E_{n+2} - E_{n+1}) + (E_{n+3} - E_{n+2}) + \dots| \leq \\ &\leq |E_{n+1} - E_n| + |E_{n+2} - E_{n+1}| + |E_{n+3} - E_{n+2}| + \dots \leq \\ &\leq e^n |E_1 - E_0| + e^{n+1} |E_1 - E_0| + e^{n+2} |E_1 - E_0| + \dots = \\ &= \frac{e^n}{1 - e} |E_1 - E_0|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|E^* - E_n| \leq \frac{e^n}{1 - e} |E_1 - E_0|, \quad (2.5.34)$$

или

$$|E^* - E_n| \leq \frac{e}{1 - e} |E_n - E_{n-1}|. \quad (2.5.35)$$

Отсюда видно, что даже при неудачном выборе начального приближения можно определить с приемлемой точностью корень уравнения Кеплера за конечное число итерационных шагов.

Обсудим теперь один из возможных способов решения аналога уравнения Кеплера для параболической орбиты [45]. С этой целью перепишем (2.5.24) в виде

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\phi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - \frac{2\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - t_n) = 0. \quad (2.5.36)$$



Это кубическое уравнение относительно  $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$  имеет один положительный корень, если  $t - t_{\text{п}} > 0$ , или один отрицательный корень, если  $t - t_{\text{п}} < 0$ . Действительно, пусть  $t - t_{\text{п}} > 0$ , тогда при  $\vartheta = 0$  левая часть (2.5.36) отрицательна, а по мере увеличения  $\vartheta$  до  $180^\circ$  она непрерывно увеличивается до  $+\infty$ . Поэтому существует один положительный действительный корень уравнения (2.5.36). Аналогично можно доказать и вторую часть утверждения.

Для решения уравнения (2.5.36) предварительно обозначим

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = 2 \operatorname{ctg} 2w = \operatorname{ctg} w - \operatorname{tg} w,$$

тогда

$$\operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta}{2} = -3 (\operatorname{ctg} w - \operatorname{tg} w) \operatorname{ctg} w \operatorname{tg} w + \operatorname{ctg}^3 w - \operatorname{tg}^3 w,$$

или

$$\operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta}{2} = -3 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + \operatorname{ctg}^3 w - \operatorname{tg}^3 w.$$

Отсюда

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{3} (\operatorname{ctg}^3 w - \operatorname{tg}^3 w)$$

и вместо (2.5.36) получим уравнение

$$\operatorname{ctg}^3 w - \operatorname{tg}^3 w = \frac{6 \sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - t_{\text{п}}). \quad (2.5.37)$$

Произведем новую замену

$$\operatorname{ctg}^3 w = \operatorname{ctg} \frac{s}{2}, \quad \operatorname{tg}^3 w = \operatorname{tg} \frac{s}{2},$$

после чего получим

$$\operatorname{ctg} \frac{s}{2} - \operatorname{tg} \frac{s}{2} = \frac{6 \sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - t_{\text{п}}),$$

или

$$\operatorname{ctg} s = \frac{3 \sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - t_{\text{п}}). \quad (2.5.38)$$

Итак, для решения аналога уравнения Кеплера в случае параболической орбиты возможен следующий алгоритм. Сначала по заданному моменту времени  $t$  вычисляется правая часть (2.5.38), а затем величина  $s$ . Далее по формуле

$$\operatorname{ctg} w = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \frac{s}{2}}$$

определяется величина  $w$ ; наконец, из условия

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = 2 \operatorname{ctg} 2w$$

находится истинная аномалия  $\vartheta$ , соответствующая заданному моменту времени  $t$ .

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ - К ЗАДАЧАМ БАЛЛИСТИКИ

Основные соотношения, полученные для эллиптической орбиты при рассмотрении задачи двух тел, можно применять при анализе движения летательного аппарата вблизи поверхности Земли. Если в модельной задаче пренебречь влиянием атмосферы, то траектория движения аппарата будет совпадать с частью эллиптической орбиты, которая расположена над поверхностью сферической Земли. Указанная постановка существенно упрощает решение задач *внешней баллистики*, связанных с изучением свободного движения аппарата после сообщения ему некоторой начальной скорости. Конечные формулы, посредством которых описывается модельное движение, легко проанализировать в общем виде. Вместе с тем такая модель позволяет выявить основные качественные и количественные соотношения истинного движения аппарата с учетом воздействия атмосферы.

Движение на безатмосферном участке исследуется в работах [8, 36, 50, 53].

### § 3.1. Прямая задача баллистики

Рассмотрим сначала прямую задачу баллистики в упрощенной постановке, когда по заданным начальным величинам скорости  $V_0$ , высоты  $H_0$  и угла наклона траектории к местному горизонту  $\theta_0$  (угла бросания) требуется определить дальность по поверхности Земли от начального радиуса-вектора  $\mathbf{r}_0$  до радиуса-вектора  $\mathbf{r}_p$  точки падения  $P$  аппарата на поверхность Земли. Эту дальность, т. е. дальность пассивного участка  $L_p$ , будем вычислять без учета вращения Земли по формуле

$$L_p = R\Phi_p, \quad (3.1.1)$$

где  $\Phi_p$  — угол между начальным и конечным радиусами-векторами.

Затем рассмотрим более сложную постановку задачи, когда по заданным начальным параметрам движения и координатам начальной точки требуется определить координаты точки падения.

**3.1.1. Угловая дальность пассивного участка.** Найдем уравнение, связывающее начальные параметры движения с угловой дальностью пассивного участка. Предварительно получим уравнение орбиты в обратных радиусах. С этой целью в формулу для полной скорости

спутника

$$V^2 = V_r^2 + V_n^2$$

подставим величины радиальной составляющей скорости

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dr}{d\Phi} \frac{C}{r^2} = -C \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\Phi} \quad (3.1.2)$$

и трансверсальной составляющей скорости

$$V_n = r \frac{d\Phi}{dt} = \frac{C}{r}. \quad (3.1.3)$$

Здесь  $\Phi$  — полярный угол, который отсчитывается от начального радиуса-вектора. Тогда

$$V^2 = C^2 \left\{ \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left[ \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\Phi} \right]^2 \right\}, \quad (3.1.4)$$

и после подстановки в интеграл энергии (2.2.1) получим

$$C^2 \left\{ \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left[ \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\Phi} \right]^2 \right\} - \frac{2\mu}{r} = h. \quad (3.1.5)$$

Продифференцируем (3.1.5) по  $\Phi$ :

$$\left\{ C^2 \left[ \frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\Phi^2} \right] - \mu \right\} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\Phi} = 0. \quad (3.1.6)$$

Если движение происходит не по прямой, то  $d(1/r)/d\Phi \neq 0$  и на этот множитель можно сократить. В результате получим неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно обратного радиуса  $1/r$ :

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\Phi^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}.$$

Решение этого уравнения

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + A \cos \Phi + B \sin \Phi, \quad (3.1.7)$$

а произвольные постоянные  $A$  и  $B$  определяются из условий

$$\frac{1}{r} \Big|_{\Phi=0} = \frac{1}{r_0}, \quad \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\Phi} \Big|_{\Phi=0} = -\frac{1}{r_0} \operatorname{tg} \theta_0. \quad (3.1.8)$$

Второе начальное условие (3.1.8) получено из соотношений (3.1.2) и (3.1.3):

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\Phi} = -\frac{V_r}{C} = -\frac{1}{r} \frac{V_r}{V_n} = -\frac{1}{r} \operatorname{tg} \theta,$$

где  $\operatorname{tg} \theta = V_r/V_n$ .

Вычислим произвольные постоянные

$$A = \frac{1}{r_0} - \frac{\mu}{C^2}, \quad B = -\frac{1}{r_0} \operatorname{tg} \theta_0 \quad (3.1.9)$$

и подставим их в (3.1.7), тогда

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} - \left(\frac{\mu}{C^2} - \frac{1}{r_0}\right) \cos \Phi - \frac{1}{r_0} \operatorname{tg} \theta_0 \sin \Phi. \quad (3.1.10)$$

С учетом соотношений

$$\sin \Phi = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2}}, \quad \cos \Phi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2}} \quad (3.1.11)$$

( $\cos \Phi/2 \neq 0$ , т. е.  $\Phi \neq \pi$ ) получим

$$\left(\frac{1}{r_0} - \frac{\mu}{C^2}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2}\right) - \frac{2}{r_0} \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2}\right) = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{2\mu}{C^2} - \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} - \frac{2}{r_0} \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} = 0. \quad (3.1.12)$$

Используя (2.2.11) и (2.4.4), найдем

$$\frac{\mu}{C^2} = \frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} = \frac{1}{r_0 v_0 \cos^2 \theta_0}$$

и

$$[2r - (r_0 + r) v_0 \cos^2 \theta_0] \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} - 2v_0 r \sin \theta_0 \cos \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} - (r_0 - r) v_0 \cos^2 \theta_0 = 0. \quad (3.1.13)$$

Поскольку движение происходит не по прямолинейной вертикальной траектории ( $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta_0 \neq 0$ ), то можно сократить обе части (3.1.13)  $\cos^2 \theta_0$ . В итоге получим уравнение, связывающее угловую дальность движения  $\Phi$  с начальными условиями  $V_0$ ,  $r_0$ ,  $\theta_0$  и радиусом  $r$  в конечной точке движения:

$$[2r(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) - (r_0 + r) v_0] \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} - 2v_0 r \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} - (r_0 - r) v_0 = 0. \quad (3.1.14)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} a(r) &= 2r(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) - (r_0 + r)v_0, \\ b(r) &= v_0 r \operatorname{tg} \theta_0, \quad c(r) = (r_0 - r)v_0, \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

тогда уравнение (3.1.14) принимает вид

$$a(r) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} - 2b(r) \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} - c(r) = 0. \quad (3.1.16)$$

Два корня квадратного уравнения (3.1.16)

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = \frac{b(r) \pm \sqrt{[b(r)]^2 + a(r)c(r)}}{a(r)} \quad (3.1.17)$$

соответствуют двум точкам пересечения эллиптической траектории с окружностью радиуса  $r < r_0$ , причем знак «+» отвечает нисходящей ветви траектории, а знак «-» относится к восходящей ветви (рис. 3.1). Второй корень не имеет практического смысла при решении прямой задачи баллистики.

Для определения полной угловой дальности, когда аппарат достигает поверхности Земли (т. е.  $r = R$ ), имеем формулу

$$\Phi_p = 2 \operatorname{arctg} \frac{b(R) + \sqrt{[b(R)]^2 + a(R)c(R)}}{a(R)}. \quad (3.1.18)$$

Предположим, что начальный радиус совпадает по величине с конечным ( $r_0 = r$ ). Это может быть в том случае, когда начальная и конечная точки траектории находятся на одной и той же высоте относительно поверхности Земли. Тогда

$$\begin{aligned} a(r_0) &= 2r_0(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 - v_0), \\ b(r_0) &= v_0 r_0 \operatorname{tg} \theta_0, \quad c(r_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

и

$$\Phi_p = 2 \operatorname{arctg} \frac{v_0 \operatorname{tg} \theta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 - v_0}. \quad (3.1.20)$$

**3.1.2. Высота апогея траектории.** Определим наибольшую высоту траектории относительно поверхности Земли, т. е. высоту апогея траектории, в зависимости от начальных условий. С учетом формулы (2.3.12) имеем

$$H_a = r_a - R = \frac{p}{1 - e} - R. \quad (3.1.21)$$

Далее, используя соотношения (2.2.1), (2.2.11), (2.2.29) и (2.2.32), выразим параметр и эксцентриситет орбиты через начальные усло-

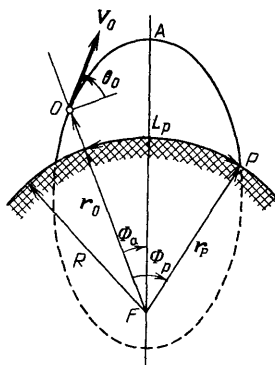


Рис. 3.1. Дальность пассивного участка

вия движения:

$$p = \frac{C^2}{\mu} = \frac{r_0^2 V_0^2 \cos^2 \theta_0}{\mu} = r_0 v_0 \cos^2 \theta_0, \quad (3.1.22)$$

$$e = \sqrt{1 + h \frac{C^2}{\mu^2}} = \sqrt{1 + \left(V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right) \frac{r_0^2 V_0^2 \cos^2 \theta_0}{\mu^2}} = \sqrt{1 - (2 - v_0) v_0 \cos^2 \theta_0}, \quad (3.1.23)$$

где  $v_0 = V_0^2 r_0 / \mu$ . Отсюда

$$H_a = \frac{r_0 v_0 \cos^2 \theta_0}{1 - \sqrt{1 - (2 - v_0) v_0 \cos^2 \theta_0}} - R. \quad (3.1.24)$$

Угловое расстояние  $\Phi_a$  от начальной точки движения до апогея траектории легко вычислить, используя формулу (3.1.20), которая определяет угловое расстояние от начальной точки до конечной при условии, что обе точки находятся на одинаковой высоте. В этом случае траектория симметрична относительно апогея и

$$\Phi_a = \frac{\Phi_p}{2},$$

т. е.

$$\Phi_a = \arctg \frac{v_0 \operatorname{tg} \theta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 - v_0}. \quad (3.1.25)$$

**3.1.3. Координаты конечной точки движения.** Пусть в начальной точке движения  $O$ , помимо скорости, высоты и угла наклона траектории, известны также широта  $\varphi_0$ , долгота  $\lambda_0$  и азимут  $A_0$ , т. е. угол направления движения, отсчитываемый с севера на восток. По-прежнему будем считать, что Земля

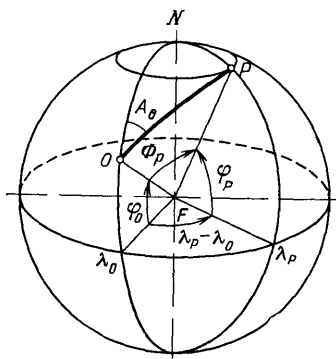


Рис 3.2 Определение координат конечной точки движения

не вращается, поэтому заданные параметры описывают движение в некоторой инерциальной системе координат. Требуется вычислить долготу  $\lambda_p$  и широту  $\varphi_p$  конечной точки. Рис. 3.2 иллюстрирует рассматриваемую задачу с использованием построений на сфере единичного радиуса.

Сначала по заданным величинам  $V_0$ ,  $r_0$ ,  $\theta_0$  вычислим с помощью формулы (3.1.18) угловую дальность  $\Phi_p$ . Из сферического треугольника  $ONP$  (см. рис. 3.2) найдем разность долгот  $\lambda_p - \lambda_0$  и широту  $\varphi_p$ :

$$\sin \varphi_p = \cos \Phi_p \sin \varphi_0 + \cos A_0 \sin \Phi_p \cos \varphi_0, \quad (3.1.26)$$

$$\sin (\lambda_p - \lambda_0) = \frac{\sin A_0 \sin \Phi_p}{\cos \varphi_p},$$

$$\cos (\lambda_p - \lambda_0) = \frac{\cos \Phi_p - \sin \varphi_0 \sin \Phi_p}{\cos \varphi_0 \cos \varphi_p}. \quad (3.1.27)$$

Уточним теперь координаты конечной точки с учетом вращения Земли. Если  $t_p$  — время полета на пассивном участке, то за это время точка с координатами  $(\lambda_p, \varphi_p)$  сместится по параллели на угол  $\omega_3 t_p$  в результате вращения Земли с угловой скоростью  $\omega_3$ . Поэтому в тот момент, когда аппарат достигнет поверхности Земли, он окажется в точке с координатами  $(\lambda'_p, \varphi'_p)$ , где

$$\begin{aligned}\lambda'_p &= \lambda_p - \omega_3 t_p, \\ \varphi'_p &= \varphi_p.\end{aligned}\quad (3.1.28)$$

Здесь рассматривается долгота, изменяющаяся в диапазоне от 0 до  $2\pi$ .

Для определения времени движения на пассивном участке можно воспользоваться, например, соотношением (2.5.9):

$$t_p = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [E_p - E_0 - e(\sin E_p - \sin E_0)]. \quad (3.1.29)$$

Используя формулы (2.2.1) и (2.4.17), вычислим большую полуось через начальные параметры движения:

$$a = -\frac{\mu}{h} = \frac{\mu}{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2} = \frac{r_0}{2 - v_0^2}. \quad (3.1.30)$$

Эксцентрисические аномалии  $E_p$  и  $E_0$  можно найти с помощью (2.5.6) по соответствующим значениям истинных аномалий

$$\vartheta_p = \arccos \left[ \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_p} - 1 \right) \right] \quad (\pi < \vartheta_p < 2\pi), \quad (3.1.31)$$

$$\vartheta_0 = \arccos \left[ \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_0} - 1 \right) \right] \quad (0 < \vartheta_0 < \pi). \quad (3.1.32)$$

Параметр  $p$  и эксцентриситет  $e$  определяются через начальные условия движения по формулам (3.1.22) и (3.1.23).

Обычно начальная скорость, угол наклона траектории и азимут бывают заданы не в инерциальной системе координат, а в системе координат, связанной с вращающейся Землей. Тем самым определяется не абсолютное движение, а движение относительно поверхности Земли. Будем выделять штрихами параметры относительного движения:  $V'_0, \theta'_0, A'_0$ . Установим связь между параметрами абсолютного и относительного движения. С учетом переносной скорости от вращения Земли абсолютная скорость есть

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}'_0 + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_0, \quad (3.1.33)$$

где составляющие вектора  $\mathbf{V}'_0$  определяются с использованием углов  $\theta'_0$  и  $A'_0$ . Далее по формуле (2.4.2) найдем угол наклона траек-

тории в абсолютном движении:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{V}_0}{r_0 V_0}. \quad (3.1.34)$$

Определим теперь азимут  $A_0$  в абсолютном движении. Единичный вектор нормали к плоскости начального меридиана

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\boldsymbol{\omega}_3^0 \times \mathbf{r}^0}{\cos \varphi_0}, \quad (3.1.35)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_3^0$  и  $\mathbf{r}^0$  — единичные векторы, направленные по угловой скорости вращения Земли и начальному радиусу-вектору. Единичный вектор нормали к плоскости абсолютного движения

$$\mathbf{n}_{\text{дв}}^0 = \frac{\mathbf{V}^0 \times \mathbf{r}^0}{\cos \theta_0}, \quad (3.1.36)$$

где  $\mathbf{V}^0$  — единичный вектор абсолютной начальной скорости. Тогда азимут в абсолютном движении

$$A_0 = \arccos (\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{n}_{\text{дв}}^0). \quad (3.1.37)$$

### § 3.2. Оптимальная траектория

Если зафиксировать координаты начальной точки пассивного участка и скорость  $V_0$  (или параметр  $v_0 = r_0 V_0^2 / \mu$ ), а изменять угол бросания  $\theta_0$ , то дальность пассивного участка будет меняться. Величину угла бросания, при котором обеспечивается максимальная дальность пассивного участка, называют *оптимальным углом бросания*. Будем обозначать этот угол  $\theta_0^{\text{опт}}$ . В силу обратимости рассматриваемой задачи оптимальный угол бросания обеспечивает заданную дальность пассивного участка при минимальной начальной скорости. Траекторию, которая реализуется при угле бросания  $\theta_0^{\text{опт}}$ , обычно называют *оптимальной*.

**3.2.1. Вычисление параметров оптимальной траектории.** Величину  $\theta_0^{\text{опт}}$  найдем из необходимого условия оптимальности  $d\Phi/d\theta_0 = 0$ , считая угловую дальность пассивного участка  $\Phi_p$  неявной функцией угла бросания  $F(\Phi_p, \theta_0) = 0$ , где функция  $F$  определяется соотношением (3.1.14). Найдем

$$\frac{d\Phi}{d\theta_0} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \theta_0}}{\frac{\partial F}{\partial \Phi_p}} = 0,$$

что эквивалентно равенству  $\partial F / \partial \theta_0 = 0$ , или

$$\left( 4r \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} - 2v_0 r \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \right) \frac{1}{\cos^2 \theta_0} = 0,$$



где  $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ ,  $\Phi_p \neq 0$ . Отсюда установим связь максимальной угловой дальности  $\Phi_p^{\max}$  с оптимальным углом бросания  $\theta_0^{\text{опт}}$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi_p^{\max}}{2} = \frac{v_0}{2 \operatorname{tg} \theta_0^{\text{опт}}}. \quad (3.2.1)$$

Затем, подставляя  $\operatorname{tg} \frac{\Phi_p^{\max}}{2}$  в уравнение (3.1.14), определим оптимальный угол бросания

$$\theta_0^{\text{опт}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v_0}{2} \frac{2 - (\tilde{r}_0 - 1) v_0}{v_0 + 2(\tilde{r}_0 - 1)}}, \quad (3.2.2)$$

где  $\tilde{r}_0 = r_0/R$  — отношение начального радиуса к конечному.

Считая теперь угловую дальность фиксированной, определим минимальное значение начального параметра, обеспечивающее достижение заданной угловой дальности с оптимальным углом бросания. Для этого выразим  $\operatorname{tg} \theta_0^{\text{опт}}$  из (3.2.1) и подставим в (3.1.14). В итоге получим квадратное уравнение относительно  $v_0^{\min}$ :

$$(v_0^{\min})^2 + 2 \left[ (1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 \right] v_0^{\min} - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} = 0.$$

Отсюда

$$v_0^{\min} = - \left[ (1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 \right] + \sqrt{\left[ (1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 \right]^2 + 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2}}. \quad (3.2.3)$$

Второй корень квадратного уравнения, а именно  $v_0^{\min} < 0$ , не имеет смысла.

В частном случае, когда  $\tilde{r}_0 = 1$ , т. е. начальная и конечная точки оптимальной траектории находятся на одинаковой высоте относительно поверхности Земли, формула для  $v_0^{\min}$  упрощается:

$$v_0^{\min} = 2 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \frac{1 - \sin \frac{\Phi_p}{2}}{\cos \frac{\Phi_p}{2}},$$

или

$$v_0^{\min} = \frac{2 \sin \frac{\Phi_p}{2}}{1 + \sin \frac{\Phi_p}{2}}. \quad (3.2.4)$$

Рис. 3.3 иллюстрирует связь оптимальных параметров движения  $v_0^{\min}$  и  $\theta_0^{\text{опт}}$  с максимальной дальностью пассивного участка  $L_p^{\max}$ .

Видно, что при  $v_0^{\min} \ll 1$  (т. е. при малых начальных скоростях) и  $\tilde{r}_0 = 1$  оптимальный угол бросания близок к  $45^\circ$ . Если  $\tilde{r}_0 > 1$ , то угол оказывается существенно меньше. При  $v_0^{\min} \rightarrow 1$   $\theta_0^{\text{опт}} \rightarrow 0$ , следовательно, траектория становится более пологой.

Оптимальный угол бросания допускает простое геометрическое толкование. Чтобы показать это, предварительно определим из

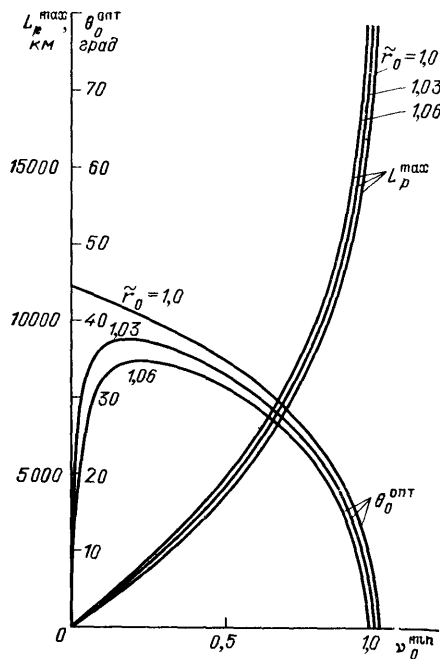


Рис. 3.3. Параметры оптимальных траекторий

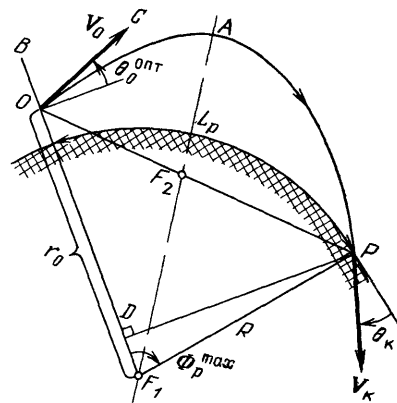


Рис. 3.4. Геометрическое определение оптимального угла бросания

(3.1.14) величину начального параметра  $v_0$  для заданной угловой дальности  $\Phi_p$  и угла бросания  $\theta_0$ :

$$v_0 = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2}}{(1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + 2 \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1}. \quad (3.2.5)$$

Далее, используя соотношения

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} = \frac{\sin \Phi_p}{1 + \cos \Phi_p}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 = \frac{1}{\cos^2 \theta_0}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} = \frac{2}{1 + \cos \Phi_p}.$$

преобразуем (3.2.5) к виду

$$v_0 = \frac{2 \sin^2 \Phi_p}{\cos^2 \theta_0 [2\tilde{r}_0(1+\cos \Phi_p) + \sin^2 \Phi_p + 2 \operatorname{tg} \theta_0 \sin \Phi_p (1+\cos \Phi_p) - (1+\cos \Phi_p)^2]} = \frac{1 - \cos \Phi_p}{\cos^2 \theta_0 (\tilde{r}_0 - \cos \Phi_p) + \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_p}. \quad (3.2.6)$$

С другой стороны, согласно (3.2.1) при оптимальном угле бросания имеем

$$v_0 = \frac{2 \sin \theta_0^{\text{опт}} \sin \Phi_p^{\text{max}}}{\cos \theta_0^{\text{опт}} (1 + \cos \Phi_p^{\text{max}})}. \quad (3.2.7)$$

Приравняем правые части (3.2.6) и (3.2.7); учитывая, что  $\Phi_p = \Phi_p^{\text{max}}$  и  $\theta_0 = \theta_0^{\text{опт}}$ , после несложных преобразований получим

$$2 \sin \theta_0^{\text{опт}} = \frac{\sin \Phi_p^{\text{max}}}{\cos \theta_0^{\text{опт}} (\tilde{r}_0 - \cos \Phi_p^{\text{max}}) + \sin \theta_0^{\text{опт}} \sin \Phi_p^{\text{max}}},$$

откуда

$$\sin 2\theta_0^{\text{опт}} (\tilde{r}_0 - \cos \Phi_p^{\text{max}}) = \cos 2\theta_0^{\text{опт}} \sin \Phi_p^{\text{max}}$$

и окончательно

$$\operatorname{ctg} 2\theta_0^{\text{опт}} = \frac{\tilde{r}_0 - \cos \Phi_p^{\text{max}}}{\sin \Phi_p^{\text{max}}}. \quad (3.2.8)$$

Соотношение (3.2.8) связывает оптимальный угол бросания с угловой дальностью при фиксированной величине относительного начального радиуса. Дадим (3.2.8) геометрическую интерпретацию. Пусть треугольник  $F_1OP$  соединяет центр масс Земли  $F_1$ , начальную точку  $O$  и конечную точку  $P$  (рис. 3.4). Опустим из точки  $P$  перпендикуляр  $PD$  на сторону  $OF_1$ , тогда

$$\operatorname{ctg} \angle POD = \frac{OD}{PD} = \frac{r_0 - R \cos \Phi_p^{\text{max}}}{R \sin \Phi_p^{\text{max}}} = \frac{\tilde{r} - \cos \Phi_p^{\text{max}}}{\sin \Phi_p^{\text{max}}}. \quad (3.2.9)$$

Из сравнения (3.2.8) и (3.2.9) следует, что  $\theta_0^{\text{опт}} = \angle POD/2$ , т. е. оптимальный угол бросания равен половине угла, образованного начальным радиусом  $r_0$  и направлением из начальной точки  $O$  в конечную точку  $P$  траектории.

Затем можно установить также, что

$$\angle BOC = \frac{\pi}{2} - \theta_0^{\text{опт}}, \quad \angle POC = \frac{\pi}{2} - \angle POD + \theta_0^{\text{опт}} = \frac{\pi}{2} - \theta_0^{\text{опт}},$$

поскольку  $\angle POD = 2\theta_0^{\text{опт}}$ . Отсюда

$$\angle BOC = \angle POC. \quad (3.2.10)$$

Следовательно, при оптимальном угле бросания вектор начальной скорости  $V_0$  делит пополам угол между местной вертикалью и направлением на конечную точку траектории.

Как известно, нормаль к любой точке эллипса делит пополам угол между фокальными радиусами-векторами этой точки. Поэтому касательная к эллипсу делит пополам угол между радиусом-вектором, проведенным из одного фокуса, и продолжением радиуса-вектора из другого фокуса. Для любой эллиптической траектории один из фокусов совпадает с центром масс Земли, а для оптимальной траектории согласно условию (3.2.10) второй фокус лежит на прямой  $OP$ , соединяющей начальную и конечную точки траектории. Из основного свойства эллипса

$$F_1O + F_2O = F_1P + F_2P = 2a,$$

откуда

$$F_2P - F_2O = F_1O - F_1P = r_0 - R = H_0.$$

Таким образом, для определения положения второго фокуса эллипса надо от точки  $P$  отрезка  $OP$  отложить высоту  $H_0$ , а оставшийся отрезок поделить пополам.

Рассмотрим теперь частный случай, когда начальная и конечная точки оптимальной траектории находятся на одинаковой высоте ( $\tilde{r}_0 = 1$ ). В этом случае согласно (3.2.8) имеем

$$\operatorname{ctg} 2\theta_0^{\text{опт}} = \operatorname{tg} \frac{\Phi_p^{\text{max}}}{2}$$

и

$$\theta_0^{\text{опт}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_p^{\text{max}}}{4}, \quad (3.2.11)$$

т. е. оптимальный угол бросания равен  $\pi/4$  за вычетом четверти угловой дальности пассивного участка.

**3.2.2. Эллипс безопасности.** Зафиксируем величину скорости  $V_0$  в начальной точке и рассмотрим огибающую семейства траекторий, которые получаются при изменении угла бросания  $\theta_0$  — параметра семейства. Уравнение семейства траекторий будем рассматривать в виде (3.1.14):

$$[2r(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) - (r_0 + r)v_0] \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} - 2v_0 r \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} - (r_0 - r)v_0 = 0.$$

Тогда огибающая семейства траекторий будет задаваться системой двух уравнений, включающей уравнение (3.1.14) и его производную по параметру  $\theta_0$ , т. е.

$$2 \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} - v_0 = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{v_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2} \quad (3.2.12)$$

и после подстановки (3.2.12) в уравнение семейства (3.1.14) исключим параметр семейства  $\theta_0$ :

$$2 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} - \left( \frac{r_0}{r} + 1 \right) v_0 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} - \frac{v_0^2}{2} - \left( \frac{r_0}{r} - 1 \right) v_0 = 0,$$

или

$$2 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} - v_0 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} + v_0 - \frac{v_0^2}{2} = \frac{r_0}{r} v_0 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} \right).$$

Далее найдем

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{r} &= \frac{1}{v_0} \left( v_0 - \frac{v_0^2}{2} + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} - v_0 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} \right) \cos^2 \frac{\Phi}{2} = \\ &= \frac{2 - v_0}{2v_0} \left( v_0 \cos^2 \frac{\Phi}{2} + 2 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \right) = \\ &= \frac{2 - v_0}{2v_0} \left( \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos \Phi + 1 - \cos \Phi \right) = \frac{4 - v_0^2 - (2 - v_0)^2 \cos \Phi}{4v_0}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{r_0}{r} = \frac{4 - v_0^2}{4v_0} \left( 1 - \frac{2 - v_0}{2 + v_0} \cos \Phi \right). \quad (3.2.13)$$

При заданной величине  $v_0$  уравнение (3.2.13) устанавливает связь между  $r$  и  $\Phi$ , т. е. описывает огибающую семейства траекторий с  $v_0 = \text{const}$ . Обозначим

$$p' = \frac{4v_0 r_0}{4 - v_0^2}, \quad e' = \frac{2 - v_0}{2 + v_0}, \quad (3.2.14)$$

тогда

$$r = \frac{p'}{1 - e' \cos \Phi}, \quad (3.2.15)$$

т. е. огибающая является эллипсом (рис. 3.5). Этот эллипс принято называть *эллипсом безопасности*, поскольку любая траектория семейства  $v_0 = \text{const}$  не выходит за его пределы. Линия апсид эллипса безопасности совпадает с начальным радиусом-вектором. Действительно, при  $\Phi = 0$  имеем  $r_{\max} = p'(1 - e')$ . Один из фокусов находится в центре масс Земли. Найдем положение второго фокуса. Согласно (2.4.7) и (3.2.14) величина большой полуоси определяется формулой

$$a' = \frac{p'}{1 - e'^2} = \frac{4v_0 r_0}{(4 - v_0^2) \left[ 1 - \frac{(2 - v_0)^2}{(2 + v_0)^2} \right]} = \frac{(2 + v_0) r_0}{2(2 - v_0)},$$

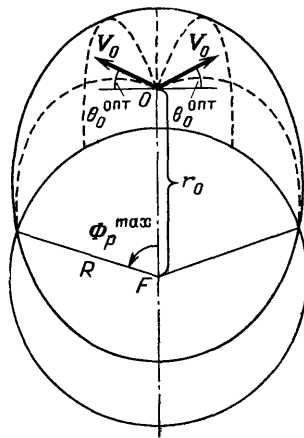


Рис. 3.5. Эллипс безопасности

т. е.

$$a' = \frac{r_0}{2e'}. \quad (3.2.16)$$

С другой стороны, для всякого эллипса

$$2c = 2ae,$$

поэтому для эллипса безопасности

$$2c' = 2a'e' = \frac{2r_0 e'}{2e'} = r_0. \quad (3.2.17)$$

Отсюда следует, что второй фокус эллипса безопасности совпадает с точкой бросания  $O$ . Полярный угол  $\Phi$  отсчитывается от направления на апогей.

Если изменять величину  $v_0$ , то получим семейство софокусных эллипсов безопасности, полуоси которых возрастают с увеличением  $v_0$ . При  $v_0 \rightarrow 2$ , когда начальная скорость стремится к местной параболической, размеры эллипса безопасности неограниченно возрастают, и любая точка пространства оказывается внутри него.

Точки пересечения эллипса безопасности с окружностью радиусом  $r_{гр}$  определяют границы досягаемости на этой окружности для семейства траекторий с  $v_0 = \text{const}$ . Указанные точки отвечают максимальной угловой дальности  $\Phi_{гр}^{\max}$ , достижимой на окружности  $r_{гр}$  при заданной величине  $v_0$ . Чтобы найти  $\Phi_{гр}^{\max}$ , положим  $r = r_{гр}$  в (3.2.15). Тогда

$$\cos \Phi_{гр}^{\max} = \frac{1}{e'} \left( 1 - \frac{p'}{r_{гр}} \right),$$

или с учетом (3.2.14)

$$\begin{aligned} \cos \Phi_p^{\max} &= \frac{2 + v_0}{2 - v_0} \left[ 1 - \frac{4v_0 r_0}{(4 - v_0^2) r_{гр}} \right] = \frac{4 - v_0^2 - 4v_0 \frac{r_0}{r_{гр}}}{(2 - v_0)^2} = \\ &= 1 - \frac{2v_0^2}{(2 - v_0)^2} \left( 1 + \frac{2r_0}{v_0 r_{гр}} - \frac{2}{v_0} \right) = 1 - \frac{2v_0^2}{(2 - v_0)^2} \left( 1 + \frac{2\Delta r_{гр}}{v_0 r_{гр}} \right), \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

где  $\Delta r_{гр} = r_0 - r_{гр}$ . Далее вычислим

$$\sin \frac{\Phi_{гр}^{\max}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \Phi_{гр}^{\max}}{2}} = \frac{v_0}{2 - v_0} \sqrt{1 + \frac{2\Delta r_{гр}}{v_0 r_{гр}}}. \quad (3.2.19)$$

Границы зоны досягаемости могут быть достигнуты только при движениях по оптимальной траектории. В частном случае, когда  $r_{гр} = r_0$  ( $\Delta r_{гр} = 0$ ), т. е. рассматриваются границы зоны досягаемости на окружности радиуса  $r_0$ , имеем

$$\sin \frac{\Phi_{гр}^{\max}}{2} = \frac{v_0}{2 - v_0}.$$

Эта формула согласуется с полученной ранее формулой (3.2.4) для начального параметра оптимальной траектории.

Пусть  $r_{гр} = r_0$  и  $v_0 = 1$ , что соответствует круговой начальной скорости. Тогда

$$\sin \frac{\Phi_{гр}^{\max}}{2} = 1 \text{ и } \Phi_{гр}^{\max} = \pi.$$

В этом случае границы зоны досягаемости находятся на угловом расстоянии  $\pm\pi$ , т. е. вся окружность радиуса  $r_{гр} = r_0$  располагается внутри эллипса безопасности, который касается указанной окружности в точке с наименьшим радиусом.

### § 3.3. Обратная задача баллистики

Если в прямой задаче баллистики требовалось определить конечную точку траектории при заданных начальных условиях, то в обратной задаче необходимо выбрать начальные условия для траектории, которая должна пройти через заданную конечную точку. Из общих соображений понятно, что обратная задача имеет неоднозначное решение, поскольку существует бесконечное множество траекторий, проходящих через две фиксированные точки. Отсюда появляется возможность учета некоторых дополнительных ограничений при выборе траектории.

**3.3.1. Выбор начальных условий.** Будем полагать, что начальная точка фиксирована своими координатами  $(\lambda_0, \varphi_0)$  и радиусом  $r_0$ , а конечная точка находится на поверхности Земли ( $r_p = R$ ) и имеет координаты  $(\lambda'_p, \varphi'_p)$ . Предположим также, что в первом приближении известно время движения на пассивном участке  $t_p$ , тогда можно построить первый шаг итерационной процедуры решения обратной задачи.

Сначала определим координаты точки, в которую должна быть направлена траектория, т. е. координаты точки прицеливания в абсолютном движении:

$$\begin{aligned} \lambda_p &= \lambda'_p + \omega_3 t_p, \\ \varphi_p &= \varphi'_p. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Затем из сферического треугольника  $ONP$  (см. рис. 3.2) найдем угловую дальность пассивного участка

$$\begin{aligned} \Phi_p &= \arccos [\sin \varphi_0 \sin \varphi_p + \cos (\lambda_p - \lambda_0) \cos \varphi_0 \cos \varphi_p] \\ &(\Phi_p \leq \pi) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

и азимут в абсолютном движении

$$\begin{aligned} \sin A_0 &= \frac{\sin (\lambda_p - \lambda_0) \cos \varphi_p}{\sin \Phi_p}, \\ \operatorname{ctg} A_0 &= \frac{\cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_p - \cos (\lambda_p - \lambda_0) \sin \varphi_0}{\sin (\lambda_p - \lambda_0)}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Подставляя величину конечного радиуса  $r = R$  и угловой дальности  $\Phi_p$  в уравнение (3.1.14), найдем из него начальный параметр [см. (3.2.5)]:

$$v_0 = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2}}{(1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + 2 \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1}, \quad (3.3.4)$$

где  $\tilde{r}_0 = r_0/R$ .

Согласно (3.3.4) каждому углу бросания  $\theta_0$  соответствует своя величина параметра  $v_0$  (или начальной скорости  $V_0 = \sqrt{\mu} v_0 / r_0$ ). Угол бросания  $\theta_0$  может выбираться из различных соображений. Например, из условий получения траектории с заданной крутизной на нисходящей ветви, с минимальной начальной скоростью, с ограничением на высоту апогея и др.

После вычисления начальных параметров движения  $\theta_0, v_0$  в первом приближении необходимо уточнить время пассивного участка  $t_p$ . Если окажется, что уточненная величина  $t_p$  существенно отличается от выбранной в первом приближении, то расчеты повторяются с этим новым значением  $t_p$  и т. д., пока не будет обеспечена требуемая точность. В качестве начального приближения  $t_p$  можно выбрать, например, время движения по оптимальной траектории, вычисленной без учета вращения Земли.

В частном случае, когда начальная и конечная точки траектории расположены на одной высоте, формула (3.3.4) упрощается:

$$v_0 = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} + \operatorname{tg} \theta_0}. \quad (3.3.5)$$

**3.3.2. Траектории с одинаковой начальной скоростью.** Пусть начальная точка и начальная скорость (или  $v_0$ ) фиксированы. Определим все возможные траектории, проходящие через заданную конечную точку, которая находится на поверхности Земли ( $r = R$ ) на расстоянии  $\Phi_p$  от начальной. С этой целью найдем углы бросания, которые обеспечивают угловую дальность  $\Phi_p$  при заданной величине  $v_0$ .

Подставляя  $r = R$  и  $\Phi = \Phi_p$  в уравнение (3.1.14), приведем его к виду

$$2R \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} \operatorname{tg}^2 \theta_0 - 2v_0 R \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \operatorname{tg} \theta_0 - (r - R_0) v_0 + [2R - (r_0 + R) v_0] \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} = 0,$$

или

$$\operatorname{tg}^2 \theta_0 - v_0 \operatorname{ctg} \frac{\Phi_p}{2} \operatorname{tg} \theta_0 - (\tilde{r}_0 - 1) \frac{v_0}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + 1 - (1 + \tilde{r}_0) \frac{v_0}{2} = 0.$$



Отсюда

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{2} \left[ v_0 \operatorname{ctg} \frac{\Phi_p}{2} \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + 2(\tilde{r}_0 - 1)v_0 \operatorname{ctg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + 2(1 + \tilde{r}_0)v_0 - 4} \right],$$

или

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Phi_p}{2} \left\{ v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2v_0 \left[ (1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 \right] - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2}} \right\}. \quad (3.3.6)$$

Если

$$v_0^2 + 2v_0 \left[ (1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 \right] - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} > 0, \quad (3.3.7)$$

то существуют два угла бросания  $\theta_0^{(1)}$  и  $\theta_0^{(2)}$ , обеспечивающие достижение требуемой угловой дальности  $\Phi_p$  с заданной величиной параметра  $v_0$ . При этом  $\theta_0^{(1)}$  вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \theta_0^{(1)} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Phi_p}{2} \left\{ v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2v_0 \left[ (1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 \right] - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2}} \right\}, \quad (3.3.8)$$

а  $\theta_0^{(2)}$  — по формуле

$$\operatorname{tg} \theta_0^{(2)} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Phi_p}{2} \left\{ v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2v_0 \left[ (1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 \right] - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2}} \right\}. \quad (3.3.9)$$

Понятно, что  $\theta_0^{(1)} > \theta_0^{(2)}$ . Более крутую траекторию, соответствующую углу бросания  $\theta_0^{(1)}$ , принято называть *навесной*, а более пологую — *настильной*. Установим взаимную связь  $\theta_0^{(1)}$ ,  $\theta_0^{(2)}$  и  $\theta_0^{\text{опт}}$ . С этой целью рассмотрим  $\operatorname{tg}(\theta_0^{(1)} + \theta_0^{(2)})$ , принимая во внимание соотношения (3.3.8) и (3.3.9):

$$\operatorname{tg}(\theta_0^{(1)} + \theta_0^{(2)}) = \frac{v_0 \operatorname{ctg} \frac{\Phi_p}{2}}{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\Phi_p}{2} \left\{ \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} - \frac{v_0}{2} \left[ (1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 \right] \right\}}. \quad (3.3.10)$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках в знаменателе (3.3.10), с учетом соотношения (3.2.8) для оптимального

угла бросания:

$$\begin{aligned} (1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 &= \tilde{r}_0 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} \right) - \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} \right) = \\ &= \frac{\tilde{r}_0 - \left( \cos^2 \frac{\Phi_p}{2} - \sin^2 \frac{\Phi_p}{2} \right)}{\cos^2 \frac{\Phi_p}{2}} = 2 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \frac{\tilde{r}_0 - \cos \Phi_p}{\sin \Phi_p} = \\ &= 2 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \operatorname{ctg} 2\theta_0^{\text{опт}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\operatorname{tg} (\theta_0^{(1)} + \theta_0^{(2)}) = \frac{v_0 \operatorname{ctg} \frac{\Phi_p}{2}}{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\Phi_p}{2} \left( \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} - v_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \operatorname{ctg} 2\theta_0^{\text{опт}} \right)},$$

или

$$\operatorname{tg} (\theta_0^{(1)} + \theta_0^{(2)}) = \operatorname{tg} 2\theta_0^{\text{опт}}. \quad (3.3.11)$$

Отсюда

$$\theta_0^{(1)} + \theta_0^{(2)} = 2\theta_0^{\text{опт}} \quad (3.3.12)$$

и

$$\theta_0^{(1)} - \theta_0^{\text{опт}} = \theta_0^{\text{опт}} - \theta_0^{(2)}. \quad (3.3.13)$$

Следовательно, векторы начальной скорости навесной и настильной траекторий симметрично отклонены в точке бросания соответственно вверх и вниз относительно вектора начальной скорости оптимальной траектории на ту же дальность. Начальная скорость навесной и настильной траекторий одинакова, причем она превышает минимальную потребную скорость для достижения заданной дальности по оптимальной траектории.

Если выполняется строгое равенство

$$v_0^2 + 2v_0 \left[ (1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 \right] - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} = 0, \quad (3.3.14)$$

то возможна только одна траектория с углом бросания

$$\theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{v_0}{2 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2}}. \quad (3.3.15)$$

Сравнивая полученное условие (3.3.15) с (3.2.1), убедимся, что эта единственная траектория является оптимальной, т. е. располагаемая величина  $v_0$  равна минимальной необходимой для достижения заданной дальности.

Если подкоренное выражение в (3.3.6) отрицательно, то решение обратной задачи баллистики не существует: ни при каком угле бросания заданная угловая дальность не может быть достигнута.

Итак, в зависимости от располагаемой величины начального параметра  $v_0$  (или начальной скорости  $V_0$ ) обратная задача баллистики может иметь два решения (навесная и настильная траектории), одно решение (оптимальная траектория) или ни одного решения.

**3.3.3. Исследование семейства траекторий между двумя фиксированными точками.** Определим некоторые свойства траекторий между двумя фиксированными точками. Эти траектории различаются величинами начального параметра  $v_0$  и угла бросания  $\theta_0$ . Установим связь  $v_0$  и  $\theta_0$  с  $v_0^{\min}$  и  $\theta_0^{\text{опт}}$  для этого семейства траекторий.

Для произвольной траектории между двумя фиксированными точками найдем с помощью (3.2.6):

$$\tilde{r}_0 = \frac{1 - \cos \Phi_p - v_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_p}{v_0 \cos^2 \theta_0} + \cos \Phi_p. \quad (3.3.16)$$

Для оптимальной траектории по аналогии с (3.3.16) можно записать

$$\tilde{r}_0 = \frac{1 - \cos \Phi_p - v_0^{\min} \sin \theta_0^{\text{опт}} \cos \theta_0^{\text{опт}} \sin \Phi_p}{v_0^{\min} \cos^2 \theta_0^{\text{опт}}} + \cos \Phi_p. \quad (3.3.17)$$

Вычитая (3.3.17) из (3.3.16), получим

$$\frac{1 - \cos \Phi_p - v_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_p}{v_0 \cos^2 \theta_0} - \frac{1 - \cos \Phi_p - v_0^{\min} \sin \theta_0^{\text{опт}} \cos \theta_0^{\text{опт}} \sin \Phi_p}{v_0^{\min} \cos^2 \theta_0^{\text{опт}}} = 0,$$

или

$$(1 - \cos \Phi_p) \frac{v_0^{\min} \cos^2 \theta_0^{\text{опт}} - v_0 \cos^2 \theta_0}{v_0 v_0^{\min} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0^{\text{опт}}} - (\text{tg } \theta_0 - \text{tg } \theta_0^{\text{опт}}) \sin \Phi_p = 0. \quad (3.3.18)$$

С учетом (3.2.1) имеем

$$\text{tg } \theta_0^{\text{опт}} = \frac{v_0^{\min}}{2} \text{ctg } \frac{\Phi_p}{2} = \frac{v_0^{\min}}{2} \frac{\sin \Phi_p}{1 - \cos \Phi_p}$$

и

$$\sin \Phi_p = \frac{2}{v_0^{\min}} \text{tg } \theta_0^{\text{опт}} (1 - \cos \Phi_p). \quad (3.3.19)$$

После подстановки (3.3.19) в (3.3.18) и сокращения на множитель  $(1 - \cos \Phi_p)/v_0^{\min} \neq 0$  найдем

$$\frac{v_0^{\min} \cos^2 \theta_0^{\text{опт}} - v_0 \cos^2 \theta_0}{v_0 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0^{\text{опт}}} - 2 \text{tg } \theta_0^{\text{опт}} (\text{tg } \theta_0 - \text{tg } \theta_0^{\text{опт}}) = 0,$$

отсюда

$$v_0^{\min} \cos^2 \theta_0^{\text{опт}} = v_0 \cos \theta_0 [2 \sin \theta_0^{\text{опт}} \sin (\theta_0 - \theta_0^{\text{опт}}) + \cos \theta_0]. \quad (3.3.20)$$

Обозначим

$$\Delta \theta_0 = \theta_0 - \theta_0^{\text{опт}}, \quad (3.3.21)$$

тогда

$$v_0^{\min} \cos^2 \theta_0^{\text{опт}} = v_0 \cos \theta_0 [2 \sin \theta_0^{\text{опт}} \sin \Delta \theta_0 + \cos (\theta_0^{\text{опт}} + \Delta \theta_0)]. \quad (3.3.22)$$

Преобразуем теперь правую часть (3.3.22):

$$\begin{aligned} v_0 \cos \theta_0 [2 \sin \theta_0^{\text{опт}} \sin \Delta \theta_0 + \cos (\theta_0^{\text{опт}} + \Delta \theta_0)] &= \\ &= v_0 \cos \theta_0 (\sin \theta_0^{\text{опт}} \sin \Delta \theta_0 + \cos \theta_0^{\text{опт}} \cos \Delta \theta_0) = \\ &= v_0 \cos (\theta_0^{\text{опт}} + \Delta \theta_0) \cos (\theta_0^{\text{опт}} - \Delta \theta_0) = \frac{v_0}{2} (\cos 2\theta_0^{\text{опт}} + \cos 2\Delta \theta_0) = \\ &= \frac{v_0}{2} (2 \cos^2 \theta_0^{\text{опт}} - 1 - 2 \sin^2 \Delta \theta_0 + 1) = v_0 (\cos^2 \theta_0^{\text{опт}} - \sin^2 \Delta \theta_0). \end{aligned}$$

С учетом этого

$$v_0^{\min} \cos^2 \theta_0^{\text{опт}} = v_0 (\cos^2 \theta_0^{\text{опт}} - \sin^2 \Delta \theta_0),$$

откуда

$$v_0 = \frac{v_0^{\min}}{1 - \frac{\sin^2 \Delta \theta_0}{\cos^2 \theta_0^{\text{опт}}}} \quad (3.3.23)$$

и

$$V_0^2 = \frac{(v_0^{\min})^2}{1 - \frac{\sin^2 \Delta \theta_0}{\cos^2 \theta_0^{\text{опт}}}}. \quad (3.3.24)$$

Формула (3.3.24) позволяет легко построить геометрическое место концов векторов начальной скорости для семейства траекторий, проходящих через две заданные точки. Действительно, введем систему координат  $Ouw$ , причем ось  $Ou$  направим по вектору  $V_0^{\min}$ , а ось  $OW$  — по нормали вверх (рис 3.6). Тогда

$$\sin \Delta \theta_0 = \frac{w}{V_0}, \quad V_0^2 = u^2 + w^2 \quad (3.3.25)$$

и

$$V_0^2 = \frac{(v_0^{\min})^2}{1 - \frac{w^2}{V_0^2 \cos^2 \theta_0^{\text{опт}}}}.$$

Далее, получим отсюда

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(v_0^{\min})^2}{u^2 + w^2 - \frac{w^2}{\cos^2 \theta_0^{\text{опт}}}}, \\ u^2 + w^2 \left( 1 - \frac{1}{\cos^2 \theta_0^{\text{опт}}} \right) &= (v_0^{\min})^2, \\ u^2 - w^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0^{\text{опт}} &= (v_0^{\min})^2 \end{aligned}$$

и окончательно

$$\frac{u^2}{(V_0^{\min})^2} - \frac{w^2}{\left(\frac{V_0^{\min}}{\operatorname{tg}^2 \theta_0^{\text{опт}}}\right)^2} = 1. \quad (3.3.26)$$

Это — уравнение гиперболы. Таким образом, показано, что концы векторов начальной скорости, обеспечивающих прохождение траекторий через две заданные точки, расположены на гиперболе, симметричной относительно вектора  $V_0^{\min}$ . Для определения положения асимптот, отвечающих условию  $V_0 \rightarrow \infty$ , потребуем обращения в нуль знаменателя (3.3.24):

$$\cos^2 \theta_0^{\text{опт}} - \sin^2 \Delta \theta_0^{\max} = 0,$$

или

$$(\cos \theta_0^{\text{опт}} + \sin \Delta \theta_0^{\max})(\cos \theta_0^{\text{опт}} - \sin \Delta \theta_0^{\max}) = 0.$$

Отсюда

$$\sin \Delta \theta_0^{\max} = \pm \cos \theta_0^{\text{опт}}$$

и

$$\Delta \theta_0^{\max} = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0^{\text{опт}}\right). \quad (3.3.27)$$

Следовательно, одна из асимптот гиперболы направлена из начальной точки в конечную, а вторая — по продолжению начального радиуса-вектора (рис. 3.7).

Из двух ветвей гиперболы необходимо выбрать ту, которая позволяет учесть ограничение на траекторию из условия ее пересечения с поверхностью Земли только в конечной точке.

Заметим, что в том случае, когда рассматривается задача перелета по эллиптической траектории между двумя точками космического пространства и радиус притягивающего тела бесконечно мал, могут быть использованы обе ветви гиперболы. Одна из них будет отвечать восходящим траекториям, а вторая — нисходящим. Выбрав величину начальной скорости, обеспечивающую перелет между заданными точками, можно реализовать две траектории перелета, направленные в противоположные стороны и геометрически образующие один и тот же эллипс.

Предположим, что аппарат имеет некоторую переносную скорость  $V_{\text{пер}}$ , например, из-за вращения Земли. Тогда для обеспечения движения аппарата по одной из траекторий между двумя фиксированными точками ему следует сообщить дополнительную скорость  $\Delta V$ , которую легко определить, соединив конец вектора  $V_{\text{пер}}$  с соответствующей точкой гиперболы скоростей (рис. 3.8). Величина дополнительной скорости имеет наименьшее значение, если вектор  $\Delta V$  направлен по нормали к гиперболе.

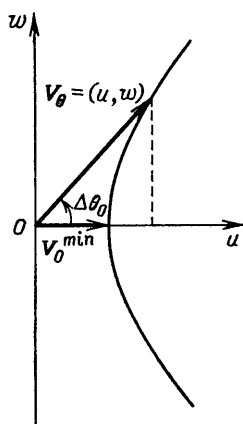


Рис. 3.6. Система координат  $Ouw$

На рис. 3.9 и 3.10 построены зависимости, позволяющие для заданной дальности пассивного участка  $L_p$  определить требуемое сочетание начального параметра  $v_0$  и угла бросания  $\theta_0$ . Случай  $\tilde{r}_0 = 1$  отвечает совпадению высот начальной и конечной точек траектории, а  $\tilde{r}_0 = 1,06$  отвечает превышению начальной точки над конечной на  $\sim 350$  км. Построенные зависимости относительного радиуса апогея  $\tilde{r}_a = r_a/r_0$  позволяют оценить максимальную высоту траектории над поверхностью Земли.

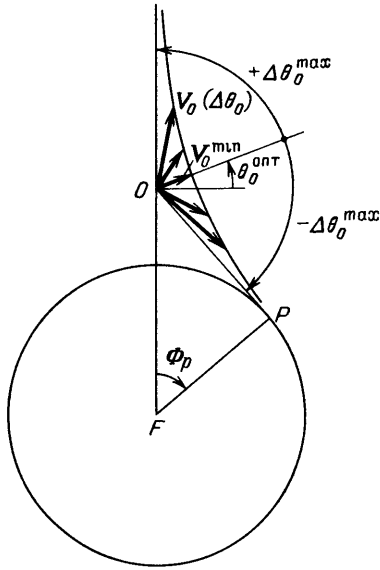


Рис 37 Векторы начальной скорости семейства траекторий между двумя фиксированными точками

Для определения скорости и угла наклона траектории в любой точке можно воспользоваться интегралами энергии (2.2.1) и площадей (2.2.11). Например, в конечной точке траектории

$$V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} = V_p^2 - \frac{2\mu}{R},$$

откуда

$$v_p = 2 - \frac{2 - v_0}{\tilde{r}_0} \quad (\tilde{r}_0 = r_0/R) \quad (3.3.28)$$

и

$$V_p = \sqrt{\frac{\mu v_p}{R}}. \quad (3.3.29)$$

Согласно интегралу площадей

$$r_0 V_0 \cos \theta_0 = R V_p \cos \theta_p$$

и

$$\theta_p = -\arccos \left( \cos \theta_0 \sqrt{\frac{\tilde{r}_0 v_0}{v_p}} \right). \quad (3.3.30)$$

Здесь знак «-» взят с учетом нисходящей ветви траектории.

При  $\tilde{r}_0 = 1$  получим

$$v_p = v_0, \quad \theta_p = -\theta_0, \quad (3.3.31)$$

что достаточно очевидно из условия симметрии.

Оценим характер изменения времени движения на пассивном участке  $t_p$  при увеличении крутизны траектории. Время движения найдем через площадь  $S$ , заметаемую радиусом-вектором при перемещении из начальной точки в конечную, и величину  $C = r_0 V_0 \cos \theta_0$

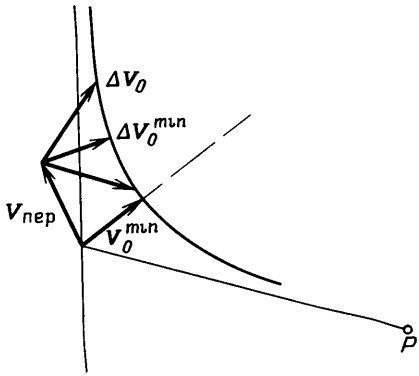


Рис 38 Учет переносной скорости

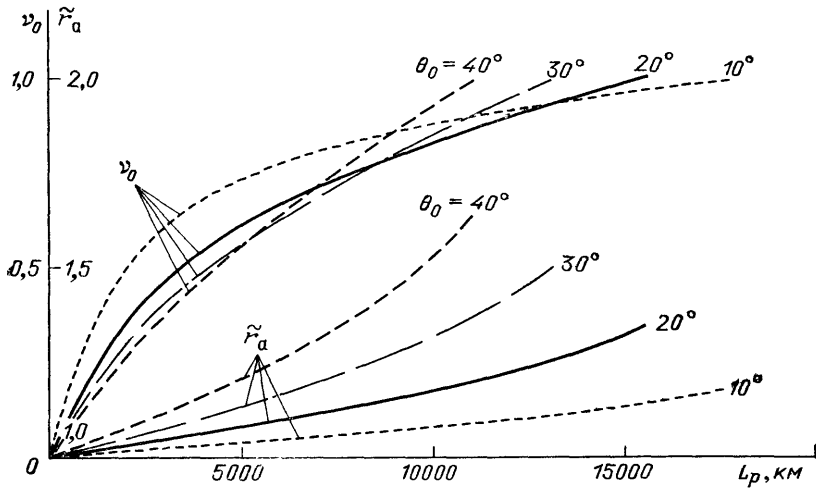


Рис 3.9 Параметры траектории движения при  $\tilde{r}_0 = 1$

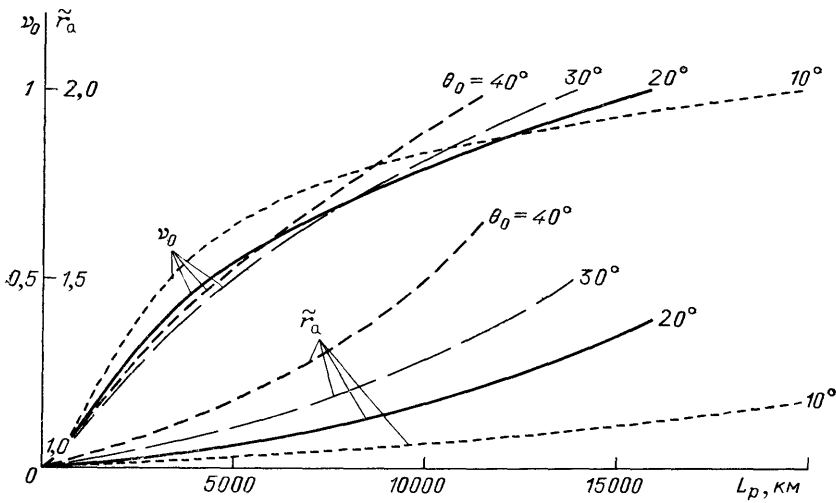


Рис 3.10 Параметры траектории движения при  $\tilde{r}_0 = 1,06$

удвоенной секториальной скорости, которая постоянна по траектории:

$$t_p = \frac{2S}{C} = \frac{2S}{r_0 V_0 \cos \theta_0} \quad (3.3.32)$$

Видно, что с увеличением угла бросания  $\theta_0$  заметаемая площадь  $S$  увеличивается, а секториальная скорость уменьшается. Следовательно, время движения на пассивном участке с фиксированной угло-

вой дальностью  $\Phi_p$  будет монотонно возрастать по мере увеличения угла бросания  $\theta_0$ . Поэтому время движения по навесной траектории всегда больше, чем время движения по настильной траектории.

### § 3.4. Параболическая траектория

Траекторию движения на небольшую дальность (50—500 км [36]) в предположении отсутствия атмосферы можно в первом приближении считать параболой, ось симметрии которой параллельна начальному радиусу-вектору. Принятое ограничение на дальность позволяет существенно упростить расчетные формулы.

**3.4.1. Параболическая траектория как предельный случай эллиптической.** Можно рассматривать параболическую траекторию как предельный случай эллиптической, если угловая дальность пассивного участка мала. Построим прямоугольную декартову систему координат  $Oxy$  с началом в точке бросания, осью  $Ox$ , направленной горизонтально в сторону движения, и осью  $Oy$ , направленной по продолжению начального радиуса-вектора (рис. 3.11).

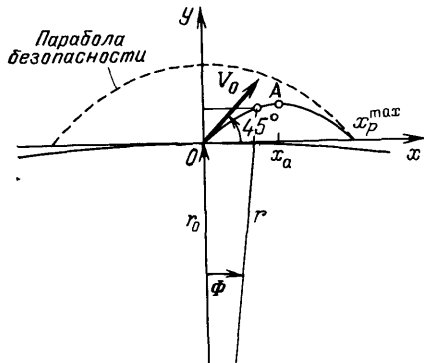


Рис. 3.11. Параболическая траектория

Рассмотрим уравнение эллиптической траектории в виде (3.3.16)

$$\frac{r_0}{r} = \frac{1 - \cos \Phi - v_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \Phi}{v_0 \cos^2 \theta_0} + \cos \Phi. \quad (3.4.1)$$

Для малых угловых дальностей можно принять

$$\frac{x}{r_0} \approx \frac{x}{r_0 + y} = \operatorname{tg} \Phi \approx \sin \Phi \approx \Phi, \quad \cos \Phi \approx 1; \quad (3.4.2)$$

отсюда

$$1 - \cos \Phi = 2 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \approx \frac{\Phi^2}{2} \approx \frac{x^2}{2r_0} \quad (3.4.3)$$

и

$$r = \frac{r_0 + y}{\cos \Phi} \approx r_0 + y, \quad \frac{r_0}{r} \approx \frac{r_0}{r_0 + y} = \frac{1}{1 + \frac{y}{r_0}} \approx 1 - \frac{y}{r_0}. \quad (3.4.4)$$

Вычислим

$$v_0 = \frac{r_0 V_0^2}{\mu} = \frac{V_0^2}{r_0 g}, \quad (3.4.5)$$



где

$$g' = \frac{\mu}{r_0^2} \quad (3.4.6)$$

— ускорение силы тяжести в точке бросания, и затем преобразуем уравнение (3.4.1) с учетом (3.4.2) — (3.4.6):

$$1 - \frac{y}{r_0} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{r_0^2} \frac{r_0 g'}{V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) - \frac{x}{r_0} \operatorname{tg} \theta_0 + 1,$$

или

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{g}{2V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) x^2. \quad (3.4.7)$$

Уравнение (3.4.7) описывает в системе координат  $Oxy$  параболическую траекторию, которая получается при начальной скорости  $V_0$  и угле бросания  $\theta_0$ . Для определения полной дальности  $x_p$  следует положить  $y_p = 0$ . Тогда первый корень этого уравнения будет определять полную дальность как точку пересечения параболической траектории с горизонтальной линией (осью абсцисс):

$$x_p = \frac{V_0^2}{g} \frac{2 \operatorname{tg} \theta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0} = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \quad (3.4.8)$$

Второй корень ( $x_0 = 0$ ) соответствует пересечению параболической траектории с осью абсцисс в начале координат, т. е. в точке бросания.

Из уравнения (3.4.8) следует, что при постоянной начальной скорости  $V_0$  максимальная дальность достигается с углом бросания  $\theta_0^{\text{опт}} = 45^\circ$  и составляет

$$x_p^{\text{max}} = \frac{V_0^2}{g}. \quad (3.4.9)$$

Определим максимальную высоту подъема траектории из условия  $dy/dx = 0$ . Дифференцируя (3.4.7), найдем

$$\operatorname{tg} \theta_0 - \frac{g}{V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) x = 0.$$

Отсюда абсцисса точки, в которой достигается максимальная высота, есть

$$x_a = \frac{V_0^2}{g} \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0}. \quad (3.4.10)$$

Подставим  $x_a$  в (3.4.7) и вычислим максимальную высоту подъема:

$$y_a = \frac{V_0^2}{g} \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0} \left[ \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{g}{2V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \frac{V_0^2}{g} \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0} \right] = \frac{V_0^2}{2g} \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0}.$$

или

$$y_a = \frac{V_0^2}{2g} \sin^2 \theta_0. \quad (3.4.11)$$

Предельная высота подъема достигается при  $\theta_0 = 90^\circ$  и составляет

$$y_a^{\max} = \frac{V_0^2}{2g}, \quad (3.4.12)$$

или

$$y_a^{\max} = \frac{x_p^{\max}}{2}, \quad (3.4.13)$$

т. е. равна половине от полной дальности.

Для оптимального угла бросания  $\theta_0^{\text{опт}} = 45^\circ$

$$y_a^{45^\circ} = \frac{V_0^2}{4g}, \quad (3.4.14)$$

или

$$y_a^{45^\circ} = \frac{x_p^{\max}}{4}, \quad (3.4.15)$$

т. е. на оптимальной параболической траектории максимальная высота подъема составляет  $1/4$  от полной дальности.

Основные формулы для параболической траектории можно вывести также непосредственным интегрированием дифференциальных уравнений движения в плоскопараллельном однородном поле силы тяжести, без учета кривизны Земли и плотности атмосферы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad (3.4.16)$$

с начальными условиями

$$x(0) = y(0) = 0, \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = V_0 \cos \theta_0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = V_0 \sin \theta_0. \quad (3.4.17)$$

Учитывая это замечание, можно достаточно просто получить формулу для времени движения по параболической траектории. Действительно, согласно (3.4.16) и (3.4.17)

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_t = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = V_0 \cos \theta_0,$$

т. е. горизонтальная скорость постоянна. С другой стороны, дальность до конечной точки

$$x_p = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\theta_0.$$

Отсюда время движения по параболической траектории

$$t_p = \frac{x_p}{\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0}} = \frac{2V_0}{g} \sin \theta_0. \quad (3.4.18)$$

Заметим, что соотношения (3.4.13) и (3.4.15) можно использовать в качестве оценок и при расчете эллиптических траекторий на небольшую угловую дальность.

**3.4.2. Парабола безопасности.** Для семейства параболических траекторий с постоянной начальной скоростью  $V_0$  и различными углами бросания  $\theta_0$  можно построить огибающую — *параболу безопасности*. Уравнение параболы безопасности выведем из уравнения эллипса безопасности (3.2.13)

$$\frac{r_0}{r} = \frac{4 - v_0^2}{4v_0} \left( 1 - \cos \Phi + \frac{2v_0}{2 + v_0} \cos \Phi \right)$$

с учетом принятых допущений для малых угловых дальностей. Дополнительно учтем, что для малых дальностей можно также принять

$$v_0^2 \approx 0, \quad (3.4.19)$$

поскольку  $v_0$  мало (напомним, что  $v_0$  — квадрат отношения начальной скорости к местной круговой). Тогда для параболы безопасности получим

$$1 - \frac{y}{r_0} = \frac{1}{v_0} \left[ \frac{x^2}{2r_0^2} + v_0 \left( 1 - \frac{v_0}{2} \right) \right],$$

или

$$1 - \frac{y}{r_0} = \frac{x^2}{2v_0 r_0^2} + 1 - \frac{v_0}{2},$$

откуда

$$y = \frac{r_0 v_0}{2} \left( 1 - \frac{x^2}{r_0^2 v_0^2} \right)$$

и окончательно

$$y = \frac{V_0^2}{2g} \left[ 1 - \left( \frac{gx}{V_0^2} \right)^2 \right]. \quad (3.4.20)$$

Уравнение параболы безопасности (3.4.20) можно записать в более простом виде, если учесть соотношения (3.4.9) и (3.4.12):

$$y = y_a^{\max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_p^{\max}} \right)^2 \right]. \quad (3.4.21)$$

Парабола безопасности касается траектории максимальной дальности в точке  $P$  с координатами  $x_p^{\max} = V_0^2/g$ ,  $y_p = 0$ .

Заметим, что уравнение параболы безопасности (3.4.20) можно было бы получить непосредственно как уравнение огибающей семейства параболических траекторий (3.4.7), зависящих от параметра  $\theta_0$  и проходящих через две фиксированные точки, начальную и конечную.

### § 3.5. Производные конечных параметров движения по начальным

Во многих задачах баллистики возникает необходимость оценки отклонений конечных параметров движения при небольших отклонениях начальных параметров движения. В линейном приближении такие оценки можно получить с помощью соответствующих производных.

Будем рассматривать эллиптические траектории движения, т. е. пользоваться зависимостями, полученными в предположении центрального поля притяжения и отсутствия атмосферы.

**3.5.1. Продольное движение.** Наиболее часто возникает необходимость оценки изменения дальности пассивного участка при малых отклонениях начальных параметров движения: скорости  $V_0$ , угла бросания  $\theta_0$ , радиуса  $r_0$ .

Предварительно рассмотрим производные угловой дальности  $\Phi_p$  по начальным параметрам. Для этого воспользуемся уравнением (3.1.14) при  $r = R$  и  $\Phi = \Phi_p$ , которое определяет угловую дальность как неявную функцию указанных параметров  $F(\Phi_p, V_0, \theta_0, r_0) = 0$ . Тогда можно записать

$$\frac{\partial F}{\partial V_0} + \frac{\partial F}{\partial \Phi_p} \frac{\partial \Phi_p}{\partial V_0} = 0, \quad (3.5.1)$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial V} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial V_0}}{\frac{\partial F}{\partial \Phi_p}} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial v_0} \frac{\partial v_0}{\partial V_0}}{\frac{\partial F}{\partial \Phi_p}}. \quad (3.5.2)$$

Сначала вычислим

$$\frac{\partial F}{\partial v_0} = -R \left[ (1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + 2 \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 \right],$$

но согласно (3.1.14)

$$(1 + \tilde{r}_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} + 2 \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} + \tilde{r}_0 - 1 = \frac{2}{v_0} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2},$$

поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial v_0} = - \frac{2R}{v_0} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2}. \quad (3.5.3)$$

Теперь найдем

$$\frac{\partial v_0}{\partial V_0} = \frac{2r_0 V_0}{\mu} = \frac{2v_0}{V_0},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi_p} = \frac{R}{\cos^2 \frac{\Phi_p}{2}} \left\{ [2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) - (\tilde{r}_0 + \tilde{r}_0) v_0] \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} - v_0 \operatorname{tg} \theta_0 \right\} \quad (3.5.4)$$

и, учитывая уравнение движения (3.1.14),

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi_p} = \frac{v_0 R}{\operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \cos^2 \frac{\Phi_p}{2}} \left( \tilde{r}_0 - 1 + \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \right). \quad (3.5.5)$$

Подставим производные (3.5.3)–(3.5.5) в (3.5.2), тогда

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial V_0} = \frac{4(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \sin^2 \frac{\Phi_p}{2} \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2}}{V_0 v_0 \left( \tilde{r}_0 - 1 + \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \right)}. \quad (3.5.6)$$

Теперь определим производную угловой дальности по углу бросания

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial \theta_0} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \theta_0}}{\frac{\partial F}{\partial \Phi_p}}. \quad (3.5.7)$$

Используя (3.1.14), вычислим

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_0} = \frac{2R}{\cos^2 \theta_0} \left( 2 \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} - v_0 \right) \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \quad (3.5.8)$$

и затем найдем

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial \theta_0} = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \left( v_0 - 2 \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \right) \sin^2 \frac{\Phi_p}{2}}{v_0 \left( \tilde{r}_0 - 1 + \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \right)}. \quad (3.5.9)$$

Вычислим теперь производную угловой дальности по начальному радиусу

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial r_0} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial r_0} + \frac{\partial F}{\partial v_0} \frac{\partial v_0}{\partial r_0}}{\frac{\partial F}{\partial \Phi_p}}, \quad (3.5.10)$$

где

$$\frac{\partial F}{\partial r_0} = - v_0 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_p}{2} \right) = - \frac{v_0}{\cos^2 \frac{\Phi_p}{2}} \quad (3.5.11)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial r_0} = \frac{V_0^2}{\mu} = \frac{v_0}{r_0}. \quad (3.5.12)$$

Тогда

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial r_0} = \frac{v_0 + \frac{2}{r_0} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \sin^2 \frac{\Phi_p}{2}}{v_0 R \left( \tilde{r}_0 - 1 + \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \right)} \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2}. \quad (3.5.13)$$

Дальность пассивного участка, измеряемая по поверхности Земли, связана с угловой дальностью условием

$$L_p = R \Phi_p, \quad (3.5.14)$$

поэтому производные дальности по начальным параметрам легко получить из найденных выше производных угловой дальности:

$$\frac{\partial L_p}{\partial V_0} = \frac{4R}{V_0} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \sin^2 \frac{\Phi_p}{2} \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2}}{v_0 \left( \tilde{r}_0 - 1 + \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \right)}, \quad (3.5.15)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \theta_0} = 2R \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \left( v_0 - 2 \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \right) \sin^2 \frac{\Phi_p}{2}}{v_0 \left( \tilde{r}_0 - 1 + \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \right)}, \quad (3.5.16)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial r_0} = \frac{v_0 + \frac{2}{r_0} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \sin^2 \frac{\Phi_p}{2}}{v_0 \left( \tilde{r}_0 - 1 + \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \right)} \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2}. \quad (3.5.17)$$

Если высоты начальной и конечной точек траектории совпадают ( $\tilde{r}_0 = 1$ ), то полученные формулы упрощаются:

$$\frac{\partial L_p}{\partial V_0} = \frac{8R}{V_0} \frac{\sin^2 \frac{\Phi_p}{2}}{v_0 \sin 2\theta_0}, \quad (3.5.18)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \theta_0} = R \frac{\left( v_0 - 2 \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi_p}{2} \right) \sin \Phi_p}{v_0 \sin 2\theta_0}, \quad (3.5.19)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial r_0} = \frac{v_0 + 2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \sin^2 \frac{\Phi_p}{2}}{v_0 \operatorname{tg} \theta_0}. \quad (3.5.20)$$

Значения производных  $\frac{\partial L_p}{\partial V_0}$ ,  $\frac{\partial L_p}{\partial \theta_0}$ ,  $\frac{\partial L_p}{\partial r_0}$  для различных дальностей пассивного участка  $L_p$  и углов бросания  $\theta_0$  построены на рис. 3.12 и 3.13 в предположении, что  $\tilde{r}_0 = 1$ .

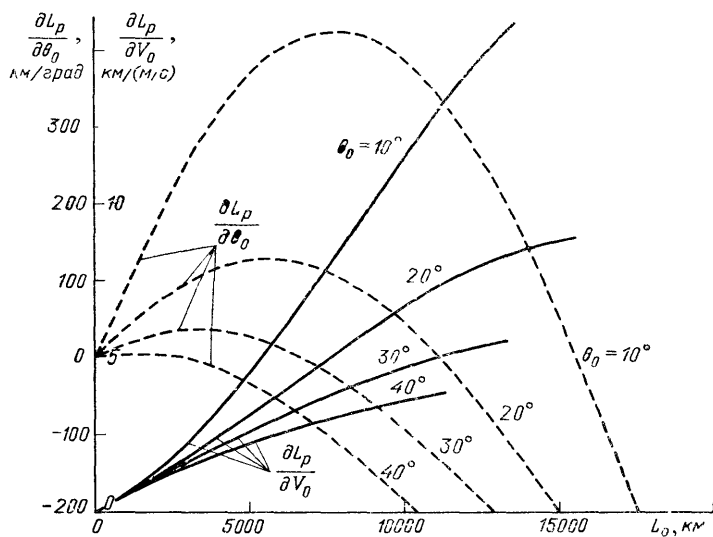


Рис. 3.12. Производные дальности по начальной скорости и углу бросания при  $\tilde{r}_0 = 1$

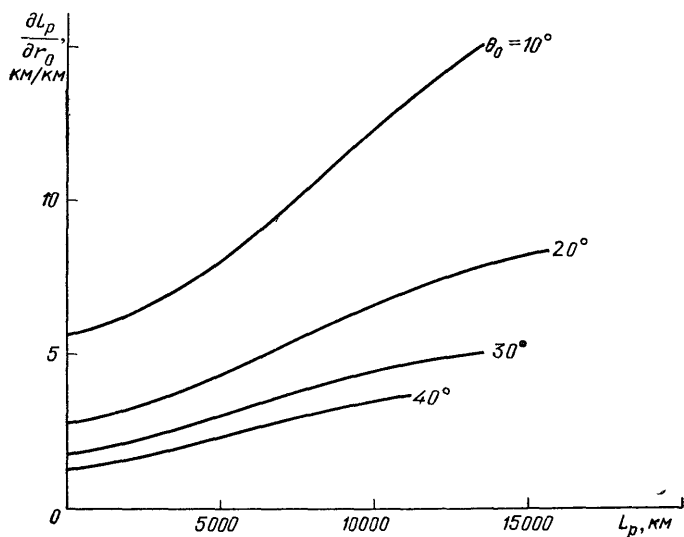


Рис. 3.13. Производные дальности по начальному радиусу при  $\tilde{r}_0 = 1$

**3.5.2. Боковое движение.** Для оценки в линейном приближении величины смещения конечной точки траектории от номинальной плоскости движения используют производные бокового смещения  $B$  по азимуту  $A_0$ , боковой скорости  $V_{b0}$  и боковому смещению  $B_0$  в точке бросания.

Предположим, что в точке бросания имеет место ошибка по азимуту  $\Delta A_0$ , т. е. плоскость траектории пассивного участка оказывается повернутой вокруг начального радиуса-вектора  $r_0$  на величину  $\Delta A_0$  относительно номинальной плоскости движения (рис. 3.14).

В результате возникает боковое смещение конечной точки от номинальной плоскости движения, причем в линейном приближении это смещение можно вычислить по формуле

$$B = R \sin \Phi_p \Delta A_0, \quad (3.5.21)$$

откуда

$$\frac{\partial B}{\partial A_0} = R \sin \Phi_p. \quad (3.5.22)$$

Появление боковой скорости  $\Delta V_{b0}$ , т. е. составляющей скорости по нормали к номинальной плоскости движения, можно в линейном приближении интерпретировать как ошибку по начальному азимуту  $\Delta A_0$ . Из уравнения связи

$$\Delta V_{b0} = V_0 \cos \theta_0 \Delta A_0 \quad (3.5.23)$$

выразим  $\Delta A_0$  и после подстановки в (3.5.21) найдем, переходя к пределу,

$$\frac{\partial B}{\partial V_{b0}} = \frac{R \sin \Phi_p}{V_0 \cos \theta_0}. \quad (3.5.24)$$

Пусть теперь в начальной точке имеет место боковое смещение  $B_0$  относительно номинальной плоскости движения. Требуется определить боковое смещение  $B$  в конечной точке на поверхности Земли. Для наглядности номинальную плоскость движения можно представить на сфере радиуса  $R$  в виде некоторой «меридиональной» плоскости, начальное боковое смещение задавать в плоскости «экватора», а возмущенную плоскость движения — в виде другой «меридиональной» плоскости, повернутой вокруг «полярной» оси на угол  $B_0/r_0$  относительно номинальной плоскости ( $r_0$  — радиус начальной точки). Тогда угловую дальность  $\Phi_p$  конечной точки можно рассматривать как ее «широту», а ее боковое смещение  $B$  — как расстояние по «параллели» от номинальной плоскости. Отсюда

$$B = \frac{B_0}{r_0} R \cos \Phi_p$$

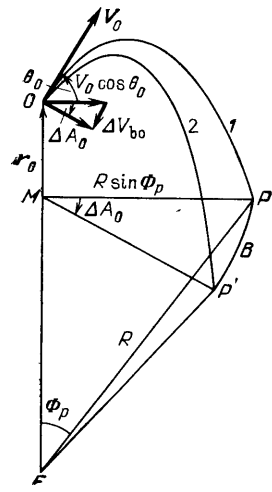


Рис. 3.14. Определение бокового промаха: 1 — номинальная траектория; 2 — возмущенная траектория



и

$$\frac{\partial B}{\partial B_0} = \frac{\cos \Phi_p}{\tilde{r}_0} \quad (\tilde{r}_0 = r_0/R). \quad (3.5.25)$$

Рассмотрим производные (3.5.22) и (3.5.24). Обе производные достигают наибольшей величины при  $\Phi_p = \pi/2$ , что соответствует дальности пассивного участка  $L_p = 10\,000$  км. При  $\Phi_p = \pi$  ( $L_p = 20\,000$  км) эти производные обращаются в нуль, поскольку радиусы-векторы начальной и конечной точек оказываются расположенными на одной прямой, а любые ошибки по азимуту или боковой скорости приводят только к повороту плоскости движения относительно указанной прямой.

Производная (3.5.25) положительна при  $0 < \Phi_p < \pi/2$ , равна нулю при  $\Phi_p = \pi/2$  и отрицательна при  $\pi/2 < \Phi_p < 3\pi/2$ .

Продолжим рассмотрение движения спутника в центральном поле притяжения. В главе 2 основное внимание было уделено анализу плоского движения спутника, для чего система координат выбиралась так, чтобы ее оси располагались в плоскости орбиты спутника. Подобный выбор системы координат упрощает исследования модельных задач и получаемые соотношения для описания движения спутника. Если же учесть требования, которые предъявляются при решении практических задач проектирования околоземных орбит спутников или выбора межпланетных траекторий космических аппаратов, то система координат, связанная с плоскостью движения, не всегда оказывается удобной для описания траектории. Например, движение околоземного спутника обычно описывают в *экваториальной геоцентрической* системе координат, декартовой прямоугольной или полярной. Для описания межпланетных траекторий часто используют *эклиптическую* декартову систему координат, две оси которой располагаются в плоскости гелиоцентрической орбиты Земли, а третья направлена к северному полюсу мира.

При анализе пространственной траектории спутника обычно рассматриваются следующие основные задачи. Во-первых, выбор совокупности параметров, позволяющих полностью описать пространственное движение. Во-вторых, определение пространственной траектории по результатам измерений некоторых величин, как правило, не являющихся параметрами, которые используются для описания движения. В-третьих, определение *трассы спутника*, т. е. совокупности точек пересечения текущих радиусов-векторов спутника с поверхностью Земли (или другого небесного тела). Перейдем к последовательному рассмотрению перечисленных задач.

#### § 4.1. Основные элементы орбиты

Движение спутника относительно притягивающего центра описывается тремя уравнениями второго порядка (2.1.6). Следовательно, чтобы полностью определить движение спутника, надо задать шесть производных постоянных. Например, можно задать три координаты и три составляющие скорости в некоторой точке траектории. Обычно в астрономии используются специальным образом подобранные постоянные, с помощью которых удается наиболее просто и наглядно определить движение спутника.

**4.1.1. Выбор элементов орбиты.** Шесть произвольных постоянных, которые позволяют полностью определить положение спутника в любой момент времени, называют *элементами орбиты* спутника. Частично элементы орбиты были рассмотрены в п. 2.2.2, в том числе и  $\Omega$  — долгота восходящего узла (или просто долгота узла). Этот угол фиксирует положение восходящего узла относительно некоторого начала отсчета (рис. 4.1) и может изменяться в диапазоне

$$0 \leq \Omega \leq 2\pi. \quad (4.1.1)$$

Был введен также угол  $i$  между плоскостью орбиты спутника и основной координатной плоскостью, причем

$$0 \leq i \leq \pi. \quad (4.1.2)$$

Этот угол часто называют *наклоном орбиты*. Если  $0 < i < \frac{\pi}{2}$ , то движение спутника называют *прямым*, а орбиту *восточной*, если же  $\frac{\pi}{2} < i < \pi$ ,

то — *обратным*, а орбиту — *западной*. В случае  $i = 0$  и  $i = \pi$  плоскость орбиты спутника совпадает с основной координатной плоскостью; тогда понятие долготы восходящего узла теряет смысл. Такую орбиту называют *экваториальной*. При  $i = \pi/2$  плоскость орбиты совпадает с меридиональной плоскостью. Это — *полярная* орбита.

Заметим, что для гиперболической и параболической орбит возможны случаи, когда существует только один узел, восходящий или нисходящий, т. е. траектория пересекает линию узлов только в одной точке. В подобных случаях полагают, что второй узел расположен на линии узлов в бесконечно удаленной точке.

С помощью углов  $\Omega$  и  $i$  однозначно фиксируется положение плоскости орбиты в выбранной системе координат (экваториальной или эклиптической). Чтобы определить положение линии апсид орбиты в ее плоскости, следует задать угол  $\omega$  между восходящим узлом и радиусом-вектором перицентра орбиты. Этот угол часто называют *аргументом перицентра*, он может изменяться в пределах

$$0 \leq \omega \leq 2\pi. \quad (4.1.3)$$

Орбита в своей плоскости характеризуется эксцентриситетом  $e$  и параметром  $p$ . Для привязки движения спутника по времени задают момент времени  $t_n$ , когда спутник находится в перицентре.

Таким образом, для задания пространственного движения спутника в астрономии обычно используют следующие элементы орбиты:

$$\Omega, i, \omega, e, p, t_n. \quad (4.1.4)$$

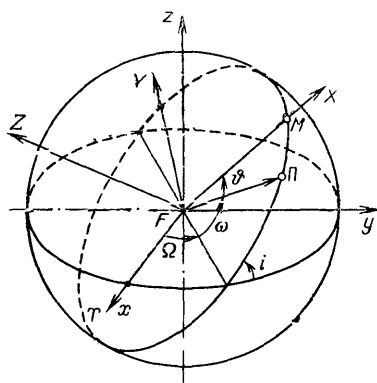


Рис. 4.1. Параметры орбиты в пространстве

Знание этих (или некоторых других) элементов орбиты позволяет определить положение спутника и его скорость в любой момент времени  $t$ .

**4.1.2. Положение и скорость спутника в пространстве.** Пусть заданы элементы орбиты (4.1.4), а требуется определить координаты и составляющие скорости спутника в экваториальной (эклиптической) системе координат  $Fxyz$  (рис. 4.1) в произвольный момент времени  $t$ . При этом будем полагать, что орбита спутника эллиптическая (для гиперболической и параболической орбит последовательность вычислений остается такой же, но должны использоваться соотношения, полученные ранее для этих орбит). Ось  $Fx$  направлена в точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$ , которая на небесной сфере соответствует линии пересечения плоскостей экватора и эклиптики при переходе Солнца из Южного полушария в Северное.

Чтобы перейти от момента времени  $t$  к соответствующей ему величине истинной аномалии  $\vartheta$ , следует предварительно вычислить по формуле (2.4.7) величину большой полуоси орбиты  $a = p/(1 - e^2)$ . Далее, решая уравнение (2.5.8), найдем эксцентрическую аномалию  $E$  по значению  $\Delta t = t - t_n$ , а затем с помощью формулы (2.5.6) — истинную аномалию  $\vartheta$ .

Зная истинную аномалию, можно из уравнения орбиты (2.2.31) определить  $r$  — расстояние спутника до притягивающего центра. Радиальная  $V_r$  и трансверсальная  $V_n$  составляющие скорости вычисляются по формулам (2.3.5) и (2.3.7). Пусть  $\mathbf{r}^0$  и  $\mathbf{n}^0$  — единичные векторы, направленные соответственно по радиусу-вектору и по нормали к нему в плоскости движения. Тогда радиус-вектор спутника

$$\mathbf{r} = r\mathbf{r}^0 \quad (4.1.5)$$

и вектор его скорости

$$\mathbf{V} = V_r\mathbf{r}^0 + V_n\mathbf{n}^0. \quad (4.1.6)$$

Чтобы определить векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{V}$  в экваториальной (эклиптической) системе координат  $Fxyz$ , надо определить в этой системе координат единичные векторы  $\mathbf{r}^0$  и  $\mathbf{n}^0$ , т. е. найти их направляющие косинусы.

Введем дополнительно орбитальную систему координат  $FXYZ$ , ось  $FX$  которой направлена по радиусу-вектору спутника, ось  $FY$  параллельна трансверсальной составляющей скорости  $V_n$ , а ось  $FZ$  направлена по вектору  $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{V}$  (интегралу площадей). Переход от системы координат  $Fxyz$  к системе координат  $FXYZ$  совершается путем последовательных поворотов на углы  $\Omega$ ,  $i$  и  $u = \omega + \vartheta$ . Угол  $u$  называют *аргументом широты*. Матрицы, соответствующие этим поворотам, имеют вид

$$M_\Omega = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1.7)$$

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}, \quad (4.1.8)$$

$$M_u = \begin{bmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.1.9)$$

Поэтому матрица  $M$ , отвечающая переходу от системы координат  $Fxyz$  к системе координат  $FXYZ$  путем последовательных поворотов на углы  $\Omega \rightarrow i \rightarrow u$ , будет вычисляться по формуле

$$M = \begin{bmatrix} \cos u \cos \Omega - \cos i \sin u \sin \Omega & \cos u \sin \Omega + \cos i \sin u \cos \Omega & \sin i \sin u \\ -\sin u \cos \Omega - \cos i \cos u \sin \Omega & -\sin u \sin \Omega + \cos i \cos u \cos \Omega & \sin i \cos u \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{bmatrix}. \quad (4.1.10)$$

С помощью матрицы  $M$  любой вектор  $\mathbf{a}$ , заданный в экваториальной (эклиптической) системе координат  $Fxyz$  своими составляющими  $x, y, z$ , можно перевести в орбитальную систему координат  $FXYZ$ , т. е. найти его проекции  $X, Y, Z$ :

$$\mathbf{a}_{\text{орб}} = M\mathbf{a}, \quad (4.1.11)$$

или

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (4.1.12)$$

Обратный переход осуществляется с помощью обратной матрицы  $M^{-1}$ , которая получается транспонированием матрицы  $M$  (так как матрица  $M$  — ортогональная):

$$\mathbf{a}_e = M^{-1}\mathbf{a}_{\text{орб}}. \quad (4.1.13)$$

Вектор  $\mathbf{r}^0$  имеет в орбитальной системе координат составляющие 1, 0, 0. Обозначим его составляющие в системе координат  $Fxyz$  через  $r_x^0, r_y^0, r_z^0$ , тогда

$$\begin{bmatrix} r_x^0 \\ r_y^0 \\ r_z^0 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.14)$$

или

$$\begin{aligned} r_x^0 &= \cos u \cos \Omega - \cos i \sin u \sin \Omega, \\ r_y^0 &= \cos u \sin \Omega + \cos i \sin u \cos \Omega, \\ r_z^0 &= \sin i \sin u. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Аналогично для вектора  $\mathbf{n}^0$ , который имеет в орбитальной системе координат составляющие 0, 1, 0, найдем составляющие в

системе координат  $Fxyz$ :

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.16)$$

или

$$\begin{aligned} n_x &= -\sin u \cos \Omega - \cos i \cos u \sin \Omega, \\ n_y &= -\sin u \sin \Omega + \cos i \cos u \cos \Omega, \\ n_z &= \sin i \cos u. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Итак, составляющие векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{V}$  в экваториальной (эклиптической) системе координат  $Fxyz$  имеют вид

$$x = rr_x^0, \quad y = rr_y^0, \quad z = rr_z^0, \quad (4.1.18)$$

$$V_x = V_r r_x^0 + V_n n_x, \quad V_y = V_r r_y^0 + V_n n_y, \quad V_z = V_r r_z^0 + V_n n_z, \quad (4.1.19)$$

где

$$r = |\mathbf{r}| \quad (4.1.20)$$

— величина текущего радиуса-вектора спутника.

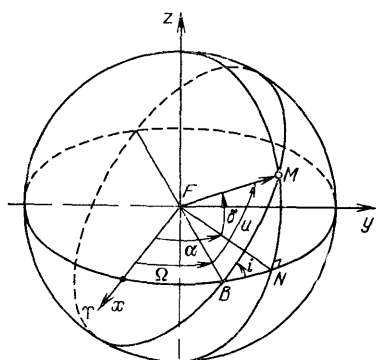


Рис. 4.2. Определение склонения  $\delta$  и прямого восхождения  $\alpha$

Для описания положения спутника в экваториальной геоцентрической системе координат можно использовать сферические координаты  $r, \delta, \alpha$ . Радиус  $r$  определяет расстояние  $FM$  от центра масс Земли до спутника (рис. 4.2). Склонение  $\delta$  — это угол между радиусом-вектором  $\vec{FM}$  и плоскостью экватора. К северу от экватора  $\delta > 0$ , а к югу  $\delta < 0$ . Из прямоугольного сферического треугольника  $BNM$  (рис. 4.2) видно, что

$$\delta = \arcsin(\sin i \sin u). \quad (4.1.21)$$

Склонение может изменяться в диапазоне

$$\begin{aligned} -i &\leq \delta \leq i && \text{при } 0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}, \\ -(\pi - i) &\leq \delta \leq \pi - i && \text{при } \frac{\pi}{2} \leq i \leq \pi. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Прямое восхождение  $\alpha$  — это угол между направлением на точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$  (т. е. осью  $Fx$  экваториальной системы координат) и проекцией радиуса-вектора  $\mathbf{FM}$  на экваториальную плоскость. С помощью треугольника  $BNM$  найдем

$$\alpha = \Omega + \arctg(\cos i \operatorname{tg} u). \quad (4.1.23)$$

Прямое восхождение изменяется в диапазоне

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi. \quad (4.1.24)$$

Используя углы  $\alpha$  и  $\delta$ , запишем составляющие вектора  $\mathbf{r}^0$  в системе координат  $Fxyz$ :

$$r_x^0 = \cos \alpha \cos \delta, \quad r_y^0 = \sin \alpha \cos \delta, \quad r_z^0 = \sin \delta. \quad (4.1.25)$$

### § 4.2. Определение орбиты по двум положениям и времени

Рассмотрим задачу определения орбиты спутника по двум его положениям относительно притягивающего центра, которые задаются радиусами-векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  соответственно в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ). Тип орбиты (эллиптическая, параболическая, гиперболическая) и направление движения спутника будем считать известными, что справедливо для большинства такого рода задач небесной механики. Требуется вычислить основные элементы орбиты (4.1.4), т. е. найти  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $e$ ,  $p$ ,  $t_{\text{п}}$ .

Пусть векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  не лежат на одной прямой. Тогда задание двух векторов эквивалентно заданию шести составляющих этих векторов, зависящих от шести элементов орбиты. Установим связь векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  с элементами орбиты. Предположим, что составляющие векторов  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  заданы в геоцентрической системе координат (рис. 4.3). Найдем единичный вектор  $\mathbf{m}^0$ , перпендикулярный плоскости орбиты,

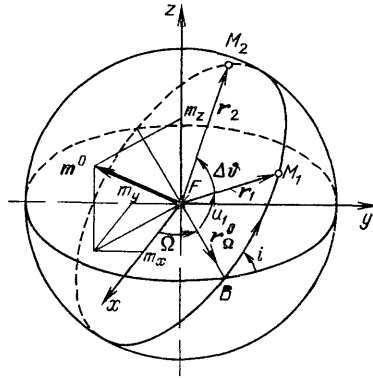


Рис. 4.3. Определение элементов орбиты по двум положениям спутника

$$\mathbf{m}^0 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (4.2.1)$$

Его составляющие в экваториальной системе координат:

$$m_x = \frac{1}{m} (y_1 z_2 - y_2 z_1), \quad m_y = \frac{1}{m} (x_2 z_1 - x_1 z_2), \quad (4.2.2)$$

$$m_z = \frac{1}{m} (x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

где

$$m = \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_2 z_1 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}. \quad (4.2.3)$$

Пусть  $\mathbf{s}^0$  — единичный вектор внешней нормали к плоскости движения (при наблюдении с конца вектора  $\mathbf{s}^0$  движение спутника

направлено против часовой стрелки), тогда можно записать

$$\mathbf{c}^0 = \pm \mathbf{m}^0 \operatorname{sign} m_z. \quad (4.2.4)$$

Знак «+» выбирается в том случае, когда при наблюдении с конца оси координат  $Fz$  движение спутника направлено против часовой стрелки, а знак «-» отвечает движению по часовой стрелке.

Если плоскость орбиты совпадает с плоскостью меридиана ( $m_z = 0$ ), то

$$\mathbf{c}^0 = \pm \mathbf{m}^0, \quad (4.2.5)$$

причем знак выбирается так, чтобы при наблюдении с конца вектора  $\mathbf{c}^0$ , расположенного в плоскости экватора, движение спутника было направлено против часовой стрелки.

Найдем теперь наклонение  $i$  и долготу восходящего узла  $\Omega$ . Соотношения (4.2.4) и (4.2.5) задают составляющие вектора  $\mathbf{c}^0 = (c_x, c_y, c_z)$  в экваториальной системе координат  $Fxyz$ . С другой стороны, в орбитальной системе координат  $FXYZ$   $\mathbf{c}^0 = (0, 0, 1)$ . Учитывая преобразование (4.1.14) и матрицу (4.1.10), получим

$$c_x = \sin i \sin \Omega, \quad c_y = -\sin i \cos \Omega, \quad c_z = \cos i. \quad (4.2.6)$$

Последнее равенство (4.2.6) позволяет однозначно определить наклонение орбиты

$$i = \arccos c_z, \quad (4.2.7)$$

так как  $0 \leq i \leq \pi$ . Чтобы вычислить долготу восходящего узла, воспользуемся двумя первыми равенствами (4.2.6):

$$\sin \Omega = \frac{c_x}{\sin i}, \quad \cos \Omega = -\frac{c_y}{\sin i}. \quad (4.2.8)$$

Углы  $\Omega$  и  $i$  полностью определяют плоскость движения спутника.

Перейдем теперь к вычислению элементов орбиты  $e$ ,  $p$ ,  $\omega$ , которые задают ее геометрию и положение в плоскости движения. Предварительно найдем разность истинных аномалий двух заданных положений спутника:

$$\cos \Delta\vartheta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}, \quad (4.2.9)$$

$$\sin \Delta\vartheta = \mathbf{c}^0 \cdot \mathbf{m}^0 \frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{r_1 r_2}. \quad (4.2.10)$$

Действительная разность истинных аномалий может отличаться от вычисленной по формулам (4.2.9), (4.2.10) на  $2\pi k$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$  — число полных оборотов спутника за время движения от первого положения до второго ( $k > 0$  возможно только для эллиптической орбиты).

При расчете элементов орбиты вместо эксцентриситета  $e$  удобнее вычислять большую полуось  $a$ , которая связана с эксцентриси-



тетом условием (2.4.7)

$$a = \frac{P}{1 - e^2}$$

в случае эллиптической орбиты и условием (2.4.23)

$$a = \frac{P}{e^2 - 1}$$

в случае гиперболической орбиты. Отсюда для эллиптической орбиты

$$e = \sqrt{1 - \frac{P}{a}}, \quad (4.2.11)$$

а для гиперболической

$$e = \sqrt{1 + \frac{P}{a}}. \quad (4.2.12)$$

Покажем, как по двум фиксированным положениям спутника в известные моменты времени определить элементы орбиты в плоскости движения [58, 59, 62]. При этом отдельно рассмотрим случаи эллиптической, гиперболической и параболической орбит.

#### 4.2.1. Эллиптическая орбита.

Если величина большой полуоси  $a$  известна, то эллиптическая орбита полностью определяется положениями своих фокусов. Один из фокусов ( $F_1$ ) всегда совпадает с притягивающим центром. С помощью простых геометрических построений найдем положение второго фокуса.

Вычислим расстояния точек  $M_1$  и  $M_2$  до второго фокуса  $F_2$

$$r'_1 = 2a - r_1, \quad r'_2 = 2a - r_2 \quad (4.2.13)$$

и построим окружности радиу-

сов  $r'_1, r'_2$  с центрами соответственно в точках  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 4.4). Точки пересечения окружностей определяют возможные положения второго фокуса  $F'_2$  и  $F''_2$ . Условие существования точек пересечения

$$r'_1 + r'_2 \geq s,$$

или с учетом (4.2.13)

$$a \geq \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + s), \quad (4.2.14)$$

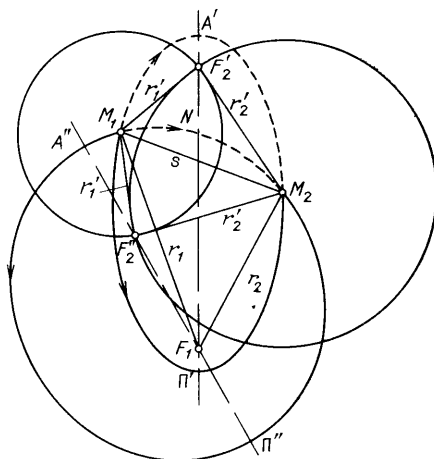


Рис. 4.4. Построение эллиптических орбит, проходящих через две точки

где

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \Delta\phi} \quad (4.2.15)$$

— длина отрезка, соединяющего точки  $M_1$  и  $M_2$ .

Если

$$a = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + s), \quad (4.2.16)$$

то существует одна общая точка  $F'_2 = F''_2$  (окружности касаются).  
При

$$a < \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + s) \quad (4.2.17)$$

решение не существует в рассматриваемом классе эллиптических орбит с фиксированной величиной большой полуоси.

Пусть выполнено условие (4.2.14); тогда переход из точки  $M_1$  в точку  $M_2$  возможен по двум эллиптическим траекториям при движении по часовой стрелке (показаны пунктиром на рис. 4.4) и по двум эллиптическим траекториям при движении против часовой стрелки (показаны сплошными линиями на рис. 4.4). Если второй фокус оказывается вне эллиптического сегмента, ограниченного прямой  $M_1M_2$  и траекторией перелета, то такую траекторию будем называть *эллиптической орбитой первого рода*. Это траектории  $M_1\Pi'M_2$  и  $M_1NM_2$ . Если второй фокус оказывается внутри указанного сегмента, то такую траекторию будем называть *эллиптической орбитой второго рода*. Условию (4.2.16) отвечает *границная эллиптическая орбита*, когда второй фокус оказывается на прямой  $M_1M_2$ .

Покажем способ вычисления большой полуоси в рассматриваемой постановке задачи. Связь большой полуоси  $a$  с заданными величинами радиусов  $r_1, r_2$ , угла между ними  $\Delta\phi$  и временем перелета  $\Delta t = t_2 - t_1$  устанавливается *уравнением Ламберта*. Для получения этого уравнения предварительно вычислим площадь эллиптического сектора, ограниченного радиусами  $r_1, r_2$  и стягивающей их дугой эллипса. Удвоенная площадь такого сектора определяется интегралом

$$\Phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 d\phi, \quad (4.2.18)$$

где  $\phi_1$  и  $\phi_2$  — истинные аномалии точек  $M_1$  и  $M_2$ .

Запишем уравнение орбиты через эксцентрическую аномалию  $E$ . С этой целью подставим соотношение (2.5.4) для  $\cos \phi$  в уравнение орбиты (2.2.31). Тогда получим

$$r = \frac{p}{1 + e \frac{\cos F - e}{1 - e \cos E}} = \frac{p(1 - e \cos E)}{1 - e^2},$$

или с учетом (2.4.7)

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (4.2.19)$$

Производные истинной и эксцентрической аномалий связаны соотношением (2.5.7)

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} dE.$$

Переходя теперь в (4.2.18) к эксцентрической аномалии, вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \Phi &= a^2 \sqrt{1-e^2} \int_{E_1}^{E_2} (1 - e \cos E) dE = \\ &= a^2 \sqrt{1-e^2} [E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1)] = \\ &= a^2 \sqrt{1-e^2} \left( E_2 - E_1 - 2e \sin \frac{E_2 - E_1}{2} \cos \frac{E_2 + E_1}{2} \right). \end{aligned}$$

Положим

$$E_2 - E_1 = 2d, \quad e \cos \frac{E_2 + E_1}{2} = \cos l \quad (0 < l < \pi), \quad (4.2.20)$$

тогда

$$\Phi = 2a^2 \sqrt{1-e^2} (d - \sin d \cos l). \quad (4.2.21)$$

С помощью уравнения орбиты (4.2.19) установим связь  $d$ ,  $l$  и  $r_1$ ,  $r_2$ :

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1), \quad r_2 = a(1 - e \cos E_2);$$

отсюда

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 2a - ae(\cos E_1 + \cos E_2) = \\ &= 2a - 2ae \cos \frac{E_1 + E_2}{2} \cos \frac{E_1 - E_2}{2} = 2a - 2a \cos l \cos d. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Для определения длины хорды  $s$ , соединяющей точки  $M_1$  и  $M_2$ , рассмотрим декартову прямоугольную систему координат  $F_1 \xi \eta$  (см. рис. 2.11). В этой системе координаты произвольной точки эллиптической орбиты задаются соотношениями

$$\xi = a \cos E - ae, \quad \eta = b \sin E = a \sqrt{1-e^2} \sin E; \quad (4.2.23)$$

следовательно, длина хорды

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2} = \\ &= a \sqrt{(\cos E_2 - \cos E_1)^2 + (1-e^2)(\sin E_2 - \sin E_1)^2} = \\ &= 2a \sqrt{\sin^2 \frac{E_2 + E_1}{2} \sin^2 \frac{E_2 - E_1}{2} + (1-e^2) \cos^2 \frac{E_2 + E_1}{2} \sin^2 \frac{E_2 - E_1}{2}} = \\ &= 2a \sin d \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{E_2 + E_1}{2}} = 2a \sin d \sin l \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Найдем далее с учетом (4.2.22) и (4.2.24)

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + s &= 2a[1 - \cos(d + l)], \\ r_1 + r_2 - s &= 2a[1 - \cos(d - l)]. \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

Обозначим

$$\varepsilon = d + l, \quad \delta = l - d; \quad (4.2.26)$$

тогда формулы (4.2.25) можно привести к виду

$$\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}, \quad \sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a}. \quad (4.2.27)$$

Согласно (4.2.26) имеем

$$d = \frac{\varepsilon - \delta}{2}, \quad l = \frac{\varepsilon + \delta}{2} \quad (4.2.28)$$

и после подстановки в (4.2.21) найдем

$$\begin{aligned} \Phi &= 2a \sqrt{1 - e^2} \left( \frac{\varepsilon - \delta}{2} - \sin \frac{\varepsilon - \delta}{2} \cos \frac{\varepsilon + \delta}{2} \right) = \\ &= a \sqrt{1 - e^2} [\varepsilon - \sin \varepsilon - (\delta - \sin \delta)], \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

где углы  $\varepsilon$  и  $\delta$  определяются с помощью соотношений (4.2.27). Для однозначного вычисления углов  $\varepsilon$  и  $\delta$  необходимо иметь дополнительную информацию относительно эллиптического сектора  $M_1 F M_2$ . Чтобы упростить дальнейший анализ, ограничимся случаем

$$\Delta\vartheta < 2\pi \quad (\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1), \quad (4.2.30)$$

который имеет наибольшую практическую значимость в задачах механики космического полета. В указанном случае  $2d = E_2 - E_1 < 2\pi$  и

$$0 < d < \pi. \quad (4.2.31)$$

Согласно (4.2.20)  $0 < l < \pi$ ; отсюда с учетом (4.2.26)

$$0 < \varepsilon < 2\pi \quad (4.2.32)$$

и

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad (4.2.33)$$

для всех взаимных расположений точек  $M_1$  и  $M_2$ .

Определим теперь знак  $\sin(\delta/2)$ . С этой целью проведем некоторые предварительные преобразования. Умножив формулу (2.5.4) на (4.2.19), получим

$$r \cos \vartheta = a(\cos E - e). \quad (4.2.34)$$

В результате вычитания этого соотношения из (4.2.19) и сложения его с (4.2.19) имеем

$$r(1 - \cos \vartheta) = a(1 + e)(1 - \cos E),$$

$$r(1 + \cos \vartheta) = a(1 - e)(1 + \cos E),$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}\sqrt{r} \sin \frac{\vartheta}{2} &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2}, \\ \sqrt{r} \cos \frac{\vartheta}{2} &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2}.\end{aligned}\quad (4.2.35)$$

Используя (4.2.35), вычислим

$$\begin{aligned}\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\Delta\vartheta}{2} &= \sqrt{r_1 r_2} \left( \cos \frac{\vartheta_1}{2} \cos \frac{\vartheta_2}{2} + \sin \frac{\vartheta_1}{2} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \right) = \\ &= a(1-e) \cos \frac{E_1}{2} \cos \frac{E_2}{2} + a(1+e) \sin \frac{E_1}{2} \sin \frac{E_2}{2} = \\ &= a \left[ \cos \frac{E_1}{2} \cos \frac{E_2}{2} + \sin \frac{E_1}{2} \sin \frac{E_2}{2} - e \left( \cos \frac{E_1}{2} \cos \frac{E_2}{2} - \sin \frac{E_1}{2} \sin \frac{E_2}{2} \right) \right] = \\ &= a \left( \cos \frac{E_2 - E_1}{2} - e \cos \frac{E_1 + E_2}{2} \right),\end{aligned}$$

или, принимая во внимание (4.2.20),

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\Delta\vartheta}{2} = a(\cos d - \cos l). \quad (4.2.36)$$

Подставим сюда  $d$  и  $l$  согласно (4.2.28) и окончательно получим

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\Delta\vartheta}{2} = a \left( \cos \frac{\varepsilon - \delta}{2} - \cos \frac{\varepsilon + \delta}{2} \right),$$

ИЛИ

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\Delta\vartheta}{2} = 2a \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\delta}{2}. \quad (4.2.37)$$

Согласно (4.2.33)  $\sin \frac{\varepsilon}{2} > 0$ , поэтому

$$\text{sign} \sin \frac{\delta}{2} = \text{sign} \cos \frac{\Delta\vartheta}{2}. \quad (4.2.38)$$

В зависимости от величины угла  $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$  между векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  возможны следующие случаи:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\delta}{2} &> 0, \text{ если } 0 < \Delta\vartheta < \pi, \\ \sin \frac{\delta}{2} &< 0, \text{ если } \pi < \Delta\vartheta < 2\pi.\end{aligned}\quad (4.2.39)$$

Определим теперь знаки  $\cos(\varepsilon/2)$  и  $\cos(\delta/2)$ . Предположим, что расстояние  $M_1 M_2$  бесконечно мало; тогда

$$d = \frac{E_2 - E_1}{2} \approx 0, \quad \varepsilon = \delta = l.$$

Но  $0 < l < \pi$ ; отсюда  $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{2}$  и

$$\cos \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0.$$

Заметим, что  $\cos(\varepsilon/2) = 0$ , если  $\sin^2(\varepsilon/2) = 1$ . В последнем случае согласно (4.2.27)

$$r_1 + r_2 + s = 4a,$$

откуда

$$s = (2a - r_1) + (2a - r_2),$$

или

$$s = r'_1 + r'_2,$$

т. е. второй фокус эллипса  $F_2$  находится на хорде, соединяющей точки  $M_1$  и  $M_2$ .

Рассмотрим изменение знака  $\cos(\varepsilon/2)$  в зависимости от углового расстояния между  $M_1$  и  $M_2$ . При малом угловом расстоянии  $\cos(\varepsilon/2) > 0$ . По мере увеличения углового расстояния наступает момент, когда хорда проходит через второй фокус эллипса. Для такого положения точек  $M_1$  и  $M_2$  имеем  $\cos(\varepsilon/2) = 0$ . При дальнейшем увеличении углового расстояния  $\cos(\varepsilon/2) < 0$ . Если в процессе увеличения углового расстояния хорда не проходит через второй фокус эллипса  $F_2$ , то  $\cos(\varepsilon/2) > 0$  при любом взаимном положении точек  $M_1$  и  $M_2$ .

Теперь определим условия, при которых  $\cos(\delta/2) = 0$ . Если это равенство выполнено, то  $\sin^2(\delta/2) = 1$ , и согласно (4.2.27)

$$r_1 + r_2 - s = 4a,$$

или

$$-s = r'_1 + r'_2,$$

что невозможно в силу положительности  $s, r'_1, r'_2$ . Следовательно,

$$\cos \frac{\delta}{2} > 0 \quad (4.2.40)$$

при любом взаимном расположении точек  $M_1$  и  $M_2$ .

Теперь можно классифицировать все случаи определения удвоенной площади эллиптического сектора  $\Phi$  в зависимости от расположения точек  $M_1$  и  $M_2$ . С этой целью введем углы

$$0 < \varepsilon_0 < \pi, \quad 0 < \delta_0 < \pi, \quad (4.2.41)$$

определяемые равенствами

$$\sin \frac{\varepsilon_0}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}}, \quad \sin \frac{\delta_0}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}}, \quad (4.2.42)$$

и рассмотрим три возможных случая.

*Эллиптический сектор первого рода.* Пусть эллиптический сегмент, ограниченный хордой  $M_1M_2$  и траекторией движения спутника от  $M_1$  к  $M_2$ , не содержит фокусов  $F_1$  и  $F_2$ . Этот сегмент выделен на рис. 4.5, а штриховкой. В указанном случае  $0 < \Delta\theta < \pi$  и удвоенная площадь эллиптического сектора будет вычисляться по формуле вида (4.2.29):

$$\Phi = a^2 \sqrt{1 - e^2} [\varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 - (\delta_0 - \sin \delta_0)]. \quad (4.2.43)$$

Пусть теперь сегмент содержит фокус  $F_1$ , но не содержит фокуса  $F_2$  (рис. 4.5, б). Тогда  $\pi < \Delta\vartheta < 2\pi$  и с учетом условий (4.2.33), (4.2.39) — (4.2.41) получим

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \sin \frac{\delta}{2} < 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0.$$

Следовательно,

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad \delta = -\delta_0$$

и

$$\Phi = a^2 \sqrt{1 - e^2} [\varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 + (\delta_0 - \sin \delta_0)]. \quad (4.2.44)$$

Эллиптический сектор второго рода. Предположим, что сегмент

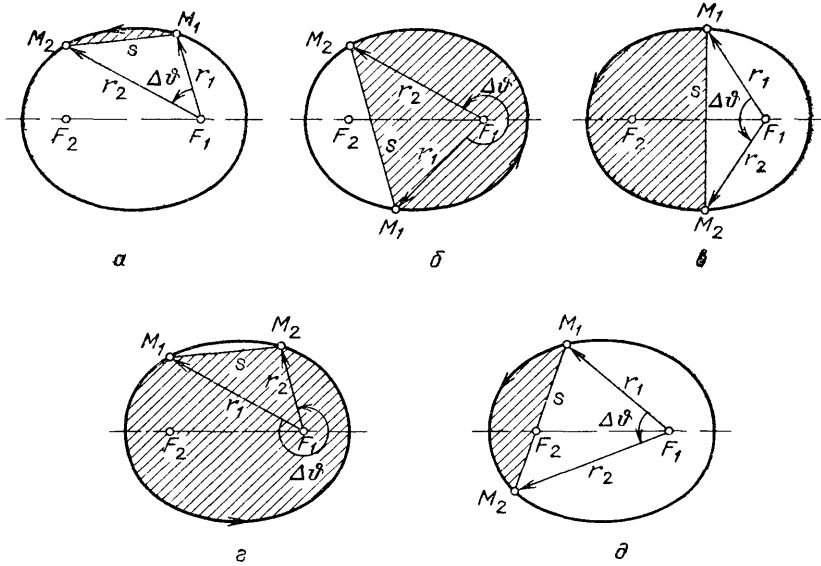


Рис 4.5 Классификация возможных случаев в задаче Ламберта

содержит фокус  $F_2$ , но не содержит фокуса  $F_1$  (рис. 4.5, в). В этом случае

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} < 0, \quad \sin \frac{\delta}{2} > 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0$$

и

$$\frac{\varepsilon}{2} = \pi - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \frac{\delta}{2} = \frac{\delta_0}{2},$$

откуда

$$\Phi = a^2 \sqrt{1 - e^2} [2\pi - \varepsilon_0 + \sin \varepsilon_0 - (\delta_0 - \sin \delta_0)]. \quad (4.2.45)$$

Если сегмент содержит оба фокуса (рис. 4.5, г), то  $\pi < \Delta\vartheta < 2\pi$  и справедливы соотношения

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} < 0, \quad \sin \frac{\delta}{2} < 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\varepsilon}{2} = \pi - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \frac{\delta}{2} = -\frac{\delta_0}{2}$$

и

$$\Phi = a^2 \sqrt{1 - e^2} [2\pi - \varepsilon_0 + \sin \varepsilon_0 + (\delta_0 - \sin \delta_0)]. \quad (4.2.46)$$

Формулы (4.2.43)–(4.2.46) можно объединить в две, для эллиптических секторов первого рода

$$\Phi_1 = a^2 \sqrt{1 - e^2} [\varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 \mp (\delta_0 - \sin \delta_0)] \quad (4.2.47)$$

и для эллиптических секторов второго рода

$$\Phi_2 = a^2 \sqrt{1 - e^2} [2\pi - (\varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0) \mp (\delta_0 - \sin \delta_0)]. \quad (4.2.48)$$

Знак «-» здесь соответствует условию  $0 < \Delta\theta < 2\pi$ , а знак «+» берется при  $\pi < \Delta\theta < 2\pi$ .

*Граничный эллиптический сектор.* Пусть выполнено условие  $r_1 + r_2 + s = 4a$  (рис. 4.5,  $\theta$ ), тогда

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = 1, \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} = 0; \quad \sin \frac{\delta}{2} \begin{cases} > 0 & \text{при } 0 < \Delta\theta < \pi, \\ < 0 & \text{при } \pi < \Delta\theta < 2\pi, \end{cases} \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0$$

и

$$\varepsilon = \pi, \quad \delta = \begin{cases} \delta_0 & \text{при } 0 < \Delta\theta < \pi, \\ -\delta_0 & \text{при } \pi < \Delta\theta < 2\pi. \end{cases}$$

В этом случае

$$\Phi_{\text{гп}} = a^2 \sqrt{1 - e^2} [\pi \mp (\delta_0 - \sin \delta_0)], \quad (4.2.49)$$

а знак выбирается по величине угла  $\Delta\theta$ , как и прежде.

Используем формулы (4.2.47)–(4.2.49), определяющие удвоенную площадь эллиптического сектора, для получения уравнения Ламберта. Согласно (2.2.29) удвоенная секториальная скорость

$$C = \sqrt{\mu p}, \quad (4.2.50)$$

и на основании второго закона Кеплера можно записать уравнение Ламберта

$$\Delta t = \frac{\Phi}{\sqrt{\mu p}}, \quad (4.2.51)$$

где  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Это уравнение устанавливает связь между величинами  $r_1 + r_2$ ,  $s$ ,  $\Delta t$  и  $a$ , так как сомножитель  $\sqrt{a(1 - e^2)} = \sqrt{p}$ , входящий в формулу для  $\Phi$ , сокращается с величиной  $\sqrt{p}$  в знаменателе (4.2.51). Величину хорды  $s$  можно вычислить по формуле

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (4.2.52)$$

через известные составляющие векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  в экваториальной системе координат.



По существу (4.2.51) является трансцендентным уравнением относительно большой полуоси  $a$ , которое при  $0 < \Delta\vartheta < 2\pi$  имеет единственное решение. Можно показать, что при  $\Delta\vartheta > 2\pi$  в зависимости от величины  $\Delta t$  существуют одно или два решения. В случае одного решения имеем эллиптическую орбиту первого рода. При наличии двух решений одно из них всегда определяет эллиптическую орбиту первого рода, а второе — эллиптическую орбиту второго рода, либо же граничную эллиптическую орбиту [62].

Будем полагать теперь, что величина большой полуоси  $a$  найдена из решения уравнения Ламберта. Вместе с ней определяются углы  $\varepsilon$  и  $\delta$ . Обсудим последовательность вычислений параметра орбиты  $p$ , эксцентриситета  $e$  и аргумента перицентра  $\omega$ . Аргумент широты  $u_1 = \omega + \vartheta_1$ , используемый при вычислении  $\omega$ , можно найти из скалярного произведения единичного вектора  $\mathbf{r}_1^0 = (r_{1x}^0, r_{1y}^0, r_{1z}^0)$  и единичного вектора  $\mathbf{r}_2^0 = (\cos \Omega, \sin \Omega, 0)$ , направленного из начала экваториальной системы координат в восходящий узел орбиты:

$$u_1 = \arccos(r_{1x}^0 \cos \Omega + r_{1y}^0 \sin \Omega). \quad (4.2.53)$$

Чтобы однозначно определить угол  $u_1$ , воспользуемся условием

$$\text{sign} \sin u_1 = \text{sign} r_{1z}^0, \quad (4.2.54)$$

которое следует из последнего соотношения (4.1.15). Для вычисления аргумента перицентра  $\omega$  необходимо предварительно найти истинную аномалию  $\vartheta_1$ . С этой целью вычислим с учетом уравнения орбиты (4.2.19)

$$r_1 + r_2 = 2a \left( 1 - e \cos \frac{E_1 + E_2}{2} \cos \frac{E_2 - E_1}{2} \right).$$

Отсюда

$$e \cos \frac{E_1 + E_2}{2} = \left( 1 - \frac{r_1 + r_2}{2a} \right) \sec \frac{E_2 - E_1}{2}. \quad (4.2.55)$$

Аналогично найдем

$$r_2 - r_1 = 2ae \sin \frac{E_1 + E_2}{2} \sin \frac{E_2 - E_1}{2}$$

и

$$e \sin \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{r_2 - r_1}{2a} \text{csec} \frac{E_2 - E_1}{2}. \quad (4.2.56)$$

Далее, используя формулы (4.2.20) и (4.2.28), запишем

$$\frac{E_2 - E_1}{2} = d = \frac{\varepsilon - \delta}{2}. \quad (4.2.57)$$

Следовательно, правые части (4.2.55) и (4.2.56) выражены через известные величины, и эти соотношения можно рассматривать в ка-

честве уравнений относительно  $e$  и  $(E_1 + E_2)/2$ . Разделив (4.2.56) на (4.2.55), получим уравнение для определения  $(E_1 + E_2)/2$ :

$$\operatorname{tg} \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{r_2 - r_1}{2a - r_1 - r_2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon - \delta}{2}. \quad (4.2.58)$$

При вычислении угла  $(E_1 + E_2)/2$  следует учитывать знаки

$$\sin \frac{E_1 + E_2}{2} \text{ и } \cos \frac{E_1 + E_2}{2}$$

согласно (4.2.55) и (4.2.56). Зная теперь величину  $(E_1 + E_2)/2$ , можно по формуле (4.2.55) или (4.2.56) вычислить эксцентриситет орбиты  $e$ . Затем из системы уравнений

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= \varepsilon - \delta, \\ E_1 + E_2 &= 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{r_2 - r_1}{2a - r_1 - r_2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon - \delta}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

определяются эксцентрические аномалии  $E_1, E_2$ , а по формуле (2.5.6) — истинные аномалии  $\vartheta_1, \vartheta_2$ . По величине  $\vartheta_1$  можно найти аргумент перицентра:

$$\omega = u_1 - \vartheta_1. \quad (4.2.60)$$

Для вычисления параметра орбиты  $p$  по известным величинам большой полуоси  $a$  и эксцентриситета  $e$  орбиты имеем простую формулу

$$p = a(1 - e^2). \quad (4.2.61)$$

Наконец, определим время пролета перицентра с помощью уравнения Кеплера:

$$t_{\pi} = t_1 - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E_1 - e \sin E_1). \quad (4.2.62)$$

Этим завершается вычисление элементов эллиптической орбиты  $\Omega, i, \omega, p, e, t_{\pi}$  по двум заданным положениям спутника в известные моменты времени.

**4.2.2. Гиперболическая орбита.** Предположим, что заданы два положения спутника  $M_1$  и  $M_2$  на гиперболической орбите с величиной действительной полуоси  $a$ . Найдем величины расстояния этих точек до второго фокуса  $F_2$ , т. е.  $r'_1$  и  $r'_2$ , по известным величинам  $r_1$  и  $r_2$  расстояния до притягивающего центра  $F_1$ :

$$r'_1 = 2a + r_1, \quad r'_2 = 2a + r_2. \quad (4.2.63)$$

Построим в центрах  $M_1$  и  $M_2$  окружности радиусом  $r'_1$  и  $r'_2$

(рис. 4.6). Эти окружности всегда пересекаются в двух точках, поскольку

$$r'_1 + r'_2 = 4a + r_1 + r_2 > s.$$

Действительно, из треугольника  $M_1F_1M_2$  следует, что  $r_1 + r_2 > s$ ; тем более,  $4a + r_1 + r_2 > s$ , так как  $a > 0$ . Точки пересечения окружностей ( $F'_2$  и  $F''_2$ ) определяют возможные положения второго фокуса. Выбор  $F'_2$  или  $F''_2$  подчинен требованию расположения  $F_1$  и второго фокуса по разные стороны от траектории движения: при  $\Delta\theta < \pi$  фокусы  $F_1$  и  $F'_2$  расположены по разные стороны от прямой  $M_1M_2$ , а при  $\Delta\theta > \pi$  фокусы  $F_1$  и  $F''_2$  расположены по одну сторону от прямой  $M_1M_2$ . Следовательно, для гиперболической орбиты рассматриваемая задача имеет единственное решение в случае задания угловой дальности  $\Delta\theta$  или направления движения.

Из-за незамкнутости орбиты угол  $\Delta\theta$  между точками  $M_1$  и  $M_2$  удовлетворяет условию

$$0 < \Delta\theta < 2\pi.$$

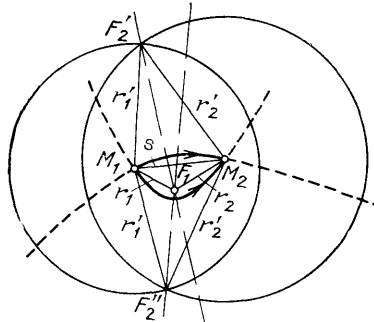


Рис 4.6 Построение гиперболических орбит, проходящих через две точки

Кроме того, ни при каких положениях точек  $M_1$  и  $M_2$  гиперболический сектор, выделяемый радиусами  $r_1, r_2$  и дугой траектории  $M_1M_2$ , не будет содержать второго (непритягивающего) фокуса  $F_2$ . Поэтому в случае гиперболической орбиты может иметь место только сектор первого рода, когда гиперболический сегмент, ограниченный дугой траектории между точками  $M_1$  и  $M_2$ , а также хордой  $M_1M_2$ , не содержит второго фокуса.

Пусть  $H_1$  и  $H_2$  — значения аргумента  $H$  в точках  $M_1$  и  $M_2$  гиперболической орбиты. Найдем площадь гиперболического сектора  $M_1F_1M_2$ . Согласно уравнениям (2.5.20), (4.2.50) и (4.2.51) удвоенная площадь гиперболического сектора

$$\begin{aligned} \Phi_r &= a \sqrt{ap} [e(\operatorname{sh} H_2 - \operatorname{sh} H_1) - (H_2 - H_1)] = \\ &= a \sqrt{ap} \left[ 2e \operatorname{sh} \frac{H_2 - H_1}{2} \operatorname{ch} \frac{H_2 + H_1}{2} - (H_2 - H_1) \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$d = \frac{H_2 - H_1}{2}, \quad \operatorname{ch} l = e \operatorname{ch} \frac{H_1 + H_2}{2} \quad (l > 0) \quad (4.2.64)$$

и

$$\varepsilon = d + l, \quad \delta = l - d, \quad (4.2.65)$$

откуда

$$d = \frac{\varepsilon - \delta}{2}, \quad l = \frac{\varepsilon + \delta}{2}. \quad (4.2.66)$$

Преобразуем теперь с учетом введенных обозначений формулу для удвоенной площади гиперболического сектора:

$$\begin{aligned} \Phi_r &= 2a \sqrt{ap} (\operatorname{sh} d \operatorname{ch} l - d) = \\ &= 2a \sqrt{ap} \left\{ \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(d+l) - \operatorname{sh}(d-l)] - d \right\} = a \sqrt{ap} [\operatorname{sh} \varepsilon - \varepsilon - (\operatorname{sh} \delta - \delta)]. \end{aligned} \quad (4.2.67)$$

Выразим входящие в (4.2.67) величины  $\varepsilon$  и  $\delta$  через  $r_1$ ,  $r_2$  и  $\Delta\vartheta$ . Предварительно из уравнения гиперболической орбиты (2.5.15) найдем

$$r_1 = a(e \operatorname{ch} H_1 - 1), \quad r_2 = a(e \operatorname{ch} H_2 - 1), \quad (4.2.68)$$

тогда

$$r_1 + r_2 = 2a \left( e \operatorname{ch} \frac{H_1 + H_2}{2} \operatorname{ch} \frac{H_2 - H_1}{2} - 1 \right),$$

или с учетом (4.2.64)

$$r_1 + r_2 = 2a(\operatorname{ch} d \operatorname{ch} l - 1). \quad (4.2.69)$$

Затем установим связь между радиусами  $r_1$ ,  $r_2$ , величиной угла  $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$  и хордой  $s$ . Но сначала получим некоторые вспомогательные соотношения. Согласно первому уравнению (2.5.14)

$$r \cos \vartheta = a(e - \operatorname{ch} H),$$

отсюда с учетом уравнения орбиты (2.5.15) найдем

$$r(1 - \cos \vartheta) = a(e \operatorname{ch} H - 1 - e + \operatorname{ch} H) = a(e + 1)(\operatorname{ch} H - 1), \quad (4.2.70)$$

$$r(1 + \cos \vartheta) = a(e \operatorname{ch} H - 1 + e - \operatorname{ch} H) = a(e - 1)(\operatorname{ch} H + 1).$$

Учитывая соотношения

$$\begin{aligned} 1 + \cos \vartheta &= 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}, & 1 - \cos \vartheta &= 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ \operatorname{ch} H + 1 &= 2 \operatorname{ch}^2 \frac{H}{2}, & \operatorname{ch} H - 1 &= 2 \operatorname{sh}^2 \frac{H}{2}, \end{aligned}$$

преобразуем формулы (4.2.70) к виду

$$\begin{aligned} \sqrt{r} \sin \frac{\vartheta}{2} &= \sqrt{a(e+1)} \operatorname{sh} \frac{H}{2}, \\ \sqrt{r} \cos \frac{\vartheta}{2} &= \sqrt{a(e-1)} \operatorname{ch} \frac{H}{2}, \end{aligned}$$

а затем вычислим

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1 r_2} \left( \cos \frac{\vartheta_1}{2} \cos \frac{\vartheta_2}{2} + \sin \frac{\vartheta_1}{2} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \right) = \\ = a(e-1) \operatorname{ch} \frac{H_1}{2} \operatorname{ch} \frac{H_2}{2} + a(e+1) \operatorname{sh} \frac{H_1}{2} \operatorname{sh} \frac{H_2}{2}, \end{aligned}$$

или

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\Delta\vartheta}{2} = ae \operatorname{ch} \frac{H_1 + H_2}{2} - a \operatorname{ch} \frac{H_2 - H_1}{2},$$

и окончательно, используя (4.2.64),

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\Delta\vartheta}{2} = a(\operatorname{ch} l - \operatorname{ch} d). \quad (4.2.71)$$

Из треугольника  $M_1 F_1 M_2$  имеем

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \Delta\vartheta = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 \cos^2 \frac{\Delta\vartheta}{2},$$

и после подстановки соотношений (4.2.69), (4.2.71) вычислим

$$\begin{aligned} s^2 &= 4a^2(\operatorname{ch} d \operatorname{ch} l - 1)^2 - 4a^2(\operatorname{ch} l - \operatorname{ch} d)^2 = \\ &= 4a^2(\operatorname{ch}^2 d - 1)(\operatorname{ch}^2 l - 1) = 4a^2 \operatorname{sh}^2 d \operatorname{sh}^2 l, \end{aligned}$$

откуда

$$s = 2a \operatorname{sh} d \operatorname{sh} l. \quad (4.2.72)$$

Теперь, используя (4.2.69) и (4.2.72), найдем

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + s &= 2a[\operatorname{ch}(d+l) - 1], \\ r_1 + r_2 - s &= 2a[\operatorname{ch}(d-l) - 1], \end{aligned} \quad (4.2.73)$$

а затем с учетом (4.2.65) получим

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}, \quad \operatorname{sh}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a}. \quad (4.2.74)$$

Для однозначного определения величин  $\varepsilon$  и  $\delta$  из соотношений (4.2.74) следует установить их знаки. Так как  $H_2 > H_1$ , то  $d = (H_2 - H_1)/2 > 0$ . Кроме того, по определению  $l > 0$ , поэтому всегда выполняется условие

$$\varepsilon > 0. \quad (4.2.75)$$

Преобразуем правую часть формулы (4.2.71) с учетом (4.2.65)

$$a(\operatorname{ch} l - \operatorname{ch} d) = 2a \operatorname{sh} \frac{l+d}{2} \operatorname{sh} \frac{l-d}{2} = 2a \operatorname{sh} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sh} \frac{\delta}{2},$$

тогда

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\Delta\vartheta}{2} = 2a \operatorname{sh} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sh} \frac{\delta}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{sign} \operatorname{sh} \frac{\delta}{2} = \operatorname{sign} \cos \frac{\Delta\vartheta}{2}, \quad (4.2.76)$$

так как  $\text{sh}(\varepsilon/2) > 0$ . Следовательно,

$$\delta \geq 0 \text{ при } \Delta\theta \leq \pi; \quad \delta < 0 \text{ при } \Delta\theta > \pi. \quad (4.2.77)$$

Вводя обозначения вида (4.2.42) теперь уже для гиперболических функций

$$\text{sh} \frac{\varepsilon_1}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}}, \quad \text{sh} \frac{\delta_1}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}} \quad (\varepsilon_1 \geq 0, \delta_1 \geq 0), \quad (4.2.78)$$

получим с учетом (4.2.67) общую формулу для удвоенной площади гиперболического сектора:

$$\Phi_r = a\sqrt{ap} [\text{sh} \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \mp (\text{sh} \delta_1 - \delta_1)]. \quad (4.2.79)$$

Здесь знак «-» отвечает случаю  $\Delta\theta < \pi$ , а знак «+» соответствует случаю  $\Delta\theta > \pi$ .

Подставляя удвоенную площадь гиперболического сектора в (4.2.51), получим уравнение для определения действительной полуоси  $a$  в случае гиперболической орбиты:

$$\Delta t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\text{sh} \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \mp (\text{sh} \delta_1 - \delta_1)], \quad (4.2.80)$$

где  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Теперь остается определить эксцентриситет  $e$ , параметр  $p$  и аргумент перицентра  $\omega$ . Предварительно найдем, используя (4.2.68),

$$\frac{r_2 - r_1}{2a} = e \text{sh} \frac{H_1 + H_2}{2} \text{sh} \frac{H_2 - H_1}{2},$$

$$\frac{r_1 + r_2}{2a} = e \text{ch} \frac{H_1 + H_2}{2} \text{ch} \frac{H_2 - H_1}{2} - 1.$$

а затем —

$$e \text{sh} \frac{H_1 + H_2}{2} = \frac{r_2 - r_1}{2a \text{sh} \frac{H_2 - H_1}{2}},$$

$$e \text{ch} \frac{H_1 + H_2}{2} = \left(1 + \frac{r_1 + r_2}{2a}\right) \frac{1}{\text{ch} \frac{H_2 - H_1}{2}}. \quad (4.2.81)$$

Отсюда получим формулу для вычисления эксцентриситета

$$e = \sqrt{\left(1 + \frac{r_1 + r_2}{2a}\right)^2 \frac{1}{\text{ch}^2 \frac{H_2 - H_1}{2}} - \left(\frac{r_2 - r_1}{2a \text{sh} \frac{H_2 - H_1}{2}}\right)^2}, \quad (4.2.82)$$

где согласно (4.2.64), (4.2.66), (4.2.77) и (4.2.78)

$$\frac{H_2 - H_1}{2} = d = \frac{\varepsilon - \delta}{2} = \frac{\varepsilon_1 \mp \delta_1}{2} \quad (4.2.83)$$

(знак «-» берется в случае  $\Delta\theta < \pi$ , а знак «+» отвечает случаю  $\Delta\theta > \pi$ ).

Далее, по формуле

$$p = a(e^2 - 1) \quad (4.2.84)$$

вычислим параметр гиперболической орбиты. Расчет элементов гиперболической орбиты завершается вычислением величины  $(H_1 + H_2)/2$  с использованием (4.2.81), которая в совокупности с (4.2.83) позволяет найти  $H_1$  и  $H_2$ , затем истинную аномалию  $\vartheta_1$  (или  $\vartheta_2$ ) из условия

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta_i}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{H_i}{2} \quad (i = 1, 2) \quad (4.2.85)$$

и аргумент перицентра

$$\omega = u_1 - \vartheta_1 \quad (4.2.86)$$

(или  $\omega = u_2 - \vartheta_2$ ). Угол  $\vartheta_1/2$  может находиться только в первой или четвертой четверти, поскольку для гиперболической орбиты  $-\pi < \vartheta < \pi$ .

Для вычисления времени пролета перицентра имеем формулу

$$t_{\text{п}} = t_1 - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (e \operatorname{sh} H_1 - H_1). \quad (4.2.87)$$

#### 4.2.3. Параболическая орбита.

Построим вокруг точек  $M_1$  и  $M_2$  окружности радиусов  $r_1$  и  $r_2$ . Общая касательная к этим окружностям является директрисой искомой параболы. Если направление движения не задано, то двум касательным  $AB$  и  $A'B'$ , расположенным по разные стороны от притягивающего центра, отвечают две возможные параболические орбиты с угловыми дальностями  $\Delta\vartheta < \pi$  и  $\Delta\vartheta > \pi$  (рис. 4.7). Если направление движения задано или известна угловая дальность  $\Delta\vartheta$ , то возможна одна параболическая орбита.

Вычислим удвоенную площадь, которую заметает радиус-вектор при движении по параболической орбите

$$\Phi_{\text{пар}} = \frac{p^2}{2} \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2} \right) + \frac{p^2}{6} \left( \operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta_2}{2} - \operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta_1}{2} \right),$$

или

$$\Phi_{\text{пар}} = \frac{p^2}{6} \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2} \right) \left[ 3 \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2} \right) + \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2} \right)^2 \right]. \quad (4.2.88)$$

Здесь  $\vartheta_1, \vartheta_2$  — начальное и конечное значения истинной аномалии.

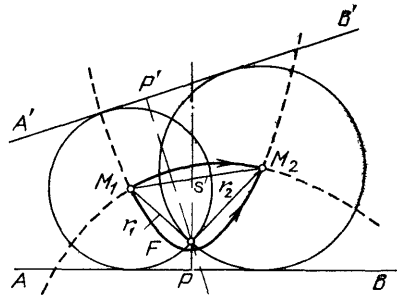


Рис. 4.7. Построение параболических орбит, проходящих через две точки

Из треугольника  $FM_1M_2$  (рис. 4.7) имеем:

$$s^2 = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2 \cos^2 \frac{\Delta\theta}{2}.$$

Отсюда

$$2 \sqrt{r_1r_2} \cos \frac{\Delta\theta}{2} = \pm \sqrt{(r_1 + r_2 + s)(r_1 + r_2 - s)}.$$

Верхний знак перед корнем соответствует случаю  $\Delta\theta < \pi$ , а нижний — случаю  $\Delta\theta > \pi$ . После подстановки в левую часть величин  $r_1$  и  $r_2$  из уравнения параболической орбиты получим первое вспомогательное соотношение

$$1 + \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} = \pm \frac{1}{p} \sqrt{(r_1 + r_2 + s)(r_1 + r_2 - s)}. \quad (4.2.89)$$

Далее вычислим

$$r_1 + r_2 = \frac{p}{2} \left( 2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_1}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_2}{2} \right)$$

и с учетом (4.2.89) найдем второе вспомогательное соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left( \sqrt{r_1 + r_2 + s} \mp \sqrt{r_1 + r_2 - s} \right).$$

Подставляя оба вспомогательных соотношения в (4.2.88), определим удвоенную площадь параболического сектора через параметр орбиты  $p$ , начальный и конечный радиусы  $r_1$ ,  $r_2$ , а также стягивающую их хорду  $s$ :

$$\Phi_{\text{пар}} = \frac{\sqrt{p}}{6} [(r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2}]. \quad (4.2.90)$$

Здесь знак « $-$ » берется при угловой дальности  $\Delta\theta < \pi$ , а знак « $+$ » отвечает условию  $\Delta\theta > \pi$ .

Используя заданное время движения по параболической орбите  $\Delta t_{\text{пар}} = t_2 - t_1$  и уравнение (4.2.51), запишем формулу Эйлера, связывающую время с геометрическими характеристиками движения ( $r_1$ ,  $r_2$ ,  $s$ ):

$$\Delta t_{\text{пар}} = \frac{1}{6\sqrt{\mu}} [(r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2}]. \quad (4.2.91)$$

При выполнении условия  $\Delta t = \Delta t_{\text{пар}}$  орбита является параболической ( $a = \infty$ ). Вычислим параметр параболической орбиты. Предварительно из уравнения орбиты

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

найдем

$$\cos \frac{\theta_1}{2} = \sqrt{\frac{p}{2r_1}}, \quad \cos \frac{\theta_2}{2} = \cos \frac{\theta_1 + \Delta\theta}{2} = \sqrt{\frac{p}{2r_2}}. \quad (4.2.92)$$



Преобразуем второе равенство (4.2.92) с учетом первого:

$$\sqrt{\frac{p}{2r_1}} \cos \frac{\Delta\phi}{2} - \sqrt{1 - \left(\frac{p}{2r_1}\right)^2} \sin \frac{\Delta\phi}{2} = \sqrt{\frac{p}{2r_2}}.$$

Отсюда

$$\sqrt{\frac{p}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{r_1}} \operatorname{ctg} \frac{\Delta\phi}{2} - \frac{1}{\sqrt{r_2}} \frac{1}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}} \right) = \sqrt{1 - \frac{p}{2r_1}}$$

и

$$p = \frac{2}{\frac{1}{r_1} + \left( \frac{1}{\sqrt{r_1}} \operatorname{ctg} \frac{\Delta\phi}{2} - \frac{1}{\sqrt{r_2}} \frac{1}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}} \right)^2}. \quad (4.2.93)$$

Зная величину  $p$ , можно из первого равенства (4.2.92) вычислить истинную аномалию  $\phi_1$ , а затем аргумент перицентра

$$\omega = u_1 - \phi_1. \quad (4.2.94)$$

Наконец, по формуле (2.5.24) определим время пролета перицентра:

$$t_{\Pi} = t_1 - \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\mu}} \left( \operatorname{tg} \frac{\phi_1}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\phi_1}{2} \right). \quad (4.2.95)$$

Случаем параболической орбиты закончим рассмотрение задачи определения основных элементов орбиты по двум заданным положениям КА и времени перелета между ними.

Если тип орбиты заранее не известен, то предварительно следует вычислить величины  $\Delta t_{\text{пар}}$  по формуле (4.2.91) и

$$\Delta t_{\text{гр}} = \frac{\Phi_{\text{гр}}}{\sqrt{\mu p}} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\pi \mp (\delta_0 - \sin \delta_0)]. \quad (4.2.96)$$

Сравнивая заданную величину  $\Delta t$  с  $\Delta t_{\text{пар}}$  и  $\Delta t_{\text{гр}}$ , можно установить тип орбиты. Действительно, при

$$\Delta t > \Delta t_{\text{гр}}$$

имеем эллиптическую орбиту второго рода, при

$$\Delta t = \Delta t_{\text{гр}}$$

орбита является граничной эллиптической, а при

$$\Delta t_{\text{гр}} > \Delta t > t_{\text{пар}}$$

получим эллиптическую орбиту первого рода. Понятно, что в случае

$$\Delta t = \Delta t_{\text{пар}}$$

реализуется параболическая орбита, а при

$$\Delta t < \Delta t_{\text{пар}}$$

орбита должна быть гиперболической.

Кратко обсудим особые случаи определения орбиты, когда заданные точки  $M_1$ ,  $M_2$  и притягивающий центр  $F$  расположены на одной прямой. Если точки  $M_1$  и  $M_2$  находятся по разные стороны от притягивающего центра ( $\Delta\vartheta = \pi$ ), то для построения траектории необходимо задаться плоскостью движения и установить направление движения, поскольку в каждой плоскости возможны две подобные траектории, различающиеся направлением обхода притягивающего центра. Решение задачи проводится при условии

$$r_1 + r_2 = s,$$

и в зависимости от заданного времени перелета  $\Delta t$  может реализоваться любая из рассмотренных выше траекторий.

Если точки  $M_1$  и  $M_2$  находятся по одну сторону от притягивающего центра, то траектория оказывается *прямолинейной* (эллиптической любого рода, гиперболической, параболической). Заметим, что этот случай сравнительно редко встречается в задачах механики космического полета.

В тех случаях, когда угловая дальность  $\Delta\vartheta > 2\pi$ , задача несколько усложняется, но орбита может быть только эллиптической. Решение задачи для случаев прямолинейной орбиты и случаев  $\Delta\vartheta > 2\pi$  подробно рассматривается в работе [62].

### § 4.3. Определение орбиты по измерениям положения и скорости

Для определения элементов орбиты спутника могут использоваться измерения его положения и скорости, что позволяет упростить вычисления. При определении орбиты спутника с помощью наземного измерительного комплекса обычно проводятся несколько сеансов с большим числом измерений в течение каждого сеанса. Как правило, результаты измерений содержат методические и случайные ошибки. В этой ситуации возникает задача рационального использования избыточной информации для более точного определения элементов орбиты спутника.

Ниже обсуждаются способы решения перечисленных задач.

**4.3.1. Использование измерений положения и скорости.** Предположим, что в результате проведенных измерений определен радиус-вектор  $\mathbf{r}_0$  и вектор скорости  $\mathbf{V}_0$  в момент времени  $t_0$ , причем эти векторы не коллинеарны. Определим элементы орбиты спутника.

Плоскость орбиты фиксируется с помощью единичного вектора нормали, направленного по векторному интегралу площадей

$$\mathbf{c}^0 = \frac{\mathbf{r}_0 \times \mathbf{V}_0}{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{V}_0|}. \quad (4.3.1)$$

Если  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$  — составляющие вектора  $\mathbf{c}^0$  в экваториальной системе координат  $Fxyz$ , то наклонение орбиты и долготу восходя-

щего узла можно вычислить с использованием формул (4.2.7) и (4.2.8):

$$i = \arccos c_z \quad (0 \leq i \leq \pi),$$

$$\sin \Omega = \frac{c_x}{\sin i}, \quad \cos \Omega = -\frac{c_y}{\sin i} \quad (0 \leq \Omega \leq 2\pi).$$

Модуль векторного интеграла площадей  $C = |\mathbf{r}_0 \times \mathbf{V}_0|$  позволяет определить по формуле (2.2.29) параметр орбиты

$$p = \frac{C^2}{\mu},$$

а с помощью интеграла энергии (2.2.1)

$$V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} = h$$

по формуле (2.2.32) можно найти эксцентриситет орбиты

$$e = \sqrt{1 + h \frac{C^2}{\mu}}.$$

По величине эксцентриситета однозначно определяется тип орбиты. При  $e < 1$  орбита эллиптическая, при  $e > 1$  — гиперболическая, а в случае  $e = 1$  — параболическая.

Чтобы вычислить истинную аномалию  $\vartheta_0$  в момент времени  $t_0$ , воспользуемся формулами для радиальной (2.3.5) и трансверсальной (2.3.7) составляющих вектора скорости. Тогда

$$\sin \vartheta_0 = \frac{V_{r_0}}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \quad \cos \vartheta_0 = \frac{1}{e} \left( V_{n_0} \sqrt{\frac{p}{\mu}} - 1 \right), \quad (4.3.2)$$

где

$$V_{r_0} = \mathbf{V}_0 \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|}, \quad V_{n_0} = \left| \mathbf{V}_0 - V_{r_0} \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|} \right|. \quad (4.3.3)$$

Аргумент широты  $u_0$  определяется из следующих соотношений:

$$\cos u_0 = \mathbf{r}_\Omega^0 \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|}, \quad \sin u_0 = \left| \mathbf{r}_\Omega^0 \times \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|} \right| \operatorname{sign} r_{0z} \quad (4.3.4)$$

$$(0 \leq u_0 \leq 2\pi),$$

где  $\mathbf{r}_\Omega^0 = (\cos \Omega, \sin \Omega, 0)$  — единичный вектор, направленный из притягивающего центра в восходящий узел,  $r_{0z}$  — проекция  $\mathbf{r}_0$  на ось  $Fz$ . Далее найдем аргумент перицентра

$$\omega_0 = u_0 - \vartheta_0. \quad (4.3.5)$$

Для определения времени пролета перицентра  $t_\pi$  следует воспользоваться знанием типа орбиты. Если орбита эллиптическая, то предварительно вычисляется эксцентрическая аномалия с исполь-

зованием формулы (2.5.6)

$$\operatorname{tg} \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}, \quad (4.3.6)$$

а затем из уравнения (2.5.8) — время пролета перицентра

$$t_{\pi} = t_0 - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E_0 - e \sin E_0). \quad (4.3.7)$$

Здесь величина большой полуоси

$$a = \frac{p}{1-e^2}.$$

Если орбита гиперболическая, то сначала определяется величина  $H_0$  по формуле (2.5.17)

$$\operatorname{tg} \frac{H_0}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}, \quad (4.3.8)$$

а затем время пролета перицентра

$$t_{\pi} = t_0 - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (e \operatorname{sh} H_0 - H_0), \quad (4.3.9)$$

где

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}.$$

В случае параболической орбиты время пролета перицентра вычисляется по формуле

$$t_{\pi} = t_0 - \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\mu}} \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta_0}{2} \right). \quad (4.3.10)$$

**4.3.2. Использование многих измерений.** В реальных ситуациях измерительная информация обычно содержит ошибки, как методические (систематические), так и случайные. Пусть в результате измерений определяется некоторая величина  $f_i$ , которая связана с элементами орбиты заданным соотношением

$$f_i = F_i(i, \Omega, \omega, p, e, t_{\pi}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3.11)$$

Если  $n = 6$ , то в принципе возможно определить все шесть элементов орбиты, независимо от сложности функций  $F_i$ . Вычисленные таким способом элементы орбиты будут неточными из-за ошибок измерений. Предположим теперь, что  $n > 6$ . Число уравнений превышает число искомых параметров, т. е. система является переопределенной. Покажем, как избыточная измерительная информация может быть использована для уточнения элементов орбиты.

Обозначим элементы орбиты через  $x_1, \dots, x_6$  и  $t_i$  — момент времени проведения  $i$ -го измерения. Общее число измерений  $n > 6$ . В этом случае имеем систему  $n > 6$  уравнений

$$F_i(x_1, \dots, x_6, t_i) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3.12)$$

с шестью неизвестными  $x_1, \dots, x_6$ . Предположим, что известны величины элементов орбиты в первом приближении  $x_\nu^{(1)}$ ,  $\nu = 1, \dots, 6$ . Обычно бывают известны номинальные или некоторые другие априорные величины. Вычислим значения функций  $F_i$  при  $x_\nu = x_\nu^{(1)}$ ,  $\nu = 1, \dots, 6$ . Тогда получим

$$F_i(x_1^{(1)}, \dots, x_6^{(1)}, t_i) = \tilde{f}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3.13)$$

Обозначая разности между точными значениями элементов орбиты и их первыми приближениями через

$$\Delta x_\nu = x_\nu - x_\nu^{(1)}, \quad \nu = 1, \dots, 6, \quad (4.3.14)$$

и считая функции  $F_i$  непрерывными и дифференцируемыми, запишем приближенные равенства

$$F_i(x_1, \dots, x_6, t_i) - F_i(x_1^{(1)}, \dots, x_6^{(1)}, t_i) \approx \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_6} \Delta x_6, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3.15)$$

Частные производные вычисляются при значениях  $x_\nu = x_\nu^{(1)}$ , т. е. в точке  $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_6^{(1)})$ . Обозначим для краткости

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial x_\nu} \right|_{x^{(1)}} = a_{i\nu}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \nu = 1, \dots, 6, \quad (4.3.16)$$

тогда систему уравнений для поправок можно записать в следующем виде:

$$a_{i1}\Delta x_1 + a_{i2}\Delta x_2 + \dots + a_{i6}\Delta x_6 = \Delta f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3.17)$$

где

$$\Delta f_i = f_i - \tilde{f}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3.18)$$

Система (4.3.18) содержит шесть неизвестных  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_6$ , а число уравнений  $n > 6$ . Поскольку число уравнений больше числа неизвестных, то такая система в общем случае несовместна. С помощью метода наименьших квадратов производится вычисление таких поправок  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_6$ , чтобы получить наилучшее возможное согласование правых и левых частей уравнений (4.3.17). Рассмотрим соотношение

$$Q = \sum_{i=1}^n (a_{i1}\Delta x_1 + a_{i2}\Delta x_2 + \dots + a_{i6}\Delta x_6 - \Delta f_i)^2 \quad (4.3.19)$$

и будем определять числа  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_6$  из условия минимальности  $Q$ . Для этого необходимо равенство нулю первых производных  $Q$  по  $\Delta x_\nu$ :

$$\frac{\partial Q}{\partial \Delta x_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, 6. \quad (4.3.20)$$

Дифференцируя  $Q$  и собирая коэффициенты при поправках  $\Delta x_\nu$ , получим систему шести уравнений относительно  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_6$ :

$$\begin{aligned} b_{11}\Delta x_1 + b_{12}\Delta x_2 + \dots + b_{16}\Delta x_6 &= l_1, \\ b_{21}\Delta x_1 + b_{22}\Delta x_2 + \dots + b_{26}\Delta x_6 &= l_2, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_{61}\Delta x_1 + b_{62}\Delta x_2 + \dots + b_{66}\Delta x_6 &= l_6. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Здесь коэффициенты  $b_{j\nu}$  и  $l_\nu$  ( $j, \nu = 1, \dots, 6$ ) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} b_{j\nu} &= a_{1j}a_{1\nu} + a_{2j}a_{2\nu} + \dots + a_{nj}a_{n\nu}, \\ l_\nu &= a_{1\nu}\Delta f_1 + a_{2\nu}\Delta f_2 + \dots + a_{n\nu}\Delta f_\nu. \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Решение системы (4.3.21) позволяет определить поправки первого приближения  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_6$ , которые «в среднем» наилучшим образом удовлетворяют системе (4.3.17). Затем вычисляются значения элементов орбиты во втором приближении

$$x_\nu^{(2)} = x_\nu^{(1)} + \Delta x_\nu, \quad \nu = 1, \dots, 6. \quad (4.3.23)$$

Используя их, можно найти по указанному алгоритму значения элементов орбиты в третьем приближении и т. д. до тех пор, пока процесс последовательного уточнения элементов орбиты не сойдется с требуемой точностью.

Полученные результаты зависят от точности измерений. При повышении точности измерений повышается точность определения элементов орбиты. При одной и той же точности измерений точность определения элементов орбиты можно увеличить за счет увеличения числа независимых измерений [3, 12, 63].

#### § 4.4. Трассы околоземных спутников

Проекцию орбиты спутника на поверхность центрального тела называют *трассой спутника*. Другими словами, трасса — это совокупность точек пересечения перемещающегося радиуса-вектора спутника с поверхностью центрального тела. В последующем рассмотрении ограничимся трассами околоземных спутников.

Обычно при построении трассы поверхность Земли принимается сферической, что значительно упрощает задачу.

**4.4.1. Круговая орбита спутника.** Если эксцентриситет орбиты мал ( $e \approx 0$ ), то ее можно рассматривать в качестве круговой. Это упрощает построение трассы спутника.

Пусть в момент времени  $t_0$  заданы наклонение орбиты  $i$ , период обращения  $T$  и географические координаты точки  $O$  трассы: долгота  $\lambda_0$  и широта  $\varphi_0$  (рис. 4.8). Требуется определить координаты точки  $M$  трассы в момент времени  $t > t_0$ .

Вычислим сначала координаты  $\lambda, \varphi$  точки  $M$  в предположении, что Земля не вращается. Из сферического прямоугольного треуголь-

ника  $BCO$ , построенного на рис. 4.8, следуют соотношения

$$\sin u_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\sin i}, \quad (4.4.1)$$

$$\sin \Delta\lambda_0 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} i}. \quad (4.4.2)$$

Отсюда можно определить углы  $u_0$  — аргумент широты начальной точки и  $\Delta\lambda_0$  — разность долгот начальной точки и восходящего узла. При этом необходимо использовать дополнительную информацию о направлении движения спутника.

Угловая скорость перемещения спутника по круговой орбите постоянна

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.4.3)$$

поэтому за время  $t - t_0$  спутник проходит угловое расстояние

$$\Delta u = \omega_{\text{кр}} (t - t_0) = \frac{2\pi}{T} (t - t_0). \quad (4.4.4)$$

Для сферического прямоугольного треугольника  $BDM$  справедливы соотношения

$$\operatorname{tg}(\Delta\lambda_0 + \Delta\lambda) = \cos i \operatorname{tg}(u_0 + \Delta u), \quad (4.4.5)$$

$$\sin \varphi = \sin i \sin(u_0 + \Delta u). \quad (4.4.6)$$

Отсюда можно вычислить  $\Delta\lambda$  — разность долгот точек  $M$  и  $O$ , а также  $\varphi$  — широту точки  $M$ . Согласно (4.4.6) наибольшая и наименьшая широты точек трассы спутника определяются условием  $\sin \varphi = \pm \sin i$ , поэтому диапазон изменения широт

$$\begin{aligned} -i \leq \varphi \leq i & \quad \text{при } 0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}, \\ -(\pi - i) \leq \varphi \leq \pi - i & \quad \text{при } \frac{\pi}{2} \leq i \leq \pi. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Долгота точки  $M$  для невращающейся Земли

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda. \quad (4.4.8)$$

Как будет показано в § 8.5, под влиянием сжатия Земли плоскость круговой орбиты спутника *прецессирует*, т. е. непрерывно вращается с постоянной угловой скоростью  $\dot{\Omega}$ . При наклонениях  $0 < i < \frac{\pi}{2}$  плоскость орбиты прецессирует с востока на запад ( $\dot{\Omega} < 0$ ), а при наклонениях  $\frac{\pi}{2} < i < \pi$  плоскость орбиты прецессирует с запада на восток ( $\dot{\Omega} > 0$ ).

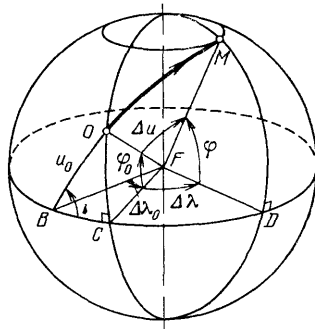


Рис. 4.8. К построению трассы круговой орбиты спутника

С учетом прецессии орбиты формула (4.4.8) принимает вид

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda + \dot{\Omega}(t - t_0). \quad (4.4.9)$$

Определим теперь координаты  $(\lambda', \varphi')$  точки  $M$  трассы с учетом вращения Земли, т. е. ее географические координаты, считая, что долгота возрастает от Гринвичского меридиана на восток от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . Если  $\omega_3$  — угловая скорость вращения Земли, то за время  $t - t_0$  Земля повернется на угол

$$\Delta\lambda_3 = \omega_3(t - t_0)$$

с запада на восток. Следовательно, в момент времени  $t$  под спутником окажется точка, долгота которой на угол  $\Delta\lambda_3$  меньше, чем долгота, определенная по формуле (4.4.9) без учета суточного вращения Земли:

$$\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda - (\omega_3 - \dot{\Omega})(t - t_0). \quad (4.4.10)$$

Прецессия орбиты, как и вращение Земли, не сказывается на широте точек трассы, т. е.

$$\varphi' = \varphi. \quad (4.4.11)$$

Задаваясь последовательными моментами времени, можно построить трассу *первого витка*. Витком принято называть часть траектории, соответствующей одному обороту спутника вокруг Земли. Началом каждого витка считается момент прохождения спутника над экватором (в восходящем узле).

Определим смещение спутника по долготе за один виток:

$$\Delta\lambda_{\text{в}} = -(\omega_3 - \dot{\Omega})T, \quad (4.4.12)$$

где  $T$  — период обращения спутника. Если на карту, выполненную в меркаторской проекции (с прямолинейностью меридианов и отсутствием искажения углов), нанести трассу первого витка, то трассы всех последующих витков можно построить путем последовательного смещения трассы первого витка по долготе на величину  $\Delta\lambda_{\text{в}}$ .

В задачах механики космического полета часто используется понятие *суточного числа витков спутника* ( $N$ ), т. е. ближайшего целого числа витков (с округлением), которое совершает спутник за одни сутки. Поскольку Земля за сутки поворачивается на угол  $2\pi$ , а смещение спутника по долготе за один виток есть  $\Delta\lambda_{\text{в}}$ , суточное число витков — это ближайшее целое число, определяемое отношением  $2\pi/\Delta\lambda_{\text{в}}$ :

$$N \approx \frac{2\pi}{\Delta\lambda_{\text{в}}}. \quad (4.4.13)$$

Угол

$$\Delta\lambda_{\text{сут}} = 2\pi - N\Delta\lambda_{\text{в}} \quad (4.4.14)$$

называют *суточным смещением орбиты*. Если  $\Delta\lambda_{\text{сут}} > 0$ , спутник за сутки смещается на восток относительно начального положения



восходящего узла, а в случае  $\Delta\lambda_{сут} < 0$  — на запад. Понятно, что  $|\Delta\lambda_{сут}| \leq \Delta\lambda_{в}/2$ .

Пусть  $2\pi/\Delta\lambda_{в}$  есть целое число, тогда через сутки спутник возвратится в начальное положение относительно поверхности Земли, а трасса его движения в течение вторых суток совпадет с трассой движения в течение первых суток. В общем случае, когда  $\Delta\lambda_{сут} \neq 0$ , трасса витков с  $N+1$  по  $2N$  получается путем сдвига по долоте на угол  $\Delta\lambda_{сут}$  трассы витков с 1 по  $N$ .

Предположим теперь, что

$$\frac{2\pi}{\Delta\lambda_{в}} = \frac{k}{l}, \quad (4.4.15)$$

где  $k$  и  $l$  — целые числа; тогда

$$2\pi l = k\Delta\lambda_{в},$$

и спутник возвратится в начальное положение относительно поверхности Земли через  $l$  суток, сделав  $k$  витков по орбите.

На рис. 4.9 в качестве примера построена трасса вторых суток полета (с 17-го по 33-й виток) космического корабля «Союз-22»,

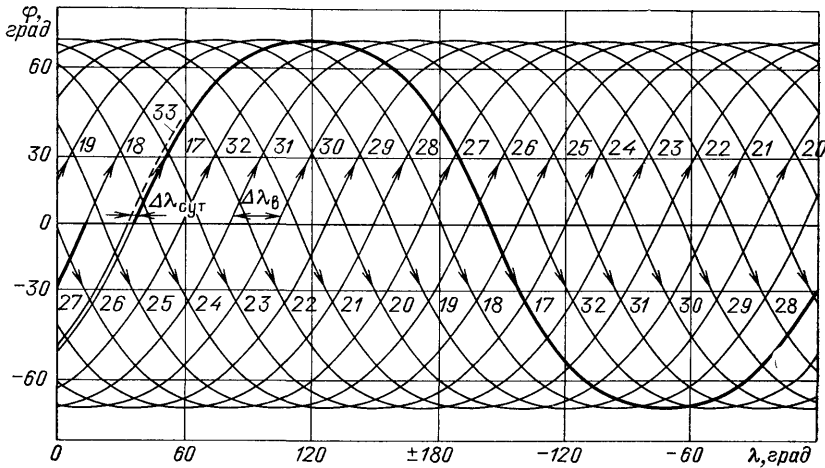


Рис. 4.9. Трасса вторых суток полета (с 17-го по 33-й виток) космического корабля «Союз-22»

выведенного на почти круговую орбиту с высотой  $\sim 265$  км и наклонением  $64^{\circ},8$ . Период обращения  $89,6$  мин.

**4.4.2. Эллиптическая орбита спутника.** Рассмотрим теперь более сложную задачу построения трассы при движении спутника по эллиптической орбите. Пусть начальный момент времени  $t_0$  соответствует нахождению спутника, координаты которого  $\lambda_0, \varphi_0$ , в перигее орбиты (точка  $O$  на рис. 4.8). Задано наклонение орбиты  $i$ ,

ее эксцентриситет  $e$ , параметр  $p$ . Требуется определить координаты точки  $M(\lambda', \varphi')$ , соответствующей моменту времени  $t > t_0$ .

Предварительно вычислим величину большой полуоси  $a = p/(1 - e^2)$ , а затем с помощью уравнения (2.5.8)

$$t - t_0 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E - e \sin E)$$

найдем эксцентрическую аномалию спутника в момент времени  $t$ . Наконец, по формуле (2.5.6)

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

определим истинную аномалию  $\vartheta$ . Согласно обозначениям рис. 4.8  $\Delta u = \vartheta$ . Поэтому для вычисления координат точки  $M$  можно использовать формулы, аналогичные (4.4.5) и (4.4.6):

$$\operatorname{tg}(\Delta\lambda_0 + \Delta\lambda) = \cos i \operatorname{tg}(u_0 + \vartheta), \quad (4.4.16)$$

$$\sin \varphi = \sin i \sin(u_0 + \vartheta). \quad (4.4.17)$$

Здесь  $u_0 + \vartheta = u$  — аргумент широты точки  $M$ . Далее найдем долготу точки  $M$  для невращающейся Земли

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda.$$

В § 8.5 будет показано, что прецессию эллиптической орбиты можно приближенно описать с помощью средней скорости смещения долготы восходящего узла  $\dot{\Omega}_{\text{ср}}$ . Тогда долгота точки  $M$ , найденная в первом приближении с учетом вращения Земли и прецессии орбиты, будет вычисляться по формуле, аналогичной (4.4.10):

$$\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda - (\omega_3 - \dot{\Omega}_{\text{ср}})(t - t_0). \quad (4.4.18)$$

Широта точки  $M$   $\varphi' = \varphi$ , где угол  $\varphi$  определяется формулой (4.4.17).

Задаваясь последовательными моментами времени, можно определить координаты соответствующих точек трассы спутника. В зависимости от основных элементов эллиптической орбиты трасса спутника может иметь различную конфигурацию [30]. На рис. 4.10 показана трасса типа спутника «Молния», имеющего сильно вытянутую эллиптическую орбиту с периодом обращения 12 ч и апогеем в северном полушарии.

**4.4.3. Суточный спутник.** Если *сидерический* (звездный) период обращения спутника равен звездным суткам ( $T = 23$  час 56,07 мин), то спутник называют *суточным*, или *синхронным*. Трасса невозмущенного движения суточного спутника является замкнутой кривой, т. е. трассы всех последующих витков совпадают с трассой первого витка. В этом случае можно получить простое соотношение, связывающее текущие координаты трассы.

Пусть в начальный момент времени  $t_0$  спутник находится в восходящем узле круговой суточной орбиты (точка  $B$  на рис. 4.8). В момент времени  $t$  трасса пройдет через точку  $O$ , для которой

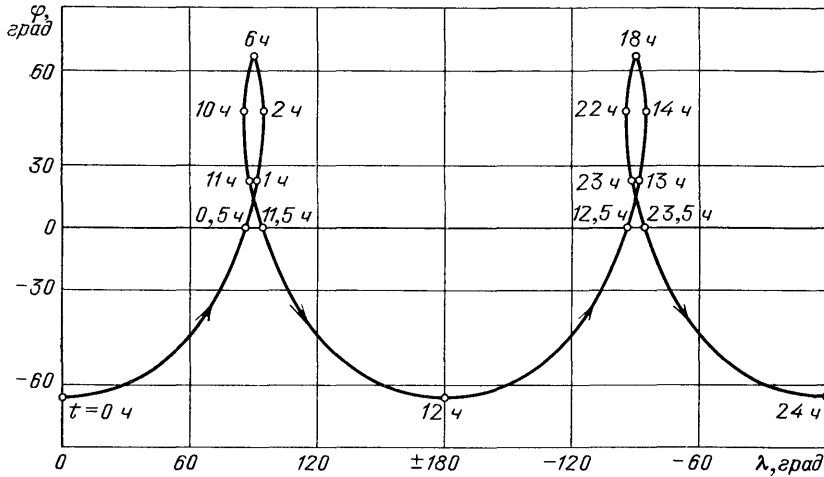


Рис. 4.10. Трасса типа спутника «Молния» (без привязки начальной точки)

$\Delta\lambda_0$  — долгота, отсчитываемая от восходящего узла  $B$ , и  $\varphi_0$  — широта. Из сферического прямоугольного треугольника  $BCO$  согласно (4.4.1) и (4.4.2) имеем

$$u_0 = \arcsin\left(\frac{\sin \varphi_0}{\sin i}\right), \quad (4.4.19)$$

$$\Delta\lambda_0 = \arcsin\left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} i}\right). \quad (4.4.20)$$

Орбитальная угловая скорость суточного спутника равна угловой скорости вращения Земли  $\omega_3$ . Отсюда можно найти время перемещения по трассе из точки  $B$  в точку  $O$ :

$$\Delta t = t - t_0 = \frac{u_0}{\omega_3}.$$

За это время Земля в свою очередь повернется на угол

$$\Delta\Omega_3 = \omega_3 \Delta t = u_0. \quad (4.4.21)$$

Теперь можно с учетом вращения Земли определить долготу точки  $O$  как функцию ее широты:

$$\lambda_0 = \lambda_B + \arcsin\left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} i}\right) - \arcsin\left(\frac{\sin \varphi_0}{\sin i}\right). \quad (4.4.22)$$

Из формулы (4.4.22) следует, что при каждом пересечении трассой спутника экватора ( $\varphi_0 = 0$ ) долгота точки одна и та же:  $\lambda_0 = \lambda_n$ . Поэтому трасса спутника имеет вид «восьмерки», т. е. представляет собой замкнутую двойную петлю, причем одна петля расположена в северном полушарии, а вторая в южном. На рис. 4.11 построены трассы суточных спутников в северном полушарии при различных наклонениях орбиты [7]. В южном полушарии картина аналогична.

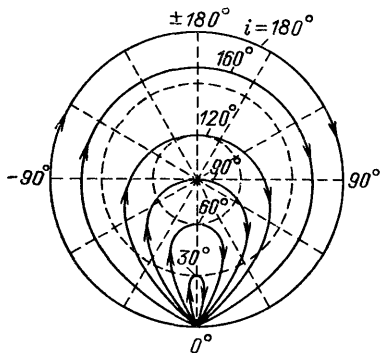


Рис. 4.11. Трассы в северном полушарии суточных круговых спутников Земли

Особо следует выделить два предельных случая:  $i = 0$  и  $i = \pi$ . При  $i = 0$  плоскость орбиты спутника совпадает с плоскостью экватора, и спутник вращается с запада на восток с такой же угловой скоростью, что и Земля. Поэтому для наблюдателя, который находится на поверхности Земли, спутник кажется неподвижным. Следовательно, трасса его вырождается в точку. Такой суточный спутник называют *стационарным* (неподвижным относительно поверхности Земли).

При  $i = \pi$  плоскость орбиты спутника также совпадает с плоскостью экватора, но спутник движется на запад, против вращения

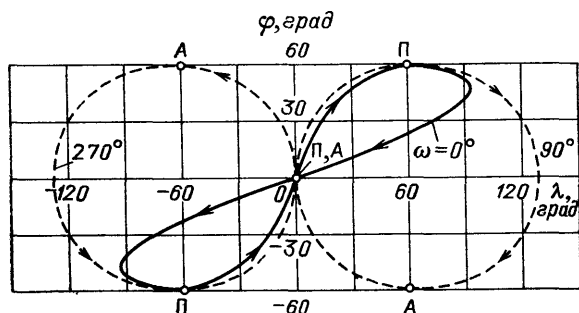


Рис. 4.12. Трассы суточных эллиптических спутников Земли (наклонение  $i = 60^\circ$ , эксцентриситет  $e = 0,6$ )

Земли. Такой спутник в течение суток дважды проходит над каждой точкой экватора.

Стационарный спутник представляет наибольший интерес для целей космической связи и наблюдения за поверхностью Земли. Выведение стационарного спутника из точек старта, расположенных вне плоскости экватора, требует больших энергетических затрат.

Поэтому для решения многих задач могут использоваться суточные (синхронные) спутники на круговых и эллиптических орбитах, плоскость движения которых наклонена под большим углом к плоскости экватора. За счет выбора элементов орбиты суточного спутника можно добиться наибольшего эффекта в его использовании для целей связи или наблюдения. На рис. 4.12 построены трассы суточных спутников Земли с наклоном  $i = 60^\circ$ , эксцентриситетом  $e = 0,6$  и различными положениями перигея, обозначенного буквой П [66].

В Советском Союзе на геостационарную орбиту выводятся связанные спутники типа «Горизонт», «Радуга», «Экран». Всего в различных точках геостационарной орбиты в 1987 году находились около ста спутников, принадлежащих различным государствам.

## МАНЕВРЫ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ

Одной из основных задач механики космического полета является расчет маневров космического аппарата (КА). *Маневром* называют целенаправленное изменение параметров движения КА, в результате которого первоначальная траектория свободного полета (*начальная орбита*) меняется на некоторую другую (*конечная орбита* или *траектория полета*). Обычно маневр осуществляется с помощью двигательной установки. Длительность работы, направление вектора тяги и число включений двигателя зависят от начальной и конечной орбит. При расчете маневра необходимо его оптимизировать, т. е. определить такие условия проведения маневра, при которых расход топлива оказывается минимальным. Это — наиболее часто встречающийся критерий оптимальности, хотя в некоторых задачах рассматриваются и другие критерии, например время перелета с одной орбиты на другую, обеспечение высокой точности конечных (терминальных) параметров движения и др. Для некоторых маневров оказывается возможным использовать вместо двигательной установки (или для частичного уменьшения расхода топлива) аэродинамические силы, возникающие при движении КА в атмосфере планеты. Например, торможение КА в атмосфере при совершении посадки, частичное торможение КА при переводе его с подлетной гиперболической траектории на орбиту спутника планеты, поворот плоскости движения в процессе непродолжительного погружения в атмосферу и т. п.

Как уже отмечалось, в большинстве задач механики космического полета маневры осуществляются с помощью двигательной установки. К их числу относятся *компланарные* маневры, связанные с межорбитальными перелетами в одной плоскости, *пространственные* маневры, требующие изменения плоскости движения, сход с орбиты для спуска и посадки и др.

Для уменьшения расхода топлива на маневр необходимо определить оптимальные условия проведения маневра, т. е. выбрать моменты времени включения и выключения двигателя, число включений (или *активных участков*), величину и ориентацию вектора тяги при каждом включении. Орбиту, связывающую начальную и конечную орбиты, называют *орбитой* (или *траекторией*) *перелета*. Точный расчет маневра, включая активные участки и орбиту перелета, обычно выполняется с использованием ЭВМ. В приближенной постановке учитывают тот факт, что в большинстве случаев длительность активных участков пренебрежимо мала по сравнению

с длительностью пассивного полета, т. е. протяженностью орбиты перелета. Тогда удастся существенно упростить задачу, аппроксимируя активные участки импульсным (скачкообразным) изменением скорости. При этом предполагают, что в момент мгновенного изменения скорости координаты КА остаются без изменения. Расчет такого маневра сводится к определению числа импульсов скорости  $\Delta V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , их ориентации и точек приложения. Полученное решение может использоваться для оценки потребных затрат топлива, а также в качестве хорошего начального приближения при решении задачи в точной постановке с учетом ограниченной величины тяги двигателя.

Опубликованы достаточно подробные обзоры работ, посвященных импульсным маневрам, например [76].

### § 5.1. Двухимпульсный перелет между компланарными дуговыми орбитами

Маневр КА без изменения плоскости движения лежит в основе многих задач механики космического полета. Эти задачи исследованы достаточно глубоко, а полученные решения и рекомендации используются при реализации космических полетов.

**5.1.1. Формула Циолковского.** Расчет импульсных маневров (и даже маневров с учетом ограниченной величины тяги двигателя) часто проводят в терминах потребного приращения скорости. Суммарное приращение скорости на маневр можно пересчитать в потребный запас топлива, если известны характеристики двигательной установки. Для таких пересчетов обычно пользуются *формулой Циолковского*, которая устанавливает связь между запасом топлива и максимальным возможным приращением скорости КА.

Получим формулу Циолковского, т. е. определим приращение скорости КА под действием тяги двигателя в идеальном случае, когда полет совершается в безвоздушном пространстве и вне поля притяжения. Если тяга двигателя все время направлена по вектору скорости, то траектория КА будет прямолинейной. Уравнение движения КА в проекции на направление скорости

$$m \frac{dV}{dt} = P, \quad (5.1.1)$$

где  $m$  — масса КА,  $V$  — скорость,

$$P = W \left( - \frac{dm}{dt} \right) \quad (5.1.2)$$

— тяга двигателя в вакууме,  $W$  — скорость истечения газов из сопла двигателя,  $-dm/dt$  — секундный расход топлива. Сама производная  $dm/dt$  отрицательна, так как масса КА убывает, поэтому перед ней поставлен знак минус. Отсюда получим

$$m \frac{dV}{dt} = - W \frac{dm}{dt}$$

и

$$dV = -W \frac{dm}{m}. \quad (5.1.3)$$

Интегрируя (5.1.3) в предположении  $W = \text{const}$ , найдем

$$V = -W \ln m + C.$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования  $C$  воспользуемся начальным условием: при  $m = m_0$  (начальная масса) имеем  $V = V_0$  (начальная скорость). Тогда приращение скорости КА в момент времени  $t$

$$\Delta V(t) = V(t) - V_0 = W \ln \frac{m_0}{m(t)}. \quad (5.1.4)$$

Полное приращение скорости после выгорания всего топлива, когда  $m = m_k$  (конечная масса),

$$\Delta V_{\text{ид}} = W \ln \frac{m_0}{m_k}. \quad (5.1.5)$$

Формула (5.1.5) определяет *идеальную скорость*, т. е. приращение скорости КА под действием тяги в «идеальном» случае (отсутствуют атмосфера и притяжение). В реальных условиях величина импульса скорости  $\Delta V$ , потребная для проведения маневра, должна быть увеличена на величину потерь  $\Delta V_{\text{пот}}$ , возникающих из-за действия притяжения центрального тела, а также некомпланарности векторов тяги и скорости. Сумма указанных величин составляет *характеристическую скорость* маневра

$$\Delta V_x = \Delta V + \Delta V_{\text{пот}}. \quad (5.1.6)$$

Знание характеристической скорости позволяет однозначно связать величину потребного для маневра импульса с необходимым запасом топлива  $m_k$ . Подставляя  $\Delta V_x$  в формулу (5.1.5) вместо  $\Delta V_{\text{ид}}$  и обращая ее, получим

$$m_k = m_0 \exp\left(-\frac{\Delta V_x}{W}\right), \quad (5.1.7)$$

отсюда

$$m_x = m_0 - m_k = m_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta V_x}{W}\right)\right]. \quad (5.1.8)$$

В качестве первого приближения можно принять  $\Delta V_{\text{пот}} \approx 0$ , тогда

$$m_x = m_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta V}{W}\right)\right]. \quad (5.1.9)$$

Установленная связь между величиной импульса скорости, потребного для маневра, и необходимым запасом топлива позволяет ограничиться анализом потребных импульсов скорости и не рассматривать характеристики самого КА при решении многих задач механики космического полета.



**5.1.2. Оптимизация маневра.** Задача перелета КА между компланарными круговыми орбитами является одной из наиболее изученных задач механики космического полета. Две круговые орбиты с несовпадающими радиусами не имеют точек пересечения, поэтому для перелета между ними требуется приложить не менее двух импульсов скорости. С помощью первого импульса скорости КА переводится с начальной круговой орбиты на орбиту перелета, которая пересекает конечную круговую орбиту или касается ее. В момент достижения конечной орбиты КА сообщается второй импульс скорости для перевода его на эту орбиту. Оптимальную схему двухимпульсного перелета между компланарными круговыми орбитами впервые предложил Гоманн [79]. Траектория перелета типа Гоманна располагается в плоскости начальной и конечной круговых орбит и касается их. Следовательно, импульсы скорости прикладываются в апсидальных точках траектории перелета, которая представляет собой полуэллипс, касающийся меньшей круговой орбиты

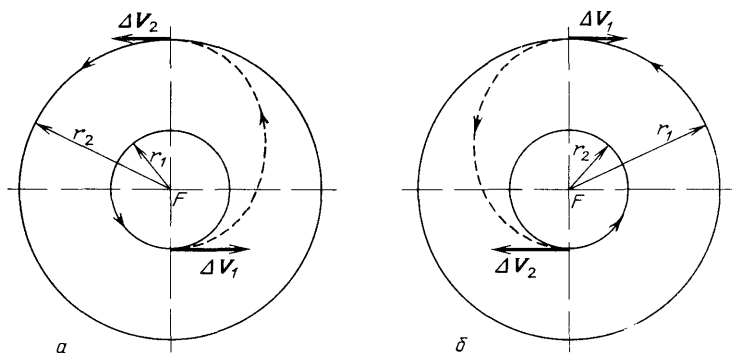


Рис. 5.1. Компланарный двухимпульсный перелет типа Гоманна: а — с меньшей орбиты на большую; б — с большей орбиты на меньшую

в перигентре, а большей круговой орбиты в апоцентре. Такую траекторию перелета часто называют *полуэллипсом Гоманна* (рис. 5.1). Позднее Лоуден доказал оптимальность подобного маневра [41].

Рассмотрим другой способ доказательства, основанный на прямом исследовании минимума зависимости суммарных затрат характеристической скорости на двухимпульсный маневр от параметров, которые определяют этот маневр. Без ущерба для общности будем полагать, что радиус начальной круговой орбиты  $r_1$  меньше радиуса конечной круговой орбиты  $r_2$ , т. е.  $r_1 < r_2$ . Маневр полностью определяется начальным импульсом скорости  $\Delta V_1$ . Действительно, пусть заданы величина первого импульса  $\Delta V_1$  и угол  $\varphi$  между направлением этого импульса и вектором круговой скорости  $V_{кр1}$  в точке  $M_1$  начала маневра (рис. 5.2). С помощью векторного треугольника, построенного в точке  $M_1$ , вычислим величину скорости КА после

приложения первого импульса

$$V_1 = \sqrt{V_{кр1}^2 + \Delta V_1 + 2V_{кр1}\Delta V_1 \cos \varphi} \quad (5.1.10)$$

и косинус начального угла наклона траектории

$$\cos \theta_1 = \frac{V_{кр1} + \Delta V_1 \cos \varphi}{V_1}. \quad (5.1.11)$$

Предполагая, что траектория перелета пересекает круговую орбиту радиуса  $r_2$  в точке  $M_2$  (рис. 5.2), с помощью интеграла

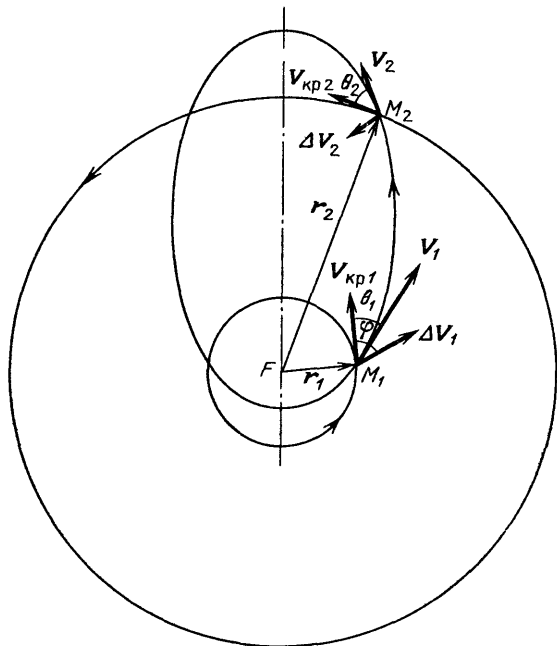


Рис. 5.2. Схема компланарного перелета между круговыми орбитами

энергии (2.2.1) вычислим величину скорости КА в этой точке

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 - 2\mu \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}, \quad (5.1.12)$$

а затем из интеграла площадей (2.2.11) найдем

$$\cos \theta_2 = \frac{r_1 V_1 \cos \theta_1}{r_2 V_2}. \quad (5.1.13)$$

Тогда величина второго импульса скорости для перевода КА с траектории перелета на круговую орбиту радиуса  $r_2$  равна

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_{кр2}^2 + V_2^2 - 2V_{кр2}V_2 \cos \theta_2}. \quad (5.1.14)$$

Отнесем скорости к  $V_{\text{кр1}}$  и введем понятие *относительного радиуса*  $\tilde{r} = r_2/r_1$ ; тогда формулы (5.1.10)–(5.1.14) можно записать в виде

$$\tilde{V}_1 = \frac{V_1}{V_{\text{кр1}}} = \sqrt{1 + \Delta\tilde{V}_1^2 + 2\Delta\tilde{V}_1 \cos \varphi}, \quad (5.1.15)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{1 + \Delta\tilde{V}_1 \cos \varphi}{\tilde{V}_1}, \quad (5.1.16)$$

$$\tilde{V}_2 = \frac{V_2}{V_{\text{кр1}}} = \sqrt{\tilde{V}_1^2 - 2\left(1 - \frac{1}{\tilde{r}}\right)}, \quad (5.1.17)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\tilde{V}_1 \cos \theta_1}{\tilde{r} \tilde{V}_2}, \quad (5.1.18)$$

$$\Delta\tilde{V}_2 = \frac{\Delta V_2}{V_{\text{кр1}}} \sqrt{\frac{1}{\tilde{r}} + \tilde{V}_2^2 - \frac{2\tilde{V}_2 \cos \theta_2}{\sqrt{\tilde{r}}}}, \quad (5.1.19)$$

где  $\Delta\tilde{V}_1 = \Delta V_1/V_{\text{кр1}}$ .

Суммарное приращение относительной скорости для выполнения маневров

$$\Delta\tilde{V}_2 = \Delta\tilde{V}_1 + \Delta\tilde{V}_2 \quad (5.1.20)$$

зависит от двух переменных, а именно — относительной величины первого импульса скорости  $\Delta\tilde{V}_1$  и угла  $\varphi$ , определяющего направление этого импульса. Будем выбирать  $\Delta\tilde{V}_1$  и  $\varphi$  из условия  $\min \Delta\tilde{V}_2$ . При этом на траекторию перелета накладывается дополнительное ограничение, связанное с требованием пересечения (или по крайней мере касания) заданной круговой орбиты радиуса  $r_2$ . Указанное ограничение проще всего записать так:

$$\cos \theta_2 \leq 1,$$

или с учетом (5.1.15)–(5.1.18)

$$\cos \theta_2 = \frac{1 + \Delta\tilde{V}_1 \cos \varphi}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{V}_1^2 - 2\left(1 - \frac{1}{\tilde{r}}\right)}} \leq 1. \quad (5.1.21)$$

Здесь знак равенства соответствует касанию круговой орбиты радиуса  $r_2$ , а знак неравенства — пересечению этой орбиты траекторией перелета.

Возведем обе части (5.1.21) в квадрат и приведем к следующему виду с учетом (5.1.15):

$$f(\varphi, \Delta\tilde{V}_1) = (1 + \Delta\tilde{V}_1 \cos \varphi)^2 - \tilde{r}^2 \left( \Delta\tilde{V}_1^2 + 2\Delta\tilde{V}_1 \cos \varphi - 1 + \frac{2}{\tilde{r}} \right) \leq 0. \quad (5.1.21a)$$

Предварительно проанализируем необходимые условия минимума функции двух переменных

$$\frac{\partial \Delta \tilde{V}_\Sigma}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \Delta \tilde{V}_\Sigma}{\partial \Delta \tilde{V}_1} = 0 \quad (5.1.22)$$

без учета ограничения (5.1.21а). Тогда  $\Delta \tilde{V}_1$  не зависит от  $\varphi$ , и имеем

$$\frac{\partial \Delta \tilde{V}_\Sigma}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Delta \tilde{V}_2}{\partial \varphi}. \quad (5.1.23)$$

Дифференцируя (5.1.20), получим с учетом (5.1.19):

$$\frac{\partial \Delta \tilde{V}_\Sigma}{\partial \varphi} = \frac{1}{\Delta \tilde{V}_2} \left[ \left( \tilde{V}_2 - \frac{\cos \theta_2}{\sqrt{\tilde{r}}} \right) \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{V}_2}{\sqrt{\tilde{r}}} \frac{\partial \cos \theta_2}{\partial \varphi} \right]. \quad (5.1.24)$$

Затем, используя формулы (5.1.15)–(5.1.18), вычислим необходимые производные

$$\frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial \varphi} = - \frac{\Delta \tilde{V}_1 \sin \varphi}{\tilde{V}_1}, \quad (5.1.25)$$

$$\frac{\partial \cos \theta_1}{\partial \varphi} = - \frac{\Delta \tilde{V}_1^2 \sin \varphi}{\tilde{V}_1^3} (\Delta \tilde{V}_1 + \cos \varphi), \quad (5.1.26)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial \varphi} = - \frac{\Delta \tilde{V}_1 \sin \varphi}{\tilde{V}_2}, \quad (5.1.27)$$

$$\frac{\partial \cos \theta_2}{\partial \varphi} = \frac{\Delta \tilde{V}_1 \sin \varphi}{\tilde{r} \tilde{V}_2^2} \left( \frac{\tilde{V}_1 \cos \theta_1}{\tilde{V}_2} - \frac{\tilde{V}_2 \cos \theta_1}{\tilde{V}_1} - \tilde{V}_2 + \frac{\tilde{V}_2 + \Delta \tilde{V}_1 \tilde{V}_2 \cos \varphi}{\tilde{V}_1^2} \right). \quad (5.1.28)$$

Подставим теперь производные (5.1.27), (5.1.28) в уравнение (5.1.24) и упростим полученное соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \tilde{V}_\Sigma}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\Delta \tilde{V}_2} \left[ - \left( \tilde{V}_2 - \frac{\cos \theta_2}{\sqrt{\tilde{r}}} \right) \frac{\Delta \tilde{V}_1 \sin \varphi}{\tilde{V}_2} - \frac{\Delta \tilde{V}_1 \sin \varphi}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}} \tilde{V}_2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{\tilde{V}_1 \cos \theta_1}{\tilde{V}_2} - \frac{\tilde{V}_2 \cos \theta_1}{\tilde{V}_1} - \tilde{V}_2 + \frac{\tilde{V}_2 + \Delta \tilde{V}_1 \tilde{V}_2 \cos \varphi}{\tilde{V}_1^2} \right) \right] = \\ &= - \frac{\Delta \tilde{V}_1 \sin \varphi}{\Delta \tilde{V}_2 \tilde{V}_2} \left[ \tilde{V}_2 - \frac{\cos \theta_2}{\sqrt{\tilde{r}}} + \frac{\tilde{V}_1 \cos \theta_1}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}} \tilde{V}_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{V}_2}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}}} \left( - \frac{\cos \theta_1}{\tilde{V}_1} - 1 + \frac{1 + \Delta \tilde{V}_1 \cos \varphi}{\tilde{V}_1^2} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\Delta\tilde{V}_1 \sin \varphi}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}} \tilde{V}_1^2 \Delta\tilde{V}_2} (\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}} \tilde{V}_1^2 - \tilde{V}_1 \cos \theta_1 - \tilde{V}_1^2 + 1 + \Delta\tilde{V}_1 \cos \varphi) = \\
&= -\frac{\Delta\tilde{V}_1 \sin \varphi}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}} \tilde{V}_1^2 \Delta\tilde{V}_2} \left( \tilde{r} \sqrt{\tilde{r}} \tilde{V}_1^2 - \tilde{V}_1 \frac{1 + \Delta\tilde{V}_1 \cos \varphi}{\tilde{V}_1} - \tilde{V}_1^2 + 1 + \Delta\tilde{V}_1 \cos \varphi \right) = \\
&= -\frac{\Delta\tilde{V}_1 \sin \varphi}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}} \Delta\tilde{V}_2} (\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}} - 1),
\end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial \Delta\tilde{V}_\Sigma}{\partial \varphi} = -\frac{\Delta\tilde{V}_1 \sin \varphi}{\Delta\tilde{V}_2} \left( 1 - \frac{1}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}}} \right). \quad (5.1.29)$$

Здесь  $\tilde{r} \neq 1$ , поэтому условие  $\partial \Delta\tilde{V}_\Sigma / \partial \varphi = 0$  может выполняться только при

$$\Delta\tilde{V}_1 = 0 \text{ или } \sin \varphi = 0. \quad (5.1.30)$$

В случае  $\Delta\tilde{V}_1 = 0$  невозможен перелет между круговыми орбитами разных радиусов. Уравнение  $\sin \varphi = 0$  имеет два корня

$$\varphi_1 = 0 \text{ и } \varphi_2 = \pi. \quad (5.1.31)$$

Первый корень ( $\varphi_1 = 0$ ) соответствует разгонному импульсу скорости, который совпадает по направлению с вектором круговой скорости на исходной орбите радиуса  $r_1$  в точке начала маневра. Такая ориентация первого импульса скорости может оказаться оптимальной при перелете с круговой орбиты меньшего радиуса на круговую орбиту большего радиуса. Второй корень ( $\varphi_2 = \pi$ ) определяет тормозной импульс скорости, который направлен против вектора круговой скорости в точке начала маневра. В рассматриваемых условиях перелета с меньшей орбиты на большую подобная ориентация первого импульса скорости не может обеспечить перелет.

Исследуем теперь производную

$$\frac{\partial \Delta\tilde{V}_\Sigma}{\partial \Delta\tilde{V}_1} = 1 + \frac{\partial \Delta\tilde{V}_2}{\partial \Delta\tilde{V}_1}. \quad (5.1.32)$$

Здесь

$$\frac{\partial \Delta\tilde{V}_2}{\partial \Delta\tilde{V}_1} = \frac{1}{\Delta\tilde{V}_2} \left[ \left( \tilde{V}_2 - \frac{\cos \theta_2}{\sqrt{\tilde{r}}} \right) \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial \Delta\tilde{V}_1} - \frac{\tilde{V}_2}{\sqrt{\tilde{r}}} \frac{\partial \cos \theta_2}{\partial \Delta\tilde{V}_1} \right]. \quad (5.1.33)$$

Как и ранее, дифференцируя формулы (5.1.15)–(5.1.18), вычислим все необходимые частные производные

$$\frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial \Delta\tilde{V}_1} = \frac{\Delta\tilde{V}_1 + \cos \varphi}{\tilde{V}_1}, \quad (5.1.34)$$

$$\frac{\partial \cos \theta_1}{\partial \Delta\tilde{V}_1} = \frac{1}{\tilde{V}_1^3} [\tilde{V}_1^2 \cos \varphi - (1 + \Delta\tilde{V}_1 \cos \varphi) (\Delta\tilde{V}_1 + \cos \varphi)], \quad (5.1.35)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial \Delta \tilde{V}_1} = \frac{\Delta \tilde{V}_1 + \cos \varphi}{\tilde{V}_2}, \quad (5.1.36)$$

$$\frac{\partial \cos \theta_2}{\partial \Delta \tilde{V}_1} = \frac{1}{\tilde{r} \tilde{V}_2^3} [\tilde{V}_2^2 \cos \varphi - (1 + \Delta \tilde{V}_1 \cos \varphi)(\Delta \tilde{V}_1 + \cos \varphi)]. \quad (5.1.37)$$

Подставим производные (5.1.33), (5.1.36), (5.1.37) в (5.1.32) и упростим полученное соотношение с учетом формул (5.1.15)–(5.1.18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \tilde{V}_z}{\partial \Delta \tilde{V}_1} &= 1 + \frac{1}{\Delta \tilde{V}_2} \left\{ \left( \tilde{V}_2 - \frac{\cos \theta_2}{\sqrt{\tilde{r}}} \right) \frac{\Delta \tilde{V}_1 + \cos \varphi}{\tilde{V}_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}}} \left[ \tilde{V}_2^2 \cos \varphi - (1 + \Delta \tilde{V}_1 \cos \varphi)(\Delta \tilde{V}_1 + \cos \varphi) \right] \right\} = \\ &= 1 + \frac{1}{\Delta \tilde{V}_2} \left[ \Delta \tilde{V}_1 + \cos \varphi - \frac{1}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}}} (\Delta \tilde{V}_1 + \cos \varphi) \tilde{V}_1 \cos \theta_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos \varphi}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}}} + \frac{1}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}}} (1 + \Delta \tilde{V}_1 \cos \varphi)(\Delta \tilde{V}_1 + \cos \varphi) \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{\Delta \tilde{V}_2} \left[ \Delta \tilde{V}_1 + \cos \varphi \left( 1 - \frac{1}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}}} \right) \right]. \quad (5.1.38) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при  $\cos \varphi > 0$ , когда происходит увеличение трансверсальной составляющей скорости, имеет место неравенство

$$\frac{\partial \Delta \tilde{V}_z}{\partial \Delta \tilde{V}_1} > 0. \quad (5.1.39)$$

Таким образом, производные  $\partial \Delta \tilde{V}_z / \partial \varphi$ ,  $\partial \Delta \tilde{V}_z / \partial \Delta \tilde{V}_1$  не могут обращаться в нуль одновременно, и функция  $\Delta \tilde{V}_z(\varphi, \Delta \tilde{V}_1)$  не имеет стационарных точек ни при каких значениях  $\varphi$  и  $\Delta \tilde{V}_1$ . Поэтому наименьшее значение  $\Delta \tilde{V}_z$  при двухимпульсном перелете между круговыми орбитами должно достигаться на границе области (5.1.21a), т. е. при  $\cos \theta_2 = 1$ .

При выполнении условий  $\varphi = 0$  и  $\cos \theta_2 = 1$  (или  $\theta_2 = 0$ ) реализуется траектория перелета типа полуэллипса Гоманна, касающаяся начальной и конечной круговых орбит. Соответствующие импульсы скорости вычисляются по формулам

$$\Delta \tilde{V}_1 = \sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}}} - 1, \quad (5.1.40)$$

$$\Delta \tilde{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}}} \right). \quad (5.1.41)$$

Заметим, что между первым и вторым импульсами скорости при таком маневре может располагаться любое нечетное число полу-

ритков орбиты перелета, имеющей радиус перицентра  $r_{\text{п}} = r_1$  и радиус апоцентра  $r_{\text{а}} = r_2$ . В рассматриваемой постановке протяженность орбиты (траектории) перелета, содержащей нечетное число полуэллипсов Гоманна, не влияет на величину суммарного приращения скорости при маневре.

Приведенное доказательство оптимальности траектории типа полуэллипса Гоманна соответствует перелету с круговой орбиты меньшего радиуса на круговую орбиту большего радиуса. В силу обратимости задачи такая траектория является оптимальной и в случае перелета с круговой орбиты большего радиуса на круговую орбиту меньшего радиуса.

Исследуем зависимость от  $\tilde{r}$  суммарного приращения скорости при перелете по полуэллипсу Гоманна между круговыми орбитами радиусов  $r_1 < r_2$  (т. е. при  $\tilde{r} > 1$ ):

$$\Delta\tilde{V}_{\Sigma}(\tilde{r}) = \frac{\Delta V_{\Sigma}}{V_{\text{кр1}}} = \sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}} - 1} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}}} \right). \quad (5.1.42)$$

Согласно (5.1.40) зависимость  $\Delta\tilde{V}_1(\tilde{r})$  монотонно возрастает, причем

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \Delta\tilde{V}_1 = \sqrt{2} - 1,$$

что соответствует параболической скорости отлета с начальной круговой орбиты. Зависимость  $\Delta\tilde{V}_2(\tilde{r})$  сначала возрастает, а затем убывает, так как

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \Delta\tilde{V}_2 = 0.$$

Поэтому зависимость  $\Delta\tilde{V}_{\Sigma}(\tilde{r})$  может иметь максимум при некотором значении  $\tilde{r} = \tilde{r}_{\text{экс}}$ . Дифференцируя соотношение (5.1.42) по  $\tilde{r}$ , получим после некоторых преобразований

$$\frac{d\Delta\tilde{V}_{\Sigma}}{d\tilde{r}} = \frac{2\sqrt{2}\tilde{r} - (1+\tilde{r})(\sqrt{1+\tilde{r}} - \sqrt{2})}{2\tilde{r}(1+\tilde{r})\sqrt{\tilde{r}(1+\tilde{r})}}. \quad (5.1.43)$$

Полагая теперь  $d\Delta\tilde{V}_{\Sigma}/d\tilde{r} = 0$ , найдем условие обращения в нуль числителя (5.1.43)

$$\tilde{r}^3 - 15\tilde{r}^2 - 9\tilde{r} - 1 = 0. \quad (5.1.44)$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень

$$\tilde{r}_{\text{экс}} = 15,58, \quad (5.1.45)$$

при котором зависимость  $\Delta\tilde{V}_{\Sigma}(\tilde{r})$  достигает максимума:

$$\max_{\tilde{r}} \Delta\tilde{V}_{\Sigma} = 0,536. \quad (5.1.46)$$

Поскольку

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \Delta\tilde{V}_{\Sigma} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414,$$

то зависимость  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r})$  должна еще иметь точку перегиба при  $\tilde{r} > \tilde{r}_{\text{экс}}$  и горизонтальную асимптоту.

На рис. 5.3 приведены зависимости  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$  и составляющих  $\Delta\tilde{V}_1$ ,  $\Delta\tilde{V}_2$  от величины  $\tilde{r}$ . Если  $\tilde{r} > 3,4$ , перелет требует большего приращения скорости, чем уход от притягивающего центра по

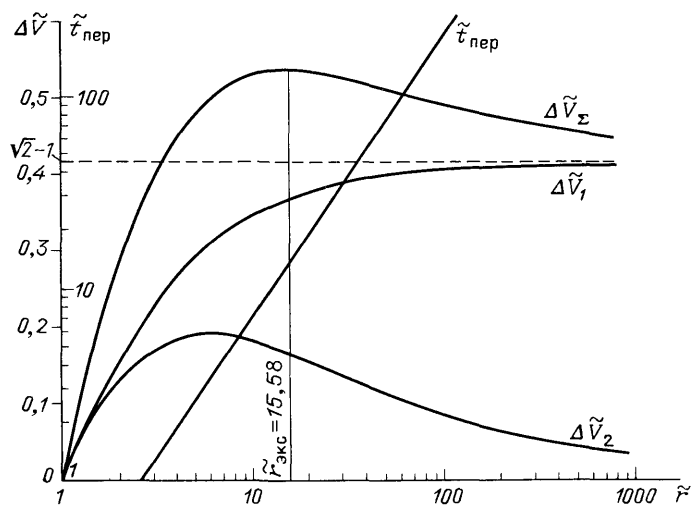


Рис. 5.3 Характеристики перелета между круговыми орбитами по полуэллипсу Гоманна

параболической траектории. Если располагаемое приращение  $\Delta\tilde{V}_\Sigma \geq 0,536$ , что позволяет перелететь на орбиту радиуса  $r_2 = 15,58r_1$ , то перелет может быть выполнен также на любую круговую орбиту (произвольного радиуса).

Время движения по траектории перелета типа полуэллипса Гоманна вычислим с использованием формулы (2.5.10):

$$t_{\text{пер}} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{r_1 + r_2}{2} \right)^{3/2}. \quad (5.1.47)$$

Если отнести время перелета к периоду обращения на меньшей орбите

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r_1^{3/2},$$

получим

$$\tilde{t}_{\text{пер}}(\tilde{r}) = \frac{t_{\text{пер}}}{T_1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 + \tilde{r})^{3/2}. \quad (5.1.48)$$

С увеличением  $\tilde{r}$  относительное время перелета монотонно возрастает (рис. 5.3).



**5.1.3. Сокращение времени перелета.** В некоторых задачах перелета между круговыми орбитами существенное значение имеет ограничение времени маневра. Вместе с тем потребное приращение скорости  $\Delta V_{\Sigma}$  на маневр не должно быть слишком большим. Если требуемое время перелета меньше времени перелета по полуэллипсу Гоманна, в качестве компромиссного решения можно принять такую траекторию, которая касается внутренней круговой орбиты и пересекает внешнюю (рис. 5.4). В этом случае исключается участок движения вблизи апоцентра траектории, который существенно увеличивает время перелета по полуэллипсу Гоманна.

Для расчета таких траекторий перелета в качестве независимого переменного удобно рассматривать радиус апоцентра  $r_a$  (радиус перигея задается условием  $r_{\pi} = r_1$ ). Время перелета  $t_{\text{пер}}$  и потребное приращение скорости на маневр  $\Delta V_{\Sigma}$  вычисляются в зависимости от величины  $r_a$ . Обсудим последовательность вычислений. Пусть  $r_{\pi} = r_1$  и зафиксировано некоторое значение  $r_a > r_2$ . По формулам (2.4.13) и (2.4.14) вычислим параметр

$$p = \frac{2r_1 r_a}{r_1 + r_a}, \quad (5.1.49)$$

эксцентриситет

$$e = \frac{r_a - r_1}{r_1 + r_a} = \frac{\tilde{r}_a - 1}{1 + \tilde{r}_a} \quad \left( r_a = \frac{r_a}{r_1} \right) \quad (5.1.50)$$

и величину большой полуоси

$$a = \frac{r_1 + r_a}{2} \quad (5.1.51)$$

перелетной эллиптической орбиты. Затем из уравнения этой орбиты найдем для точки ее пересечения с заданной круговой орбитой радиуса  $r_2$

$$\cos \vartheta_2 = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_2} - 1 \right) = \frac{2\tilde{r}_a - \tilde{r}(1 + \tilde{r}_a)}{\tilde{r}(\tilde{r}_a - 1)} \quad (0 < \vartheta_2 \leq \pi) \quad (5.1.52)$$

и вычислим

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta_2}{1 + \cos \vartheta_2}} = \sqrt{\frac{\tilde{r}_a(\tilde{r} - 1)}{\tilde{r}_a - \tilde{r}}}.$$

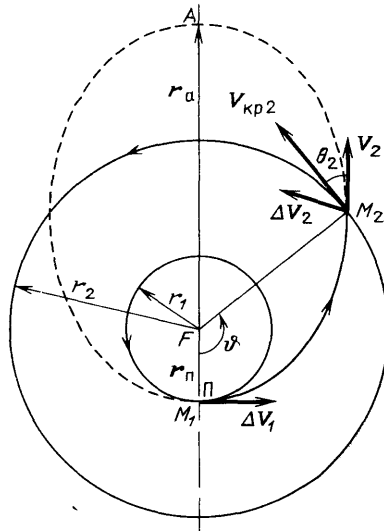


Рис 5.4 Схема перелета с пересечением внешней круговой орбиты

Здесь  $\tilde{r} = r_2/r_1$ . С помощью формулы (2.5.6) получим далее для эксцентрической аномалии

$$\operatorname{tg} \frac{E_2}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2} = \sqrt{\frac{\tilde{r}-1}{\tilde{r}_a-\tilde{r}}} \quad (5.1.53)$$

и

$$\sin E_2 = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{E_2}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{E_2}{2}} = \frac{2 \sqrt{(\tilde{r}-1)(\tilde{r}_a-\tilde{r})}}{\tilde{r}_a-1}. \quad (5.1.54)$$

Используя теперь уравнение (2.5.8), определим время перелета, отнесенное к периоду обращения на исходной орбите:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{\text{пер}} &= \frac{t_{\text{пер}}}{T_1} = \frac{a^{3/2}}{2\pi r_1^{3/2}} (E_2 - e \sin E_2) = \\ &= \frac{(1+\tilde{r})^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi} \left[ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\tilde{r}-1}{\tilde{r}_a-\tilde{r}}} - \frac{\sqrt{(\tilde{r}-1)(\tilde{r}_a-\tilde{r})}}{1+\tilde{r}_a} \right]. \end{aligned} \quad (5.1.55)$$

Зная истинную аномалию  $\vartheta_2$ , можно по формуле (2.3.8) определить скорость КА в момент пересечения круговой орбиты радиуса  $r_2$

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{p} (1 + 2e \cos \vartheta_2 + e^2)},$$

или с учетом уравнения орбиты —

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{p} \left( \frac{2p}{r_2} - 1 + e^2 \right)}. \quad (5.1.56)$$

Для угла наклона траектории имеем соотношение

$$\cos \theta_2 = \frac{V_n}{V_2},$$

где согласно (2.3.7) и уравнению орбиты

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta_2) = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{p}{r_2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \frac{\frac{p}{r_2}}{\sqrt{\frac{2p}{r_2} - 1 + e^2}} = \frac{\frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r}(1+\tilde{r}_a)}}{\sqrt{\frac{4\tilde{r}_a}{\tilde{r}(1+\tilde{r}_a)} - 1 + \left( \frac{\tilde{r}_a-1}{1+\tilde{r}_a} \right)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\tilde{r}_a}{\tilde{r}(1+\tilde{r}_a-\tilde{r})}}. \end{aligned} \quad (5.1.57)$$

Определим теперь потребное приращение скорости на маневр. Величина первого импульса скорости вычисляется по формуле вида (5.1.40), где вместо  $r_2$  стоит  $r_a$ . Следовательно,

$$\Delta \tilde{V}_1 = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a} - 1}.$$

Величину второго импульса скорости можно определить из треугольника скоростей в точке пересечения перелетной орбиты с

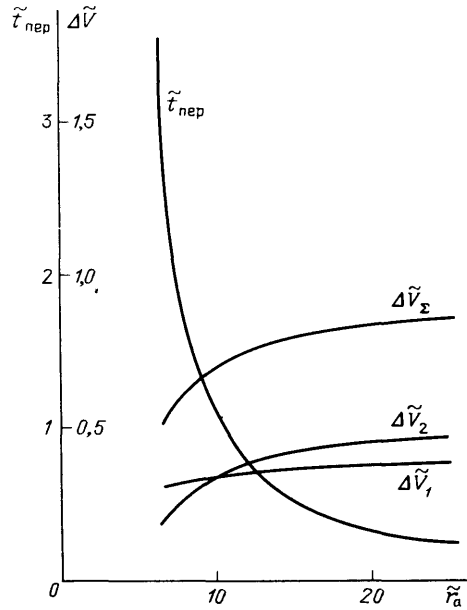


Рис. 5.5. Характеристики ускоренного перелета между круговыми орбитами ( $\tilde{r} = 6,36$ )

заданной круговой орбитой радиуса  $r_2$ :

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_{кр2}^2 + V_2^2 - 2V_2V_{кр2} \cos \theta_2}. \quad (5.1.58)$$

Отнеся  $\Delta V_2$  к  $V_{кр1}$  и учитывая соотношения (5.1.49), (5.1.50), (5.1.57), (5.1.58), получим

$$\Delta \tilde{V}_2 = \sqrt{\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{r_1}{p} \left( \frac{2p}{r_2} - 1 + e^2 \right) - \frac{2 \cos \theta_2}{\sqrt{\tilde{r}}} \sqrt{\frac{r_1}{p} \left( \frac{2p}{r_2} - 1 + e^2 \right)},}$$

где

$$\frac{2p}{r_2} - 1 + e^2 = \frac{4\tilde{r}_a}{\tilde{r}(1 + \tilde{r}_a)} - 1 + \left( \frac{\tilde{r}_a - 1}{1 + \tilde{r}_a} \right)^2 = \frac{4\tilde{r}_a(1 + \tilde{r}_a - \tilde{r})}{\tilde{r}(1 + \tilde{r}_a)^2}.$$

поэтому

$$\Delta\tilde{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \sqrt{1 + \frac{2(1 + \tilde{r}_a - \tilde{r})}{1 + \tilde{r}_a}} - 2 \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r}(1 + \tilde{r}_a)}}. \quad (5.1.59)$$

На рис. 5.5 построены относительные величины первого  $\Delta\tilde{V}_1$  и второго  $\Delta\tilde{V}_2$  импульсов скорости, суммарного приращения скорости  $\Delta\tilde{V}_\Sigma = \Delta\tilde{V}_1 + \Delta\tilde{V}_2$  и относительное время маневра при ускоренном перелете между круговыми орбитами с  $\tilde{r} = 6,36$ . Видно, что за счет увеличения  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$  в 1,3 раза можно добиться сокращения времени маневра в 3 раза.

### § 5.2. Трехимпульсный биэллиптический перелет между компланарными круговыми орбитами

Рассмотрим в несколько более общей постановке трехимпульсный перелет между круговыми орбитами, подобный предложенному Штернфельдом [61]. Для определенности будем полагать, что перелет совершается с круговой орбиты меньшего радиуса  $r_1$  на круговую орбиту большего радиуса  $r_2$ . С помощью первого, разгонного импульса скорости  $\Delta V_1$  КА переводится на эллиптическую орбиту, радиус перигея которой равен радиусу начальной круговой орбиты ( $r_{п1} = r_1$ ). В целях общности анализа примем, что величина радиуса апогея траектории перелета может быть как больше радиуса конечной орбиты ( $r_a > r_2$ ), так и меньше нее ( $r_a < r_2$ ). В апоцентре траектории перелета прикладывается второй, тоже разгонный импульс скорости  $\Delta V_2$  для увеличения радиуса перигея (или нового апогея, если  $r_a < r_2$ ) до величины, равной радиусу конечной орбиты  $r_{п2} = r_2$  (или  $r_{а2} = r_2$ ). При достижении перигея (апогея) прикладывается третий импульс, тормозной (если  $r_a > r_2$ ) или разгонный (если  $r_a < r_2$ ), для выравнивания скорости до круговой, соответствующей орбите радиуса  $r_2$ . Обе возможные схемы трехимпульсного маневра приведены на рис. 5.6, а и б. Такой маневр часто называют *двойным эллиптическим* или *биэллиптическим*.

**5.2.1. Выбор оптимальной схемы маневра.** Суммарное приращение скорости на биэллиптический маневр, отнесенное к круговой скорости начальной орбиты  $V_{кр1}$ , вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a) &= \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3}{V_{кр1}} = \\ &= \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_a}} \left( \sqrt{\frac{2\tilde{r}}{\tilde{r} + \tilde{r}_a}} - \sqrt{\frac{2}{1 + \tilde{r}_a}} \right) \pm \\ &\quad \pm \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left( \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r} + \tilde{r}_a}} - 1 \right), \quad (5.2.1) \end{aligned}$$

где  $\tilde{r}_a = r_a/r_1$  — относительный радиус апоцентра,  $\tilde{r} = r_2/r_1$ . Знак «+» отвечает случаю  $r_a > r_2$ , а знак «-» используется в случае  $r_a < r_2$ . При заданной величине  $\tilde{r}$ , т. е. при фиксированных радиусах начальной и конечной орбит, суммарное приращение скорости на

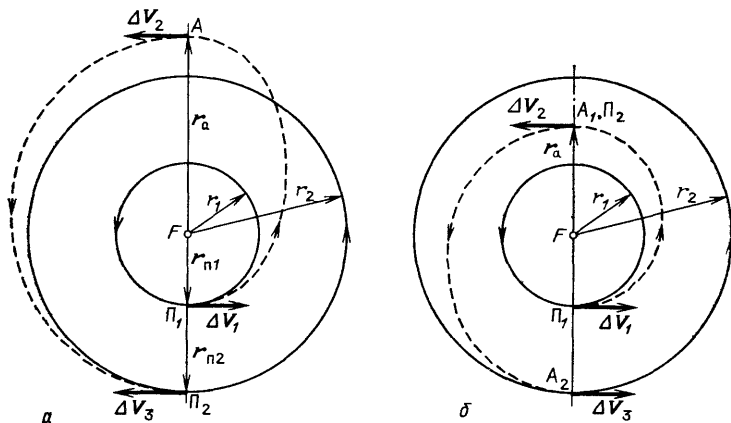


Рис. 5.6. Схема трехимпульсного перелета между круговыми орбитами: а — с пересечением заданной орбиты; б — без пересечения заданной орбиты

трехимпульсный биэллиптический маневр будет зависеть от величины относительного радиуса апоцентра  $\tilde{r}_a$ . Естественно возникают следующие вопросы:

1. При какой величине  $\tilde{r}_a$  потребное приращение скорости на биэллиптический маневр оказывается минимальным?

2. Когда трехимпульсный биэллиптический маневр оказывается экономичнее по  $\Delta V_{\Sigma}$ , чем двухимпульсный маневр Гоманна?

Как показано в работе [78], при  $\tilde{r} > 15,58$  трехимпульсный биэллиптический маневр с  $\tilde{r}_a > \tilde{r}$  экономичнее двухимпульсного, а при  $\tilde{r} > 11,94$  можно выбрать такую величину  $\tilde{r}_a > \tilde{r}$ , при которой трехимпульсный маневр будет экономичнее двухимпульсного. Однако общее исследование обуждаемой задачи не опубликовано в доступной литературе, поэтому ниже приводится одно из возможных ее решений.

Будем рассматривать весь диапазон изменения относительного радиуса апоцентра

$$1 \leq \tilde{r}_a < \infty,$$

который разделим на две части. Первая часть отвечает траектории перелета без пересечения конечной орбиты (рис. 5.6, б)

$$1 \leq \tilde{r}_a \leq \tilde{r}, \quad (5.2.2)$$

а вторая — траектории перелета с пересечением конечной орбиты (рис. 5.6, а)

$$\tilde{r} \leq \tilde{r}_a < \infty. \quad (5.2.3)$$

Продифференцируем по  $\tilde{r}_a$  формулу (5.2.1):

$$\frac{d\Delta\tilde{V}_\Sigma}{d\tilde{r}_a} = \frac{(1+3\tilde{r}_a)(\tilde{r}+\tilde{r}_a)\sqrt{\tilde{r}+\tilde{r}_a} - (1+\tilde{r}_a)(\tilde{r}+2\tilde{r}_a\mp\tilde{r}_a)\sqrt{\tilde{r}(1+\tilde{r}_a)}}{\tilde{r}_a(1+\tilde{r}_a)(\tilde{r}+\tilde{r}_a)\sqrt{2\tilde{r}_a(1+\tilde{r}_a)(\tilde{r}+\tilde{r}_a)}}. \quad (5.2.4)$$

Чтобы избавиться от квадратных корней в числителе, умножим правую часть (5.2.4) на

$$(1+3\tilde{r}_a)(\tilde{r}+\tilde{r}_a)\sqrt{\tilde{r}+\tilde{r}_a} + (1+\tilde{r}_a)(\tilde{r}+2\tilde{r}_a\mp\tilde{r}_a)\sqrt{\tilde{r}(1+\tilde{r}_a)} > 0,$$

тогда

$$\frac{d\Delta\tilde{V}_\Sigma}{d\tilde{r}_a} = \frac{(1+3\tilde{r}_a)^2(\tilde{r}+\tilde{r}_a)^3 - \tilde{r}(1+\tilde{r}_a)^3(\tilde{r}+2\tilde{r}_a\mp\tilde{r}_a)^2}{\tilde{r}_a(1+\tilde{r}_a)(\tilde{r}+\tilde{r}_a)\sqrt{2\tilde{r}_a(1+\tilde{r}_a)(\tilde{r}+\tilde{r}_a)}} \times \\ \times \frac{1}{(1+3\tilde{r}_a)(\tilde{r}+\tilde{r}_a)\sqrt{\tilde{r}+\tilde{r}_a} + (1+\tilde{r}_a)(\tilde{r}+2\tilde{r}_a\mp\tilde{r}_a)\sqrt{\tilde{r}(1+\tilde{r}_a)}}. \quad (5.2.5)$$

Знаменатель соотношения (5.2.5) положителен, поэтому знак производной  $d\Delta\tilde{V}_\Sigma/d\tilde{r}_a$  определяется знаком функции

$$\Phi(\tilde{r}_a) = (1+3\tilde{r}_a)^2(\tilde{r}+\tilde{r}_a)^3 - \tilde{r}(1+\tilde{r}_a)^3(\tilde{r}+2\tilde{r}_a\mp\tilde{r}_a)^2, \quad (5.2.6)$$

коэффициенты которой, а следовательно, и корни зависят, как от параметра, от соотношения радиусов  $\tilde{r}$  конечной и начальной орбит. Исследуем все возможные случаи.

Предположим, что траектория перелета не пересекает конечной орбиты, т. е. параметр  $\tilde{r}_a$  принадлежит диапазону (5.2.2). Тогда в последней скобке (5.2.6) следует взять знак «+», и функция  $\Phi(\tilde{r}_a)$  приведет к виду

$$\Phi(\tilde{r}_a) = \\ = \tilde{r}_a(\tilde{r}-1)[9\tilde{r}_a^4 + 6(\tilde{r}+1)\tilde{r}_a^3 + (\tilde{r}^2 - 8\tilde{r} + 1)\tilde{r}_a^2 - 6\tilde{r}(\tilde{r}+1)\tilde{r}_a - 3\tilde{r}^2].$$

Для вычисления корней положим  $\Phi(\tilde{r}_a) = 0$ . Поскольку  $\tilde{r}_a \neq 0$  и  $\tilde{r} > 1$ , то должно выполняться условие

$$9\tilde{r}_a^4 + 6(\tilde{r}+1)\tilde{r}_a^3 + (\tilde{r}^2 - 8\tilde{r} + 1)\tilde{r}_a^2 - 6\tilde{r}(\tilde{r}+1)\tilde{r}_a - 3\tilde{r}^2 = 0. \quad (5.2.7)$$

Число перемен знаков в последовательности коэффициентов этого многочлена равно 1. Отсюда по правилу знаков Декарта уравнение (5.2.7) будет иметь только один положительный корень  $\tilde{r}_a^*$ .

Покажем, что при  $\tilde{r}_a = \tilde{r}_a^*$  достигается максимум зависимости  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a)$  для значений  $\tilde{r}_a$ , принадлежащих диапазону (5.2.2). На левом конце этого диапазона  $\tilde{r}_a = 1$ , и потребное приращение скорости согласно (5.2.1) вычисляется по формуле

$$\Delta\tilde{V}_\Sigma(1) = \sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}}} \right).$$

Следовательно, трехимпульсный биэллиптический перелет трансформируется в двухимпульсный перелет Гоманна из-за обращения в нуль первого импульса скорости. На правом конце отрезка (5.2.2)  $\tilde{r}_a = \tilde{r}$ , и имеет место такая же трансформация из-за обращения в нуль третьего импульса скорости. Таким образом, в граничных точках отрезка (5.2.2) потребное приращение скорости одно и то же.

Определим теперь знак производной  $d\Delta\tilde{V}_\Sigma/d\tilde{r}_a$  на левом конце диапазона (5.2.2). С этой целью подставим значение  $\tilde{r}_a = 1$  в (5.2.4), тогда получим

$$\left. \frac{d\Delta\tilde{V}_\Sigma}{d\tilde{r}_a} \right|_{\tilde{r}_a=1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{1+3\tilde{r}}} \cdot \frac{\tilde{r}+3}{1+3\tilde{r}}. \quad (5.2.8)$$

Здесь вычитаемое меньше 1, так как представляет собой произведение трех правильных дробей. Поскольку функция  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a)$  принимает на концах диапазона (5.2.2) одинаковые значения, а ее производная на левом конце положительна и имеется единственный корень  $\tilde{r}_a^*$  внутри указанного диапазона, то в точке  $\tilde{r}_a = \tilde{r}_a^*$  действительно реализуется максимум функции  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a)$ .

Итак, если траектория трехимпульсного биэллиптического перелета не пересекает конечной орбиты ( $1 \leq \tilde{r}_a \leq \tilde{r}$ ), суммарное приращение скорости на ее реализацию при любой величине  $\tilde{r}_a$  оказывается больше, чем в случае двухимпульсной траектории перелета типа Гоманна.

Исследуем теперь второй случай, когда трехимпульсная биэллиптическая траектория перелета пересекает конечную орбиту, т. е.  $\tilde{r}_a$  принадлежит диапазону (5.2.3). В этом случае производную (5.2.4) можно привести к виду

$$\frac{d\Delta\tilde{V}_\Sigma}{d\tilde{r}_a} = \frac{(9 - \tilde{r})\tilde{r}_a^2 + 6(1 + \tilde{r})\tilde{r}_a + 3\tilde{r} + 1}{(1 + \tilde{r}_a)\sqrt{2\tilde{r}_a(1 + \tilde{r}_a)(\tilde{r} + \tilde{r}_a)} \left[ \sqrt{(1 + 3\tilde{r}_a)^2(\tilde{r} + \tilde{r}_a)} + \sqrt{\tilde{r}(1 + \tilde{r}_a)^3} \right]} \quad (5.2.9)$$

а ее знак определяется знаком квадратичной функции

$$\Phi(\tilde{r}_a) = (9 - \tilde{r})\tilde{r}_a^2 + 6(1 + \tilde{r})\tilde{r}_a + 3\tilde{r} + 1. \quad (5.2.10)$$

Определим знаки функции (5.2.10) в зависимости от значения параметра  $\tilde{r}$ . Если  $\tilde{r} \leq 9$ , то  $\Phi(\tilde{r}_a) > 0$ ; отсюда следует, что  $d\Delta\tilde{V}_\Sigma/d\tilde{r}_a > 0$ , и величина  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$  растет с увеличением относительного радиуса апоцентра  $\tilde{r}_a$  траектории перелета. Минимальное суммарное приращение скорости на маневр достигается на левой границе диапазона (5.2.3), когда  $\tilde{r}_a = \tilde{r}$  и трехимпульсный биэллиптический перелет трансформируется в двухимпульсный перелет типа Гоманна.

Если  $\tilde{r} > 9$ , то первый коэффициент квадратичной функции (5.2.9) отрицателен и она имеет один положительный корень

$$\tilde{r}_a^* = \frac{3(1+\tilde{r}) + 2\sqrt{\tilde{r}(3\tilde{r}-2)}}{\tilde{r}-9}. \quad (5.2.11)$$

Величина  $\tilde{r}_a^*$  должна удовлетворять условию  $\tilde{r}_a^* \geq \tilde{r}$ , т. е. биэллиптическая траектория перелета должна пересекать конечную круговую орбиту или по крайней мере касаться ее. Запишем это условие с учетом (5.2.11):

$$2\sqrt{\tilde{r}(3\tilde{r}-2)} \geq \tilde{r}^2 - 12\tilde{r} - 3. \quad (5.2.12)$$

Возводя обе части (5.2.12) в квадрат, получим после несложных преобразований

$$\tilde{r}^4 - 24\tilde{r}^3 + 126\tilde{r}^2 + 80\tilde{r} + 9 \leq 0,$$

или

$$(\tilde{r}-9)(\tilde{r}^3 - 15\tilde{r}^2 - 9\tilde{r} - 1) \leq 0.$$

В рассматриваемом случае  $\tilde{r} > 9$ , откуда должно выполняться условие

$$\tilde{r}^3 - 15\tilde{r}^2 - 9\tilde{r} - 1 \leq 0. \quad (5.2.13)$$

Кубический многочлен в левой части (5.2.13) имеет один положительный корень  $\tilde{r} = 15,58$  (см. п. 5.1), и условие (5.2.13), или, что то же самое,  $\tilde{r}_a^* \geq \tilde{r}$ , выполняется при  $\tilde{r} \leq 15,58$ . Итак, при

$$9 < \tilde{r} \leq 15,58 \quad (5.2.14)$$

квадратичная функция (5.2.10) обращается в нуль в точке  $\tilde{r}_a = r_a^*$ , определяемой формулой (5.2.11) и удовлетворяющей ограничению  $\tilde{r}_a \geq \tilde{r}$ . График квадратичной функции  $\Phi(\tilde{r}_a)$  при  $\tilde{r} > 9$  направлен выпуклостью вверх. Функция  $\Phi(\tilde{r}_a)$  положительна при  $\tilde{r} \leq \tilde{r}_a < \tilde{r}_a^*$  и отрицательна при  $\tilde{r}_a > \tilde{r}_a^*$ .

Для значений параметра  $\tilde{r} > 15,58$  функция  $\Phi(\tilde{r}_a)$  не имеет положительных корней, удовлетворяющих условию  $\tilde{r}_a^* \geq \tilde{r}$ , т. е. не изменяет своего знака в диапазоне

$$\tilde{r} \leq \tilde{r}_a < \infty. \quad (5.2.15)$$

Определим этот знак. Когда  $\tilde{r} \rightarrow \infty$ ,  $\Phi(\tilde{r}_a) < 0$ . Следовательно, для всех значений параметра  $\tilde{r} > 15,58$  будет выполняться условие  $\Phi(\tilde{r}_a) < 0$ .

Поскольку знак функции  $\Phi(\tilde{r}_a)$  совпадает со знаком производной  $d\Delta\tilde{V}_z/d\tilde{r}_a$ , полученные результаты означают, что в диапазоне значений параметра  $\tilde{r}$  (5.2.14) функция  $\Delta\tilde{V}_z(\tilde{r}_a)$  в точке  $\tilde{r}_a^*$  имеет максимум. Минимальное значение  $\Delta\tilde{V}_z$  будет достигаться в одной из граничных точек диапазона (5.2.15). При  $\tilde{r}_a = \tilde{r}$  реализуется двухимпульсный перелет типа Гоманна. При  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$  (когда  $\tilde{r} \rightarrow 9$  справа) имеет место трехимпульсный перелет, для которого радиус



точки сопряжения перелетных эллипсов неограниченно возрастает а величина второго импульса скорости стремится к нулю. Потребное приращение скорости на предельный биэллиптический перелет вычисляется по формуле

$$\Delta \tilde{V}_\Sigma |_{\tilde{r}_a \rightarrow \infty} = (\sqrt{2} - 1) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \right). \quad (5.2.16)$$

Если значение параметра  $\tilde{r} > 15,58$ , то  $d\Delta \tilde{V}_\Sigma / d\tilde{r}_a < 0$  и функция  $\Delta \tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a)$  уменьшается с увеличением  $\tilde{r}_a$ . Наименьшая величина  $\Delta \tilde{V}_\Sigma$  на трехимпульсный биэллиптический перелет достигается, когда  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ . На рис. 5.7 построены примеры зависимостей  $\Delta \tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a)$  для некоторых значений параметра  $\tilde{r}$ .

**5.2.2. Области оптимальности двух- и трехимпульсных маневров.** Вернемся к анализу случая, когда параметр  $\tilde{r}$  принадлежит диапазону (5.2.14), и определим, какое из граничных значений радиуса апоцентра орбиты перелета ( $\tilde{r}_a = \tilde{r}$  или  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ ) обеспечивает минимальное значение суммарного приращения скорости. Сравним потребные приращения скорости на двухимпульсный перелет по траектории типа Гоманна ( $\tilde{r}_a = \tilde{r}$ ) и перелет по предельной биэллиптической траектории ( $r_a \rightarrow \infty$ ). Разница между потребными приращениями скорости на маневр в указанных случаях вычисляется по формуле

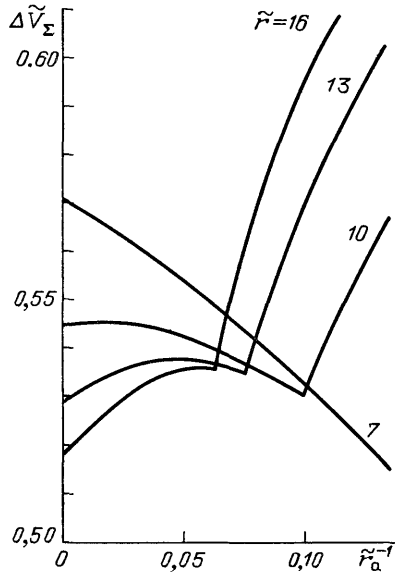


Рис. 5.7. Зависимость потребного приращения скорости от радиуса апоцентра биэллиптической траектории

$$\delta \tilde{V}(\tilde{r}) = \sqrt{2} \left[ \frac{\tilde{r} - 1}{\sqrt{\tilde{r}(1 + \tilde{r})}} + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{\tilde{r}}} - 1 \right]. \quad (5.2.17)$$

Эта разница обращается в нуль, если

$$\frac{\tilde{r}^* - 1}{\sqrt{1 + \tilde{r}^*}} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{\tilde{r}^*}.$$

Возведем обе части равенства в квадрат и приведем полученное соотношение к виду

$$1 - \sqrt{2} + (3 - \sqrt{2})\tilde{r}^* = (\sqrt{2} - 1)(1 + \tilde{r}^*)\sqrt{\tilde{r}^*}.$$

Снова возводя в квадрат, получим кубическое уравнение

$$(3 - 2\sqrt{2})\tilde{r}^{*3} - (5 - 2\sqrt{2})\tilde{r}^{*2} + (6\sqrt{2} - 7)\tilde{r}^* - (3 - 2\sqrt{2}) = 0. \quad (5.2.18)$$

Это уравнение имеет три положительных корня. Только один из них  $\tilde{r}^* = 11,94$  больше 1. Проверим, что этот корень не является лишним. Подставив найденное значение в (5.2.17), убедимся, что  $\delta\tilde{V}(11,94) = 0$ . Легко проверить также, что

$$\delta\tilde{V}(\tilde{r}) \begin{cases} < 0, & \text{если } 9 < \tilde{r} < 11,94, \\ > 0, & \text{если } 11,94 < \tilde{r} < 15,58 \end{cases}$$

(рис. 5.8). Тем самым устанавливается граница значений параметра ( $\tilde{r}^* = 11,94$ ), до которой двухимпульсный перелет типа Гоманна

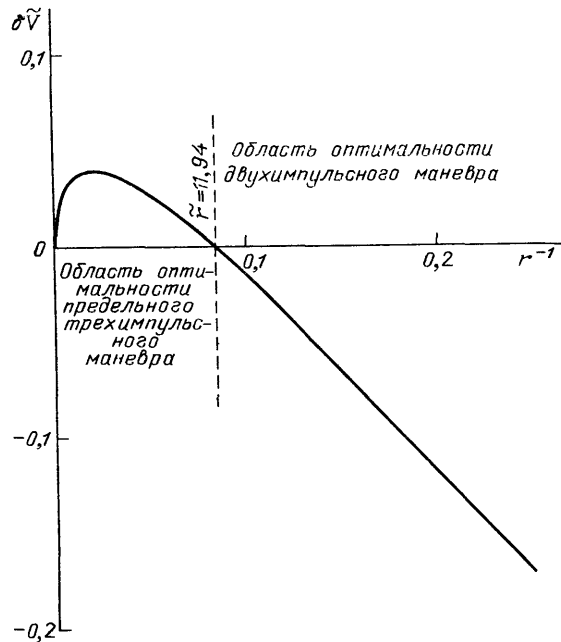


Рис. 5.8. Разница суммарного приращения скорости при двухимпульсном маневре типа Гоманна и предельном ( $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ ) биэллиптическом маневре

оказывается экономичнее трехимпульсного биэллиптического перелета с любым радиусом апоцентра  $\tilde{r}_a$ .

Объединяя полученные результаты, сформулируем следующие рекомендации. При  $1 < \tilde{r} < 11,94$  выгоднее использовать двухимпульсную траекторию перелета типа Гоманна. В диапазоне

$$11,94 < \tilde{r} < 15,58 \quad (5.2.19)$$

можно выбрать такую величину радиуса апоцентра траектории перелета

$$\tilde{r} < \tilde{r}_a < \infty,$$

при которой трехимпульсный биэллиптический перелет оказывается экономичнее двухимпульсного перелета типа Гоманна. Для значений  $\tilde{r} > 15,58$  трехимпульсный перелет с любым радиусом апоцентра ( $\tilde{r}_a > \tilde{r}$ ) экономичнее, чем двухимпульсный перелет. Отметим, что выигрыш, получаемый при использовании трехимпульсного перелета вместо гоманновского, в наилучшем случае не превышает величины  $0,04V_{кр1}$ , т. е. 8% от суммарного приращения скорости для двухимпульсного перелета.

Обозначим через  $\tilde{r}_{a\min}$  величину радиуса апоцентра, при которой трехимпульсный биэллиптический перелет и двухимпульсный перелет типа Гоманна требуют одинакового суммарного приращения скорости для любого значения параметра  $\tilde{r}$  из диапазона (5.2.19).

Тогда трехимпульсный биэллиптический перелет экономичнее двухимпульсного, если  $\tilde{r}_a > \tilde{r}_{a\min}$ . Соответствующие области оптимальности двух- и трехимпульсных маневров показаны на рис. 5.9 [27]. Необходимо отметить, что время на трехимпульсный маневр в несколько раз больше, чем время на двухимпульсный маневр.

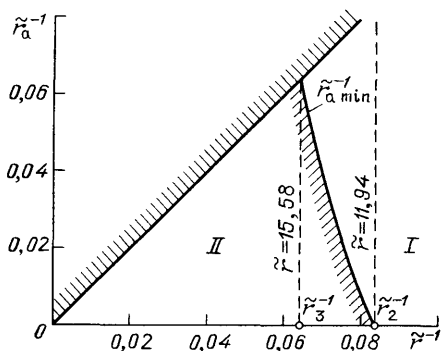


Рис. 5.9. Области оптимальности (I) двух- и (II) трехимпульсных перелетов между круговыми орбитами

### § 5.3. Перелет с круговой орбиты на компланарную эллиптическую

Рассмотрим задачу перелета КА с начальной круговой орбиты радиуса  $r_{кр}$  на эллиптическую орбиту, которая задана величинами радиусов перигея  $r_{п2}$  и апогея  $r_{а2}$  (или значениями эксцентриситета  $e_2$  и параметра  $p_2$ ). Если эти орбиты не пересекаются, то для выполнения маневра требуется не менее двух импульсов скорости. В случае пересечения орбит возможен также одноимпульсный маневр.

Пусть выбраны положение начальной точки  $M_1$  орбиты перелета, величина  $\Delta V_1$  и угол  $\varphi_1$  относительно местного горизонта первого импульса скорости (рис. 5.10). Определим суммарное потребное приращение скорости для двухимпульсного маневра.

По формулам (5.1.10) и (5.1.11) вычислим величину скорости  $V_1$  и косинус угла наклона траектории в точке  $M_1$  после приложения первого импульса. Затем по формулам (2.4.3) и (2.4.5) определим параметр

$$p_1 = \frac{r_{кр}^2 V_1^2 \cos^2 \theta_1}{\mu}$$

и эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 + \left(V_1^2 - \frac{2\mu}{r_{кр}}\right) \frac{r_{кр}^2 V_1^2 \cos^2 \theta_1}{\mu^2}}$$

траектории перелета. Зная тангенциальную составляющую скорости

$$V_{n1} = V_1 \cos \theta_1,$$

найдем согласно (2.3.7) истинную аномалию начальной точки траектории перелета

$$\vartheta_0 = \arccos \frac{1}{e_1} \left( \sqrt{\frac{p_1}{\mu}} V_1 \cos \theta_1 - 1 \right), \quad (5.3.1)$$

причем  $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi$ . Обозначим через  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  истинные аномалии точки  $M_2$  (или  $M'_2$ ) соответственно на траектории перелета и на конечной эллиптической орбите. Тогда из геометрических построений рис. 5.10 найдем

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 + \vartheta_0 - \Psi_0. \quad (5.3.2)$$

где  $\Psi_0$  — угловое расстояние между перицентром конечной орбиты и начальной точкой  $M_1$  траектории перелета. Условие равенства радиусов траектории перелета и конечной орбиты в точке  $M_2$  (или  $M'_2$ ) с учетом (5.3.2) дает уравнение для вычисления  $\vartheta_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{1 + e_1 \cos(\vartheta_2 + \vartheta_0 - \Psi_0)} &= \\ &= \frac{p_2}{1 + e_2 \cos \vartheta_2}. \end{aligned}$$

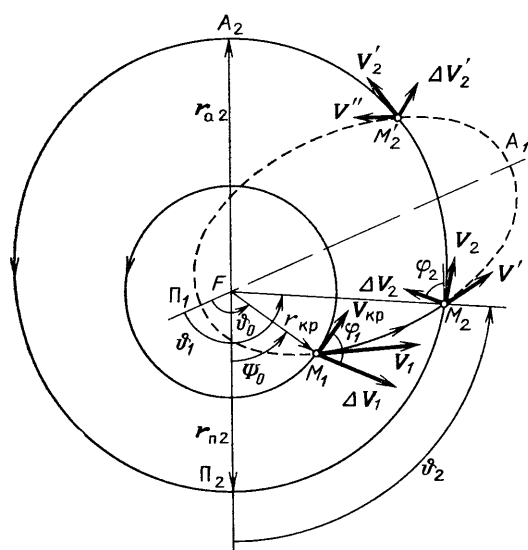


Рис. 5.10. Перелет с круговой орбиты на эллиптическую

Зная теперь  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ , можно по формулам (2.3.5) и (2.3.7) для радиальной и тангенциальной составляющих орбитальной скорости

определить величину второго импульса скорости  $\Delta V_2$ , посредством которого КА переводится в точку  $M_2$  на заданную эллиптическую орбиту:

$$\Delta V_2 = \sqrt{\Delta V_{r2}^2 + \Delta V_{n2}^2}.$$

Здесь

$$\Delta V_{r_2} = V_{\mu}^{-1} \left| \frac{e_2 \sin \phi_2}{\sqrt{p_2}} - \frac{e_1 \sin \phi_1}{\sqrt{p_1}} \right|$$

— радиальная составляющая и

$$\Delta V_{n_2} = V_{\mu}^{-1} \left| \frac{1 + e_2 \cos \phi_2}{\sqrt{p_2}} - \frac{1 - e_1 \cos \phi_1}{\sqrt{p_1}} \right|$$

— трансверсальная составляющая второго импульса скорости. Угол второго импульса скорости относительно местного горизонта

$$\phi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\Delta V_{r_2}}{\Delta V_{n_2}}.$$

Суммарное приращение скорости  $\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_2$  для перелета с круговой орбиты на эллиптическую зависит от величины первого импульса скорости  $\Delta V_1$ , его угла относительно местного горизонта  $\phi_1$  и точки приложения, задаваемой углом  $\Psi_0$ . При исследовании задачи оптимизации двухимпульсного маневра перелета между непересекающимися круговой и эллиптической орбитами было показано, что минимальное суммарное приращение скорости имеет ме-

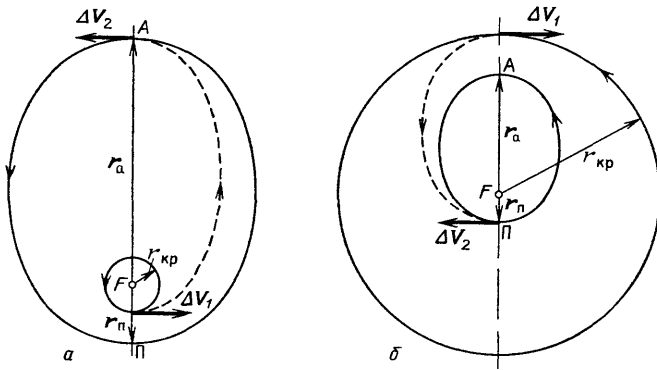


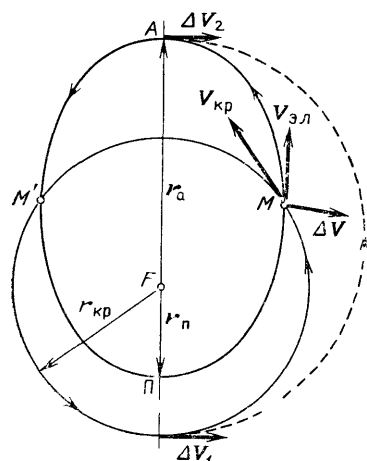
Рис. 5.11. Оптимальный перелет между непересекающимися круговой и эллиптической орбитами: *а* — с внутренней круговой орбиты; *б* — с внешней круговой орбиты

сто на траектории типа Гоманна. Перигеицентр этой траектории находится на начальной круговой орбите, а апоцентры совпадают с апоцентром конечной эллиптической орбиты [80, 86, 88]. Если оптимальный перелет совершается с внешней круговой орбиты на внутреннюю эллиптическую, то апоцентр траектории перелета должен находиться на начальной круговой орбите, а перигеицентр — совпадать с перигеицентром конечной эллиптической орбиты. Обе схемы оптимального перелета показаны на рис. 5.11, *а*, *б*. Суммарное приращение скорости для выполнения маневра, отнесенное к круговой

скорости  $V_{кр} = \sqrt{\mu/r_{кр}}$ , вычисляется по формуле

$$\Delta \tilde{V}_{\Sigma} = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a} - 1} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_a}} \left( \sqrt{\frac{2\tilde{r}_{\Pi}}{\tilde{r}_{\Pi} + \tilde{r}_a}} - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_a}} \right) \quad (5.3.3)$$

в случае перелета с внутренней круговой орбиты на внешнюю эллиптическую и по формуле



$$\Delta \tilde{V}_{\Sigma} = 1 - \sqrt{\frac{2\tilde{r}_{\Pi}}{1+\tilde{r}_{\Pi}}} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_{\Pi}}} \left( \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_{\Pi}}} - \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r}_{\Pi} + \tilde{r}_a}} \right) \quad (5.3.4)$$

в случае перелета с внешней круговой орбиты на внутреннюю эллиптическую. Здесь  $\tilde{r}_a = r_a/r_{кр}$ ,  $\tilde{r}_{\Pi} = r_{\Pi}/r_{кр}$ .

Если круговая и эллиптическая орбиты пересекаются, то наряду с двухимпульсным возможен также одноимпульсный маневр. Сравнение потребного приращения скорости для обоих видов маневра показало, что двухимпульсный маневр типа Гоманна экономичнее одноимпульсного маневра [80].

При этом перицентр траектории перелета находится на начальной круговой орбите, а апоцентр совпадает с апоцентром эллиптической

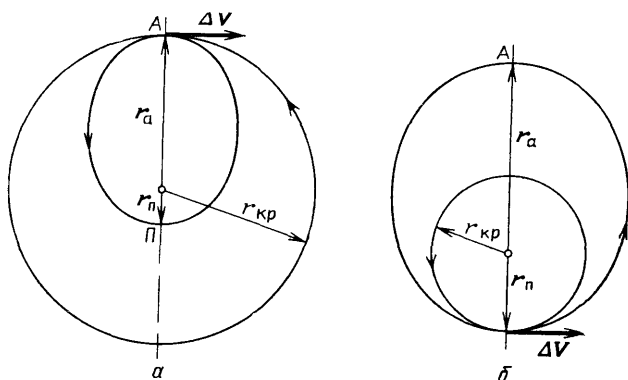


Рис. 5.13. Оптимальный одноимпульсный перелет с круговой орбиты на эллиптическую

орбиты (рис. 5.12). С помощью первого (разгонного) импульса  $\Delta V_1$  скорость увеличивается от круговой до эллиптической, а с помощью второго (тормозного) импульса  $\Delta V_2$  скорость в апоцентре уменьша-

ется до такой величины, чтобы радиус перицентра уменьшился с  $r_{кр}$  до требуемой величины  $r_n$ .

Одноимпульсный маневр возможен в точке  $M$  или симметричной ей точке  $M'$ . За счет единственного импульса  $\Delta V$  вектор круговой скорости  $V_{кр}$  изменяется до вектора эллиптической скорости  $V_{эл}$ , который обеспечивает движение по заданной орбите.

Только в тех случаях, когда круговая орбита касается апсидальных точек эллиптической, оптимальный двухимпульсный маневр вырождается в одноимпульсный. Если круговая орбита касается эллиптической в апоцентре, то импульс должен быть тормозным (рис. 5.13, а), а если в перицентре — разгонным (рис. 5.13, б).

В силу обратимости рассматриваемых задач оптимальные траектории перелета с эллиптической орбиты на круговую будут такими же, как для перелета с круговой орбиты на эллиптическую. При этом величины импульсов скорости сохраняются, а их направление меняется на противоположное.

#### § 5.4. Перелет между компланарными эллиптическими орбитами

При решении общей задачи перелета КА между компланарными эллиптическими орбитами необходимо определить количество импульсов скорости для выполнения маневра, начальную и конечную точки траектории перелета (если они не заданы), взаимную ориентацию орбит (когда направления больших полуосей не фиксированы).

Было доказано, что если задано положение точки отлета с исходной эллиптической орбиты, а точка прилета на конечную эллиптическую орбиту может быть выбрана из условия наименьшей величины суммарного приращения скорости при двухимпульсном маневре, то оптимальная траектория перелета должна заканчиваться в апоцентре внешней орбиты (или в перицентре внутренней орбиты, когда перелет осуществляется с большей орбиты на меньшую) [81]. Если задано положение конечной точки, а точка отлета может быть выбрана из того же условия, то оптимальная траектория должна начинаться в перицентре внутренней орбиты (или апоцентре внешней при перелете с большей орбиты на меньшую).

Величина суммарного приращения скорости на двухимпульсный перелет уменьшается, если большие оси орбит располагаются вдоль одной прямой. Такие орбиты часто называют *коаксиальными*. Коаксиальные орбиты могут быть направлены в одну сторону, когда разность их аргументов перицентра равна нулю, или в противоположные стороны, когда эта разность равна  $\pi$ .

Для перелета между коаксиальными орбитами доказано следующее общее правило [40]. Если коаксиальные орбиты пересекаются, либо направлены в одну сторону, то абсолютная оптимальная траектория перелета должна касаться обеих орбит в апсидальных точ-

ках и проходить через апоцентр с наибольшей величиной радиус-вектора (рис. 5.14, а, б, в). Если оси коаксиальных орбит направлены в противоположные стороны и эти орбиты не пересекаются, то оптимальной может оказаться любая из двух траекторий, касающихся обеих орбит в апсидальных точках (рис. 5.14, г). Выбор той

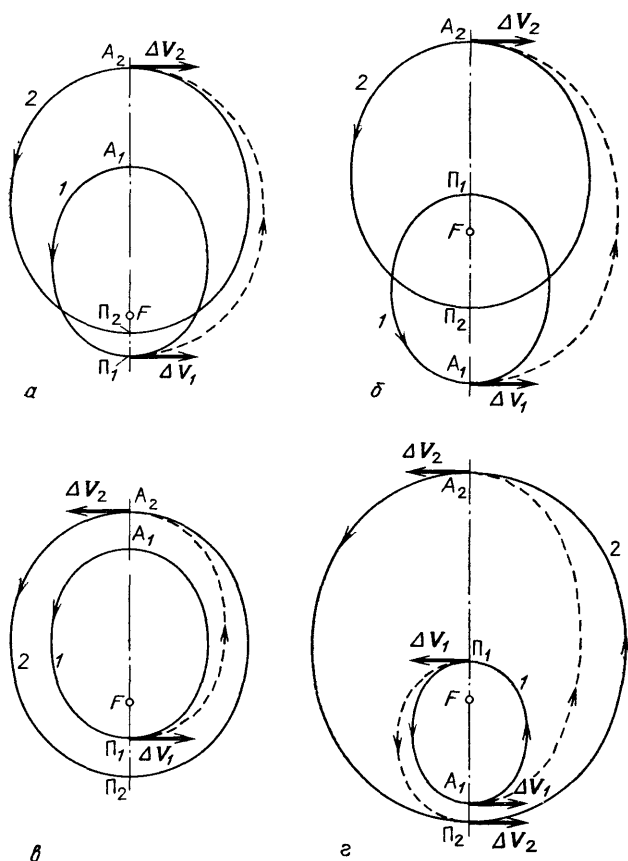


Рис. 5.14. Оптимальные двухимпульсные траектории перелета между коаксиальными эллиптическими орбитами: а — пересекающиеся орбиты, одинаково направленные; б — пересекающиеся орбиты, противоположно направленные; в — непересекающиеся орбиты, одинаково направленные; г — непересекающиеся орбиты, противоположно направленные

или иной траектории перелета определяется относительными размерами исходной и конечной орбит.

Потребные приращения скорости на оптимальный двухимпульсный маневр легко вычислить для выбранной схемы перелета и заданных величин радиусов-векторов апсидальных точек орбит.



Если орбиты пересекаются, возможен также одноимпульсный маневр. Однако установлено, что модифицированный двухимпульсный перелет типа Гоманна всегда экономичнее одноимпульсного маневра [65, 92].

Сравнение двухимпульсных траекторий типа Гоманна и трехимпульсных биэллиптических траекторий (рис. 5.15) применительно к задаче перелета между коаксиальными орбитами с одинаково

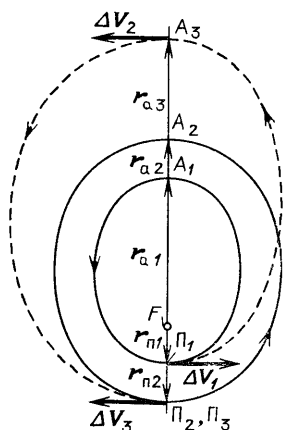


Рис. 5.15. Трехимпульсная траектория перелета между коаксиальными эллиптическими орбитами с одинаковым направлением осей

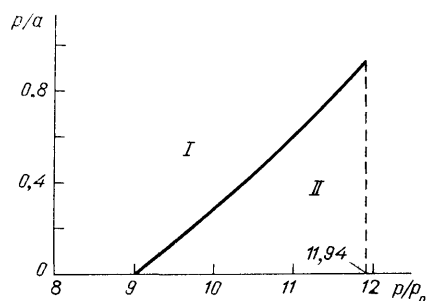


Рис. 5.16. Области оптимальности двухимпульсного перелета типа Гоманна (I) и трехимпульсного биэллиптического перелета (II) между коаксиальными орбитами с одинаковым направлением осей

направленными осями показало следующее [85]. Пусть  $p = \max(p_1, p_2)$ ,  $p_0 = \min(p_1, p_2)$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — параметры рассматриваемых орбит. Тогда при  $p/p_0 < 9$  оптимальной оказывается двухимпульсная траектория типа Гоманна, а при  $p/p_0 > 11,94$  — трехимпульсная биэллиптическая траектория с неограниченно большим радиусом апоцентра ( $r_a \rightarrow \infty$ ). В диапазоне  $9 \leq p/p_0 \leq 11,94$  выбор траектории, двухимпульсной или трехимпульсной, зависит от величины  $p/a$  (рис. 5.16). Здесь  $a = \max(a_1, a_2)$ ,  $a_1$  и  $a_2$  — большие полуоси рассматриваемых орбит.

Обсудим теперь траектории перелета с числом импульсов больше трех. Если на оптимальной траектории перелета один из импульсов скорости приложен в апсидальной точке (перицентре или апоцентре) по касательной к траектории, то все остальные импульсы должны прикладываться аналогичным образом [41]. При дальнейшем увеличении количества импульсов свыше трех суммарное приращение скорости на маневр не может быть уменьшено [93].

По существу приведенные выше результаты являются обобщением полученных в работе [78] для случая трехимпульсного перелета между круговыми орбитами.

Вывод относительно количества импульсов, сделанный в работе [93], позволяет ограничиться рассмотрением одно-, двух- и трехимпульсных траекторий перелета между компланарными орбитами.

### § 5.5. Перелет с круговой орбиты на компланарную гиперболическую

Рассмотрим перелет с круговой орбиты на компланарную гиперболическую. Такая задача возникает, например, при разгоне с околоземной круговой орбиты на межпланетную траекторию. Найденное оптимальное решение можно будет использовать и для обратной задачи, т. е. перелета с гиперболической орбиты на круговую.

Предположим, что задана только энергия гиперболической орбиты (или гиперболический избыток скорости  $V_\infty$ ), а перигентрическое расстояние и ориентация осей гиперболической орбиты остаются произвольными. Необходимо определить оптимальный маневр, который удовлетворяет требованиям задачи с наименьшим суммарным приращением скорости. Такой маневр можно выполнить с помощью одного (рис. 5.17), двух, трех и большего числа импульсов. Ограничимся тремя импульсами, чтобы не очень усложнять задачу.

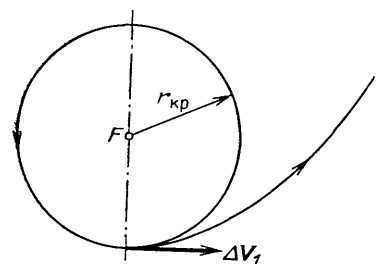


Рис. 5.17. Одноимпульсный перелет с круговой орбиты на гиперболическую

В случае двухимпульсного маневра оптимальная траектория должна касаться исходной круговой орбиты и конечной гиперболической орбиты, т. е. импульсы скорости

прикладываются по касательной. В зависимости от соотношений радиуса круговой орбиты, радиуса перигента и радиального расстояния до асимптоты гиперболической орбиты (прицельной дальности) оптимальная точка выхода на гиперболическую орбиту будет совпадать либо с ее перигентом, либо с бесконечно удаленной точкой [84]. В первом случае траектория перелета является эллиптической, а во втором — гиперболической с бесконечно большим временем движения. Наибольший практический интерес представляет эллиптическая траектория перелета, которая по существу является модифицированной траекторией Гоманна. В последующем анализе ограничимся этим классом траекторий.

Величина суммарного приращения скорости для перелета с круговой орбиты на гиперболическую по модифицированной траектории

Гоманна зависит от соотношения радиусов круговой орбиты  $r_{кр}$  и перицентра гиперболической  $r_{п}$ , т. е. от величины  $\tilde{r} = r_{кр}/r_{п}$ . Действительно, если  $0 < \tilde{r} \leq 1$ , перицентр эллиптической траектории перелета совпадает с круговой орбитой, а ее апоцентр — с пери-

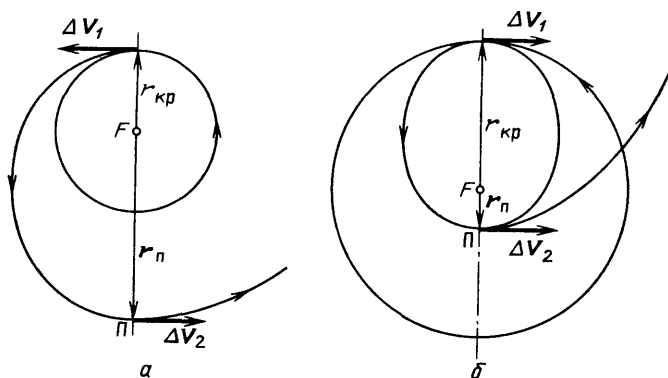


Рис. 5.18. Возможные схемы двухимпульсного перелета с круговой орбиты на гиперболическую по модифицированной траектории Гоманна: *a* — при  $r_{п}/r_{кр} > 1$ ; *b* — при  $r_{п}/r_{кр} < 1$

центром гиперболической орбиты (рис. 5.18, *a*). В этом случае суммарное приращение скорости на маневр

$$\Delta V_{\Sigma}^{(1)} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = (V_1 - V_{кр}) + (V_{г} - V_2),$$

где

$$V_{кр} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{кр}}}$$

— круговая скорость на исходной орбите,

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_{кр}}} \sqrt{\frac{2r_{п}}{r_{кр} + r_{п}}}$$

— скорость после приложения первого импульса  $\Delta V_1$ ,

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_{п}}} \sqrt{\frac{2r_{кр}}{r_{кр} + r_{п}}}$$

— скорость перед приложением второго импульса  $\Delta V_2$ ,

$$V_{г} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{п}} + V_{\infty}^2}$$

— скорость в перицентре гиперболической орбиты. Подставляя составляющие суммарного приращения скорости и относя их к  $V_{кр}$ ,

получим для случая  $0 < \tilde{r} \leq 1$ :

$$\Delta \tilde{V}_{\Sigma}^{(1)} = \frac{\Delta V_{\Sigma}^{(1)}}{V_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}}} (1-\tilde{r}) + \sqrt{2(n^2+\tilde{r})} - 1, \quad (5.5.1)$$

где

$$n = \sqrt{\frac{V_{\infty}^2 r_{\text{кр}}}{2\mu}} = \frac{V_{\infty}}{V_{\text{пар}}} \quad (5.5.2)$$

— параметр, равный отношению гиперболического избытка скорости  $V_{\infty}$  к параболической скорости  $V_{\text{пар}}$  на расстоянии  $r_{\text{кр}}$  от притягивающего центра.

Если  $\tilde{r} \geq 1$ , то апоцентр эллиптической траектории перелета совпадает с круговой орбитой, а ее перицентр — с перицентром гиперболической орбиты (рис. 5.18, б). Суммарное приращение скорости на маневр

$$\Delta V_{\Sigma}^{(2)} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = (V_{\text{кр}} - V_1) + (V_2 - V_1)$$

или

$$\Delta \tilde{V}_{\Sigma}^{(2)} = \frac{\Delta V_{\Sigma}^{(2)}}{V_{\text{кр}}} = \sqrt{2(n^2+\tilde{r})} - \sqrt{2(1+\tilde{r})} + 1. \quad (5.5.3)$$

Легко проверить, что

$$\Delta \tilde{V}_{\Sigma}^{(1)} \Big|_{\tilde{r}=1} = \Delta \tilde{V}_{\Sigma}^{(2)} \Big|_{\tilde{r}=1} = \sqrt{2(n^2+1)} - 1, \quad (5.5.4)$$

поэтому для каждого фиксированного значения  $n$  функция

$$\Delta \tilde{V}_{\Sigma}(\tilde{r}) = \begin{cases} \Delta \tilde{V}_{\Sigma}^{(1)}(\tilde{r}) & \text{при } 0 < \tilde{r} \leq 1, \\ \Delta \tilde{V}_{\Sigma}^{(2)}(\tilde{r}) & \text{при } \tilde{r} \geq 1 \end{cases} \quad (5.5.5)$$

является непрерывной. Найдем ее наименьшие значения для разных  $n$  в диапазоне изменения аргумента  $0 < \tilde{r} < \infty$ . С этой целью исследуем производные

$$\frac{d\Delta \tilde{V}_{\Sigma}^{(1)}}{d\tilde{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+\tilde{r}}} - \frac{3+\tilde{r}}{1+\tilde{r}} \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{r}}} \right), \quad (5.5.6)$$

$$\frac{d\Delta \tilde{V}_{\Sigma}^{(2)}}{d\tilde{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+\tilde{r}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{r}}} \right). \quad (5.5.7)$$

Если  $n > 1$ , то по формулам (5.5.6) и (5.5.7) можно установить, что

$$\frac{d\Delta \tilde{V}_{\Sigma}^{(1)}}{d\tilde{r}} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\Delta \tilde{V}_{\Sigma}^{(2)}}{d\tilde{r}} < 0.$$

Следовательно, при  $n > 1$  функция  $\Delta \tilde{V}_{\Sigma}(\tilde{r})$  является убывающей в рассматриваемом диапазоне изменения аргумента  $0 < \tilde{r} < \infty$ . Поэтому суммарное приращение скорости на маневр тем меньше, чем больше величина  $\tilde{r}$ . Отсюда видно, что радиус перицентра гипер-

болической орбиты  $r_n$  должен выбираться предельно малым с учетом условий безопасности проведения маневра (рис. 5.18, б). Например, величина  $r_n$  может быть ограничена снизу атмосферой планеты или ее рельефом, когда атмосфера отсутствует.

Проанализируем теперь случай  $n < 1$ . Согласно (5.5.7) в этом случае

$$\frac{d\Delta\tilde{V}_\Sigma^{(2)}}{d\tilde{r}} > 0,$$

т. е. функция  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r})$  возрастает при изменении аргумента в диапазоне  $1 \leq \tilde{r} < \infty$ . Между тем

$$\left. \frac{d\Delta\tilde{V}_\Sigma^{(1)}}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{2} < 0. \quad (5.5.6a)$$

Следовательно, непрерывная функция  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r})$ , определяемая условием (5.5.5), имеет излом в точке  $\tilde{r} = 1$ . В точке излома реализуется локальный минимум функции  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r})$ , поскольку здесь происходит изменение знака производной с «-» на «+». Осталось теперь проверить поведение  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r})$  при изменении аргумента в диапазоне  $0 < \tilde{r} < 1$ , когда  $n < 1$ .

Определим условия обращения в нуль производной (5.5.6). Положив

$$\frac{d\Delta\tilde{V}_\Sigma^{(1)}}{d\tilde{r}} = 0,$$

получим

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+\tilde{r}}} = \frac{3+\tilde{r}}{1+\tilde{r}} \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{r}}}.$$

Избавимся от радикалов и после упрощений получим квадратное уравнение относительно  $\tilde{r}$ :

$$(n^2+3)\tilde{r}^2 + 6(n^2+1)\tilde{r} + 9n^2 - 1 = 0.$$

Найдем его корни

$$\tilde{r}^* = \frac{-3(n^2+1) \pm 2\sqrt{3-2n^2}}{n^2+3}. \quad (5.5.8)$$

Знак «-» перед радикалом отвечает решению  $\tilde{r}^* < 0$ , которое не имеет физического смысла. Поэтому надо сохранить только знак «+» и дополнительно потребовать, чтобы числитель (5.5.8) был положителен. Отсюда найдем ограничение на величину  $n$

$$9n^4 + 26n^2 - 3 < 0,$$

которое удовлетворяется при

$$n^2 < \frac{1}{9}, \quad 0 < n < \frac{1}{3}. \quad (5.5.9)$$

Видно, что обращение в нуль производной  $d\Delta\tilde{V}_\Sigma/d\tilde{r}$  на участке изменения аргумента  $0 < \tilde{r} < 1$  возможно лишь в одной точке и лишь при значении параметра  $n$  из диапазона (5.5.9). На границах этого диапазона имеем

$$\tilde{r}^*|_{n=\frac{1}{3}} = 0, \quad \tilde{r}^*|_{n=0} = 0,155.$$

При промежуточных значениях  $n$  величина  $\tilde{r}^*$  лежит в интервале  $0 < \tilde{r}^* < 0,155$ .

Согласно формуле (5.5.6) производная

$$\frac{d\Delta\tilde{V}_\Sigma^{(1)}}{d\tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{n} - 3 \right) \quad (5.5.6б)$$

положительна при  $n < 1/3$  и равна нулю при  $n = 1/3$ . При  $\tilde{r} = 1$  согласно (5.5.6а) эта производная отрицательна. Следовательно, при  $\tilde{r} = \tilde{r}^*$  реализуется максимум функции  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r})$ . Минимальные значения этой функции на интервале  $0 < \tilde{r} < 1$  могут достигаться лишь на границах интервала.

Для нахождения наименьшего значения функции  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r})$  при  $n < 1$  следует сравнить ее значения в точках  $\tilde{r} = 1$  и  $\tilde{r} = 0$ , т. е. (5.5.4) и

$$\Delta\tilde{V}_\Sigma^{(1)}|_{\tilde{r}=0} = \sqrt{2}(n+1) - 1. \quad (5.5.10)$$

Покажем, что

$$\Delta\tilde{V}_\Sigma^{(1)}|_{\tilde{r}=1} \leq \Delta\tilde{V}_\Sigma^{(1)}|_{\tilde{r}=0}, \quad (5.5.11)$$

причем знак равенства возможен только в случае  $n = 0$ . Подставляя (5.5.4) и (5.5.10) в (5.5.11), получим

$$\sqrt{1+n^2} \leq 1+n$$

и далее, после возведения в квадрат,  $0 \leq n$ , что соответствует определению параметра  $n$  формулой (5.5.2).

При значениях параметра  $n$  из диапазона  $\frac{1}{3} < n < 1$  производная  $d\Delta\tilde{V}_\Sigma^{(1)}/d\tilde{r}$  не обращается в нуль ни при каких значениях аргумента в интервале  $0 < \tilde{r} \leq 1$ . Поскольку при  $\tilde{r} = 0$  эта производная согласно (5.5.6б) будет отрицательна (при  $n > 1/3$ ), то она будет отрицательна на всем интервале. Минимальное значение функции  $\Delta\tilde{V}_\Sigma^{(1)}(\tilde{r})$  достигается на правом конце интервала при  $\tilde{r} = 1$ .

Итак, в случае  $n < 1$  функция  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r})$  имеет минимум в точке  $\tilde{r} = 1$ . Отсюда следует принять  $r_n = r_{кр}$ , и оптимальным оказывается не двухимпульсный перелет, а одноимпульсный, когда перицентр гиперболической орбиты располагается на исходной круговой орбите.

Для любого значения параметра  $n$  величина  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r})$  стремится к 1, когда  $\tilde{r}$  неограниченно возрастает. Действительно, с учетом (5.5.3) и (5.5.5) имеем

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}) = \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \Delta\tilde{V}_\Sigma^{(2)}(\tilde{r}) = 1 + \sqrt{2} \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{\sqrt{n^2 + \tilde{r}} + \sqrt{1 + \tilde{r}}} = 1.$$

Это означает, что если радиус перицентра может быть выбран сколь угодно малым, то маневр должен осуществляться следующим образом. Круговая скорость аппарата на исходной орбите гасится почти до нуля, и аппарат «падает» на притягивающий центр почти по вертикальной траектории, которая после прохождения мимо притягивающего центра меняет свое направление движения почти на противоположное. В точке минимального расстояния от притягивающего центра (в перицентре переходной орбиты) скорость движения  $V_\pi$  весьма велика и даже небольшое приращение скорости движения  $\Delta V_2$  позволяет получить значительное приращение энергии  $\Delta E \approx V_\pi \Delta V_2$ . Вследствие этого эллиптическая переходная орбита аппарата может быть превращена в гиперболическую с большой величиной  $V_\infty$ .

Заметим, что в случае  $n = 1$  и  $r \geq 1$  из формулы (5.5.3) следует тождество  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}) \equiv 1$ , согласно которому суммарное приращение скорости на маневр не зависит от соотношения радиусов круговой орбиты  $r_{кр}$  и перицентра гиперболической орбиты  $r_\pi$ . Это означает, что в том случае, когда заданный гиперболический избыток скорости равен параболической скорости на расстоянии  $r_{кр}$ , для перелета на гиперболическую орбиту может использоваться эллиптическая орбита с произвольной величиной перицентра. Выбор величины перицентра не влияет на величину суммы импульсов скорости, прикладываемых в начале и в конце переходной орбиты.

Сравнение одноимпульсного и двухимпульсного перелетов с круговой орбиты на гиперболическую можно закончить следующим общим выводом. Если заданный гиперболический избыток скорости меньше параболической скорости на расстоянии  $r_{кр}$  от притягивающего центра, т. е.  $V_\infty < V_{пар}$  (или  $n < 1$ ), одноимпульсный маневр оказывается экономичнее двухимпульсного. Единственный импульс должен прикладываться по касательной в некоторой точке круговой орбиты, выбираемой с учетом требуемой ориентации гиперболической орбиты. Этот случай представляет наибольший практический интерес, так как гиперболический избыток скорости обычно существенно меньше параболической скорости на расстоянии исходной круговой орбиты.

Если  $V_\infty > V_{пар}$  (или  $n > 1$ ), более экономичным оказывается двухимпульсный маневр. Первый импульс скорости прикладывается касательно к круговой орбите против направления движения для перевода КА на эллиптическую орбиту, радиус перицентра которой равен радиусу перицентра гиперболической орбиты  $r_\pi$ . При этом величина  $r_\pi$  должна выбираться минимально допустимой, чтобы

снизить суммарное приращение скорости на маневр  $\Delta V_\Sigma$ . В перигеэте траектории перелета прикладывается второй импульс по касательной для перевода КА на гиперболическую траекторию.

Аналогичные результаты были впервые получены в работе [83] на основе анализа графических зависимостей  $\Delta \tilde{V}(\tilde{r})$ , построенных для различных значений параметра  $n$  (рис. 5.19).

Подобно биэллиптическому перелету между круговыми орбитами возможен трехимпульсный биэллиптический перелет с круговой

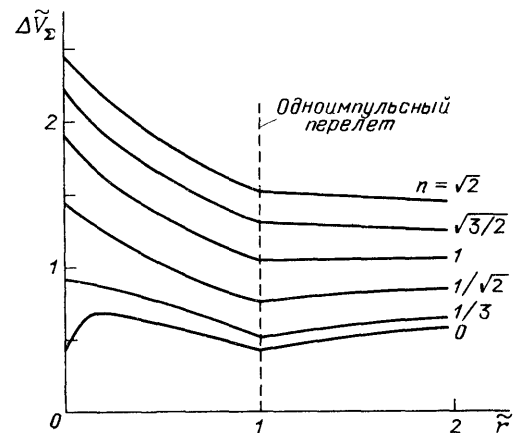


Рис. 5.19. Характеристики одно- и двухимпульсных перелетов с круговой орбиты на гиперболическую

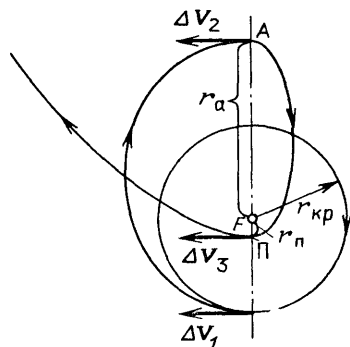


Рис. 5.20. Трехимпульсный перелет с круговой орбиты на гиперболическую

орбиты на гиперболическую [72]. С помощью первого импульса скорости КА переводится на эллиптическую орбиту с радиусом апоцентра  $r_a > r_{кр}$ . За счет второго импульса скорости, прикладываемого в апоцентре, происходит уменьшение радиуса перигеэта с  $r_{кр}$  до  $r_п$ . Наконец, в перигеэте прикладывается третий импульс скорости, чтобы обеспечить переход на гиперболическую орбиту с заданным гиперболическим избытком скорости  $V_\infty$  (рис. 5.20).

Суммарное приращение скорости на трехимпульсный маневр, отнесенное к  $V_{кр}$ , вычисляется по формуле

$$\Delta \tilde{V}_\Sigma = \frac{\Delta V_\Sigma}{V_{кр}} = \sqrt{\frac{2r_a}{1+\tilde{r}_a}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_a}} \left( \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_a}} - \sqrt{\frac{2\tilde{r}_п}{\tilde{r}_п + \tilde{r}_a}} \right) + \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_п} + \tilde{V}_\infty^2} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_п}} \sqrt{\frac{2\tilde{r}_а}{\tilde{r}_п + \tilde{r}_а}}, \quad (5.5.12)$$

где  $\tilde{r}_a = r_a/r_{кр}$ ,  $\tilde{r}_п = r_п/r_{кр}$ ,  $\tilde{V}_\infty = V_\infty/V_{кр}$ . Можно показать, что при заданных величинах относительного радиуса перигеэта  $r_п$  (по со-



ображениям безопасности маневра) и относительного гиперболического избытка скорости  $V_\infty$  (по постановке задачи) величина  $\Delta \tilde{V}_z$  уменьшается с увеличением относительного радиуса апоцентра  $\tilde{r}_a$ , хотя и не очень существенно. При  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$  трехимпульсный маневр экономичнее одноимпульсного для всех значений  $V_\infty$ . Правда, такой

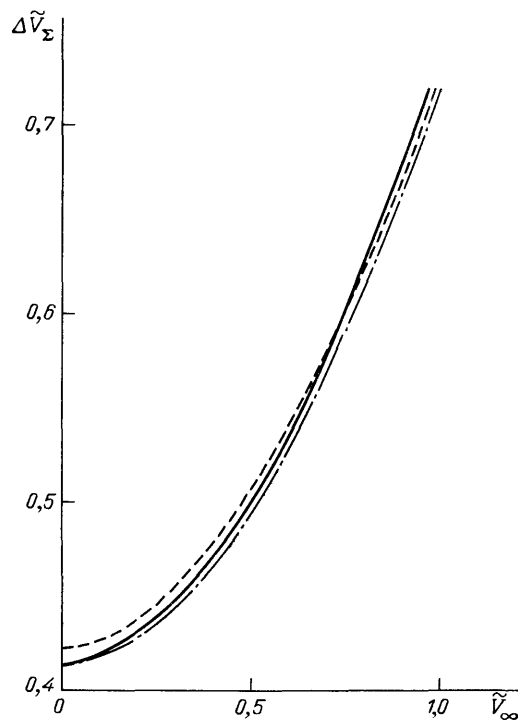


Рис. 5.21. Приращение скорости для перелета с круговой орбиты на гиперболическую: сплошная линия — одноимпульсный перелет, штриховая — трехимпульсный перелет с  $\tilde{r}_\pi = 0,9$  и  $\tilde{r}_a = 5$ , штрихпунктирная — трехимпульсный перелет с  $\tilde{r}_\pi = 0,9$  и  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$

маневр требует неограниченно большого времени. В случае конечных значений  $\tilde{r}_a$  трехимпульсный маневр экономичнее одноимпульсного только в области больших величин  $V_\infty$ , а при малых  $V_\infty$  выгоднее одноимпульсный маневр, который к тому же требует бесконечно малого времени на реализацию. На рис. 5.21 представлен пример расчета  $\Delta \tilde{V}_z$  при одноимпульсном и трехимпульсном маневрах с  $\tilde{r}_\pi = 0,9$  и двумя значениями  $\tilde{r}_a$ : 5 и  $\infty$ .

Таким образом, для рассматриваемой задачи перелета с круговой орбиты на гиперболическую при заданной величине  $V_\infty$  наибольший интерес по экономичности и времени реализации представляет одноимпульсный маневр.

### § 5.6. Поворот плоскости круговой орбиты

Если плоскости начальной и конечной орбит не совпадают, то в процессе перелета между этими орбитами необходимо изменить плоскость движения. Такого вида маневры называют пространственными. Суммарное приращение скорости на пространственный маневр существенно больше, чем на перелет между такими же компланарными орбитами. Будем рассматривать задачу перелета между некомпланарными орбитами в импульсной постановке. Даже при таком упрощении общее решение оптимального перелета между некомпланарными орбитами пока не получено. Исследованы некоторые частные случаи общей задачи, например, задача перелета между круговыми некомпланарными орбитами, одно-, двух- и трехимпульсные пространственные маневры. Получены также численные решения задачи перелета для фиксированных параметров орбит. Все это позволяет установить рациональные способы выполнения пространственного маневра, оценить потребное приращение скорости на маневр и на этой основе находить решения различных прикладных задач.

**5.6.1. Одноимпульсный поворот.** Простейшей задачей перелета между некомпланарными орбитами является поворот плоскости движения без изменения формы и размеров орбиты. Возможны различные способы поворота плоскости движения. Самый простой маневр — одноимпульсный. Единственный импульс прикладывается на линии пересечения плоскости начальной и конечной орбит. В дальнейшем для простоты рассмотрения ограничимся круговой орбитой радиуса  $r$ . Тогда величина потребного импульса скорости для поворота плоскости движения на угол  $i$ , отнесенная к круговой скорости  $V_{кр}(r)$ , будет определяться формулой

$$\Delta \tilde{V} = \frac{\Delta V}{V_{кр}} = 2 \sin \frac{i}{2}. \quad (5.6.1)$$

Найдем угол  $\chi$  между направлением импульса скорости  $\Delta V$  и начальной плоскостью движения (рис. 5.22):

$$\chi = \frac{\pi + i}{2}. \quad (5.6.2)$$

Одноимпульсный поворот плоскости движения приемлем, когда угол  $i$  сравнительно мал (рис. 5.23). При больших углах поворота потребное приращение скорости на маневр становится слишком большим. Так, при  $i = 60^\circ$  имеем  $\Delta V = V_{кр}$ , а при  $i = 180^\circ$   $\Delta V = 2V_{кр}$ . Поэтому рассматривают другие способы поворота плоскости движения, основанные на следующем правиле: поворот плоскости движения следует осуществлять по возможности в точке траектории, где скорость минимальна.

**5.6.2. Трехимпульсный поворот.** Возможна простая схема трехимпульсного поворота плоскости круговой орбиты. Первый импульс

скорости прикладывается по касательной к траектории в начальной плоскости движения при пересечении КА линии узлов. Величина импульса выбирается из условия получения заданного радиуса апоцентра  $r_a$  промежуточной орбиты:

$$\Delta \tilde{V}_1 = \frac{\Delta V_1}{V_{кр}} = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a}} - 1, \quad (5.6.3)$$

где  $\tilde{r}_a = r_a/r_{кр}$ . С помощью второго импульса скорости, который

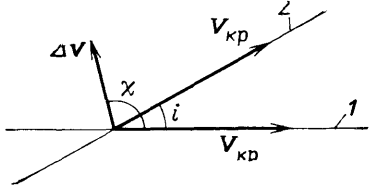


Рис. 5.22. Схема одноимпульсного поворота плоскости круговой орбиты: 1 — плоскость начальной орбиты; 2 — плоскость конечной орбиты

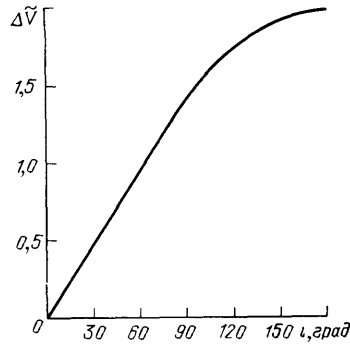


Рис. 5.23. Приращение скорости на одноимпульсный поворот плоскости круговой орбиты

прикладывается в апоцентре, производится поворот плоскости движения на заданный угол  $i$  по одноимпульсной схеме. Величина второго импульса скорости, отнесенная к  $V_{кр}$ , вычисляется по формуле:

$$\Delta \tilde{V}_2 = \frac{\Delta V_2}{V_{кр}} = 2 \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a(1+\tilde{r}_a)}} \sin \frac{i}{2}. \quad (5.6.4)$$

Вторая половина промежуточной орбиты симметрична первой, но располагается в конечной плоскости движения. При достижении перигентра, радиус которого равен радиусу круговой орбиты, прикладывается третий импульс скорости (против направления движения) для перевода КА на круговую орбиту (рис. 5.24). По величине третий импульс скорости равен первому. Отсюда суммарное приращение скорости на трехимпульсный поворот плоскости круговой орбиты

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a) &= \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3}{V_{кр}} = \\ &= 2 \left( \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a}} - 1 + \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a(1+\tilde{r}_a)}} \sin \frac{i}{2} \right). \quad (5.6.5) \end{aligned}$$

При  $\tilde{r}_a = 1$  формула (5.6.5) переходит в (5.6.1), а трехимпульсный поворот — в одноимпульсный, так как первый и третий импульсы скорости становятся равными нулю. При  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$  получим в пределе

$$\Delta \tilde{V}_z(\tilde{r}_a = \infty) = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0,82.$$

Заметим, что в этом случае требуемое приращение скорости на маневр не зависит от угла поворота плоскости орбиты, а время маневра неограниченно возрастает.

Характеристики трехимпульсного маневра с поворотом плоскости в апоцентре траектории построены на рис. 5.25. Они включают

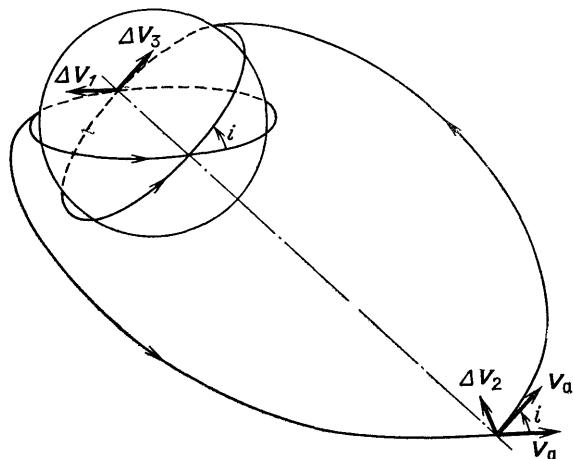


Рис. 5.24. Трехимпульсный маневр с поворотом плоскости круговой орбиты в апоцентре траектории перелета

суммарное требуемое приращение скорости  $\Delta \tilde{V}_z$  в зависимости от угла поворота  $i$  и радиуса апоцентра  $\tilde{r}_a$ , а также время перелета  $\tilde{T}_z$ , отнесенное к периоду обращения на круговой орбите заданного радиуса ( $\tilde{T}_z = T_z/T_{кр}$ ).

Определим, при каких значениях угла поворота плоскости круговой орбиты  $i$  трехимпульсный маневр оказывается экономичнее одноимпульсного. Сравнивая (5.6.1) с (5.6.5), получим, что это имеет место, когда выполнено неравенство

$$\frac{\sqrt{\frac{2r_a}{1+\tilde{r}_a} - 1}}{1 - \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a(1+\tilde{r}_a)}}} < \sin \frac{i}{2}. \quad (5.6.6)$$

При  $\tilde{r}_a \rightarrow 1$  левая часть неравенства (5.6.6) представляет собой неопределенность вида 0/0. Раскрывая эту неопределенность, найдем:

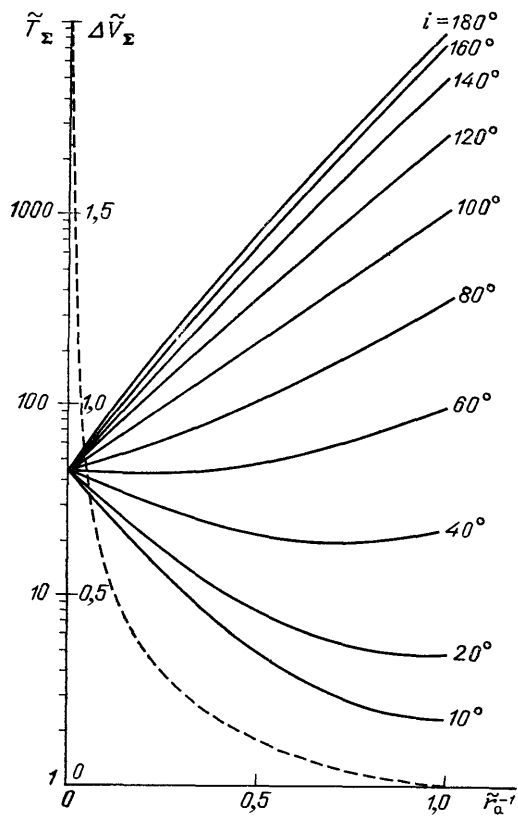


Рис. 5.25. Характеристики трехимпульсного поворота плоскости круговой орбиты в апоцентре траектории; сплошные линии —  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$ , штриховая —  $\tilde{T}_\Sigma$

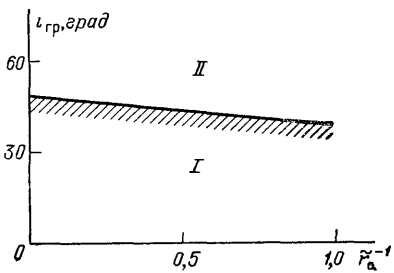


Рис. 5.26. Области оптимальности одноимпульсного маневра (I) и трехимпульсного маневра с поворотом плоскости круговой орбиты в апоцентре траектории (II)

$\sin \frac{i}{2} > 1/3$ . Отсюда  $i > 38,94^\circ$ . При  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$  имеем  $\sin \frac{i}{2} > \sqrt{2} - 1$ ,  $i > 48,94^\circ$ . На рис. 5.26 построены граничные значения угла поворота  $i_{гр}$ , для которых одноимпульсный и трехимпульсный повороты плоскости круговой орбиты требуют одинакового приращения скорости. Если заданный угол поворота  $i < 38,94^\circ$ , то более экономичным оказывается одноимпульсный поворот плоскости орбиты, а при  $i > 48,94^\circ$  экономичнее трехимпульсный с произвольным радиусом апоцентра ( $\tilde{r}_a > 1$ ). Если  $38,94^\circ < i < 48,94^\circ$ , то всегда можно выбрать такую величину  $\tilde{r}_a$ , удовлетворяющую условию (5.6.6), при которой трехимпульсный поворот оказывается экономичнее одноимпульсного.

**5.6.3. Модифицированный трехимпульсный поворот.** Возможна более сложная модификация трехимпульсного маневра, когда поворот плоскости осуществляется в моменты приложения каждого импульса скорости, т. е. в три приема. При этом основной поворот плоскости движения производится с помощью второго импульса скорости, в апоцентре траектории. Первый и третий импульсы предназначены в основном для разгона и торможения. Кроме того, они дополнительно используются для поворота плоскости движения на небольшие углы.

Пусть  $i_1, i_2, i_3$  — углы поворота плоскости движения в моменты приложения каждого из трех импульсов. Их сумма должна равняться заданному углу поворота плоскости круговой орбиты:

$$i_1 + i_2 + i_3 = i. \quad (5.6.7)$$

Суммарное потребное приращение скорости на модифицированный трехимпульсный поворот плоскости, отнесенное к  $V_{кр}$ , задается соотношением

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{V}_\Sigma = & \sqrt{\frac{1 + 3\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a} - 2 \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a}} \cos i_1} + 2 \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a(1 + \tilde{r}_a)}} \sin \frac{i_2}{2} + \\ & + \sqrt{\frac{1 + 3\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a} - 2 \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a}} \cos (i - i_1 - i_2)}. \quad (5.6.8) \end{aligned}$$

Предположим сначала, что время маневра задано, тогда радиус апоцентра  $r_a$  траектории перелета определяется однозначно, и суммарное приращение скорости на маневр будет зависеть только от величины углов  $i_1, i_2, i_3$ . С учетом равенства (5.6.7) только два угла из трех оказываются независимыми. При оптимальном маневре, обеспечивающем минимум  $\Delta \tilde{V}_\Sigma$ , должно выполняться дополнительное условие:  $i_1 = i_3$ . Действительно, второй импульс скорости прикладывается только для поворота плоскости движения на угол  $i_2$ . Первый и третий импульсы скорости прикладываются в одинаковых условиях для разгона (торможения) на траекторию перелета и

одновременного поворота плоскости движения. В силу обратимости задачи оптимального маневра траектория перелета должна обладать симметрией. Отсюда — равенство импульсов скорости  $\Delta\tilde{V}_1 = \Delta\tilde{V}_3$  и углов  $i_1 = i_3$ .

С учетом симметрии маневра можно записать:

$$\Delta\tilde{V}_\Sigma = 2 \left[ \sqrt{\frac{1 + 3\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a}} - 2 \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a}} \cos i_1 + \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a(1 + \tilde{r}_a)}} \sin\left(\frac{i}{2} - i_1\right) \right] \quad \left(i_1 \leq \frac{i}{2}\right). \quad (5.6.9)$$

Дифференцируя (5.6.9) по  $i_1$  и положив  $d\Delta\tilde{V}_\Sigma/di_1 = 0$ , получим необходимое условие оптимальности угла  $i_1$ :

$$\sin i_1 - \frac{1}{r_a} \sqrt{\frac{1 + 3\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a} - 2 \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a}} \cos i_1} \cos\left(\frac{i}{2} - i_1\right) = 0 \quad \left(i_1 \leq \frac{i}{2}\right). \quad (5.6.10)$$

Величина угла  $i_1^{\text{опт}}$ , удовлетворяющая условию (5.6.10), зависит от относительного радиуса апоцентра, который может изменяться в диапазоне

$$1 \leq \tilde{r}_a < \infty. \quad (5.6.11)$$

Легко проверить, что при  $\tilde{r}_a = 1$  условие (5.6.10) принимает вид

$$\sin \frac{i_1}{2} \left[ \cos \frac{i_1}{2} - \cos\left(\frac{i}{2} - i_1\right) \right] = 0,$$

откуда

$$i_1^{\text{опт}} \Big|_{\tilde{r}_a=1} = 0.$$

Если  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ , имеем  $i_1^{\text{опт}} \rightarrow 0$ . При всех остальных значениях  $\tilde{r}_a$  величина  $i_1^{\text{опт}}$  больше нуля.

Из численных расчетов следует, что угол  $i_1^{\text{опт}}$ , удовлетворяющий условию (5.6.10), не превышает нескольких градусов, и при  $i_1 = i_1^{\text{опт}}$  зависимость  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(i_1)$  имеет минимум. Для небольших углов  $i$  поворота плоскости круговой орбиты может оказаться, что не существует угла  $i_1^{\text{опт}}$ , удовлетворяющий условиям (5.6.10) и  $i_1 \leq i/2$ . В таких случаях наименьшее значение  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$  достигается в точке  $i_1 = i/2$ , в которой производная  $d\Delta\tilde{V}_\Sigma/di_1$  терпит разрыв (угловая точка).

Малость угла  $i_1^{\text{опт}}$  можно объяснить из простых физических соображений. Действительно, для малых значений  $i_1$  имеем  $\cos i_1 \approx 1$ . Тогда первый и третий импульсы скорости близки к величинам, полученным для случая поворота плоскости в апоцентре траектории перелета (за один прием). Второй импульс скорости оказывается меньше, чем в указанном случае, так как в апоцентре пло-

скость движения поворачивают на угол  $i - 2i_1$ , а не на угол  $i$ . В итоге суммарное приращение скорости на маневр  $\Delta V_z$  уменьшается.

С учетом малости угла  $i_1^{\text{опт}}$  можно получить формулу для вычисления корня уравнения (5.6.10) в первом приближении:

$$i_1^{\text{опт}} = \frac{\sqrt{\frac{1+3\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a}} - 2\sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a}} \cos \frac{i}{2}}{\sqrt{\tilde{r}_a^2} - \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a}} \cos^2 \frac{i}{2}} \quad \left( i_1^{\text{опт}} \leq \frac{i}{2} \right). \quad (5.6.12)$$

Заметим, что найденное по формуле (5.6.12) значение  $i_1^{\text{опт}}$  имеет достаточную точность для расчета потребного приращения скорости  $\Delta V_z$  в случае оптимального маневра. На рис. 5.27

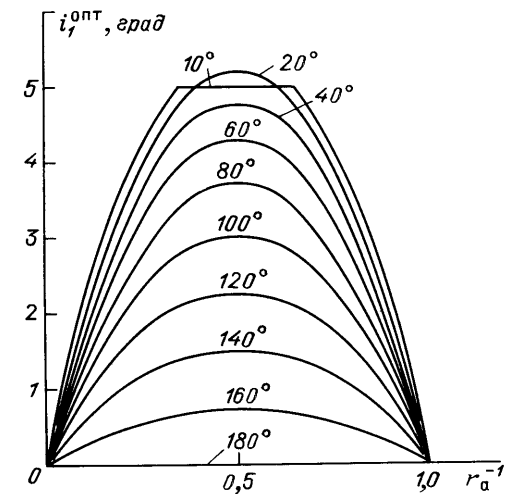


Рис. 5.27. Оптимальные величины первого (и третьего) угла поворота плоскости движения при модифицированном трехимпульсном маневре

Построены величины  $i_1^{\text{опт}}$  в зависимости от  $\tilde{r}_a$  и  $i$ . Видно, что наибольшие значения  $i_1^{\text{опт}}$  (порядка  $5^\circ$ ) имеют место при  $\tilde{r}_a \approx 2$  и углах поворота плоскости движения меньше  $40^\circ$ .

Потребные величины  $\Delta V_z$  для модифицированного трехимпульсного маневра в зависимости от  $\tilde{r}_a$  и  $i$  построены на рис. 5.28. Здесь же построено время маневра  $T_z$ , отнесенное к периоду обращения на заданной круговой орбите. В граничных точках интервала изменения  $\tilde{r}_a$  (т. е. при  $\tilde{r}_a = 1$  и  $\tilde{r}_a = \infty$ ) величины  $\Delta V_z$  для модифицированного трехимпульсного маневра совпадают с со-

ответствующими величинами  $\Delta V_z$  для трехимпульсного маневра с поворотом плоскости движения в апоцентре траектории перелета. Действительно, в указанных точках  $i_1^{\text{опт}} = 0$  независимо от величины  $i$ , поэтому модифицированный трехимпульсный маневр переходит в исходный.

Если сопоставить построенные на рис. 5.25 и 5.28 зависимости  $\Delta V_z(\tilde{r}_a, i)$ , то можно установить, что в классе трехимпульсных маневров поворот плоскости в три приема вместо одноразового пово-



рота в апоцентре позволяет уменьшить требуемую величину  $\Delta\tilde{V}_z$  не более чем на 0,05 (при  $\tilde{r}_a \approx 2$  и  $i \approx 20^\circ$ ). Таким образом, максимальная экономия не превышает 5% от величины круговой скорости заданной орбиты. Аналогичные оценки получены и в работах [71, 89].

Сравнивая требуемые приращения скорости на модифицированный трехимпульсный маневр и одноимпульсный маневр, можно построить зависимость граничного угла поворота  $i_{гр}(\tilde{r}_a)$ , для которой

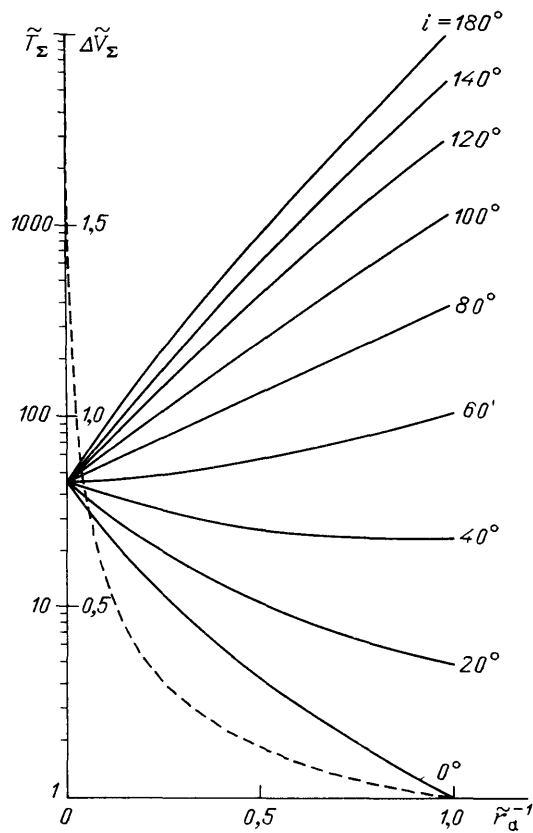


Рис. 5.28. Характеристики модифицированного трехимпульсного поворота плоскости круговой орбиты (в три приема): сплошные линии — значения  $\Delta\tilde{V}_z$ ; штриховая — значения  $\tilde{T}_z$

величины  $\Delta\tilde{V}_z$  в обоих случаях совпадают. Эта зависимость, а также соответствующие ей величины  $i_1^{opt}(\tilde{r}_a)$  построены на рис. 5.29.

Видно, что  $0^\circ \leq i_{гр} \leq 48,94^\circ$ . Следовательно, если заданный угол поворота плоскости орбиты находится в диапазоне  $0^\circ \leq i \leq 48,94^\circ$ , то при выборе радиуса апоцентра траектории перелета из диапазона

$1 < \tilde{r}_a < \tilde{r}_a(i_{gp})$  модифицированный трехимпульсный маневр оказывается экономичнее, чем одноимпульсный. Для углов поворота  $48,94^\circ \leq i \leq 180^\circ$  модифицированный трехимпульсный маневр экономичнее одноимпульсного при любом выборе радиуса апоцентра  $1 < \tilde{r}_a < \infty$ . Итак, модифицированный трехимпульсный поворот плоскости круговой орбиты оказывается экономичнее одноимпульсного

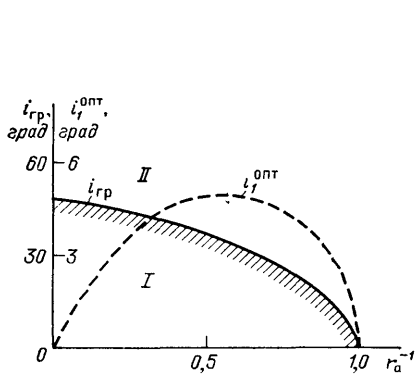


Рис. 5.29. Области оптимальности одноимпульсного маневра (I) и модифицированного трехимпульсного маневра с поворотом круговой орбиты в три приема (II)

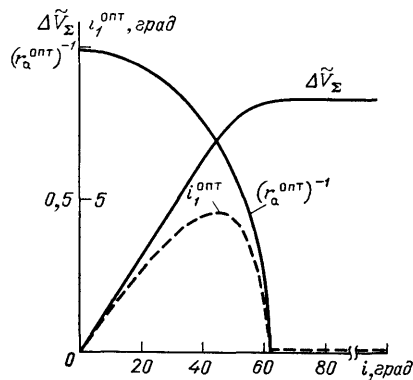


Рис. 5.30. Характеристики оптимального модифицированного трехимпульсного поворота плоскости круговой орбиты

во всем диапазоне углов поворота, от малых до больших, в то время как трехимпульсный маневр с поворотом плоскости в апоцентре экономичнее одноимпульсного только для углов  $i > 38,94^\circ$ .

Обсудим теперь модифицированный трехимпульсный маневр для случая, когда время маневра не задано. Тогда потребное приращение скорости будет зависеть не только от углов поворота, но также и от величины радиуса апоцентра  $\tilde{r}_a$  траектории перелета, т. е.  $\Delta \tilde{V}_z(i, \tilde{r}_a)$ . Аналитическое отыскание минимума функции двух переменных (5.6.9) приводит к весьма громоздким выражениям. Между тем зависимости, построенные на рис. 5.28, позволяют определить оптимальные значения  $\tilde{r}_a^{opt}$  для заданного угла поворота  $i$  с помощью численных методов. Результаты расчетов представлены на рис. 5.30. Если углы поворота плоскости круговой орбиты  $i$  не превышают  $60^\circ$ , то существуют конечные величины относительного радиуса апоцентра траектории перелета  $1 < \tilde{r}_a^{opt} < 10$  и соответствующие величины первого (третьего) угла поворота плоскости движения  $0 < i_1^{opt} < 4^\circ$ , при которых достигается минимум потребного приращения относительной скорости  $\Delta \tilde{V}_z$  для трехимпульсного модифицированного маневра. Если же углы поворота превышают  $60^\circ$ , то с неограниченным увеличением  $\tilde{r}_a$  потребные величины  $\Delta \tilde{V}_z$  уменьшаются, достигая предельного значения  $\Delta \tilde{V}_z = 0,828$ , которое

не зависит от угла поворота. При этом  $i_1^{\text{опт}} = 0$ , а модифицированный трехимпульсный поворот плоскости круговой орбиты (за три приема) переходит в трехимпульсный маневр с поворотом плоскости в апоцентре траектории перелета.

### § 5.7. Двухимпульсный перелет между некопланарными круговыми орбитами

Если радиусы начальной  $r_1$  и конечной  $r_2$  круговых орбит различаются, то минимальное число импульсов для перелета равно двум. Для определенности будем полагать, что перелет совершается с меньшей круговой орбитой на большую ( $r_1 < r_2$ ), а  $i$  — угол между плоскостями орбит (угол некопланарности).

**5.7.1. Первый некопланарный двухимпульсный перелет.** Естественным обобщением двухимпульсного маневра на случай перелета между некопланарными круговыми орбитами является первая некопланарная траектория типа Гоманна, когда второй импульс скорости прикладывается в апоцентре под некоторым углом  $\chi$

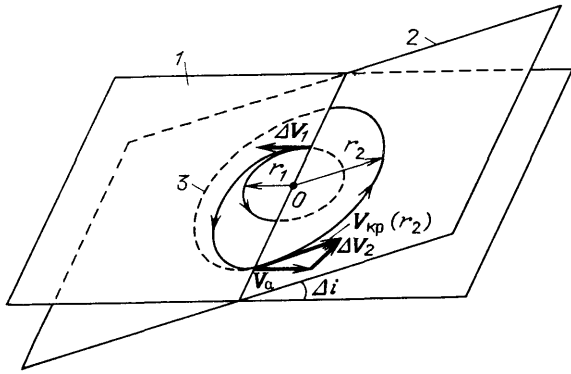


Рис. 5.31. Первый некопланарный двухимпульсный перелет (с поворотом плоскости движения в апоцентре): 1 — плоскость начальной орбиты; 2 — плоскость конечной орбиты; 3 — траектория перелета

к начальной плоскости (т. е. плоскости исходной орбиты и траектории перелета). Величина второго импульса скорости  $\Delta V_2$  и угол  $\chi$  выбираются из условия доразгона до местной круговой скорости и одновременного поворота плоскости движения на угол  $i$  (рис. 5.31). Суммарное приращение скорости на такой маневр, отнесенное к круговой скорости начальной орбиты, определяется формулой

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{V}_\Sigma &= \\ &= \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{V_{\text{кр}1}} = \sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \sqrt{\frac{3+\tilde{r}}{1+\tilde{r}} - 2\sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}}}\cos i}, \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

а угол  $\chi$  между  $\Delta V_2$  и начальной плоскостью движения есть

$$\chi = \arcsin \frac{\sin i}{\sqrt{\frac{3+\tilde{r}}{1+\tilde{r}} - 2\sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}}}\cos i}}. \quad (5.7.2)$$

Здесь  $\tilde{r} = r_2/r_1$ .

На рис. 5.32 построено суммарное приращение скорости для первой модификации двухимпульсного некомпланарного перелета в зависимости от угла некомпланарности  $i$  и обратной величины относительного радиуса  $\tilde{r}^{-1}$  [89]. Когда  $i \leq 30^\circ$ , зависимость  $\Delta \tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}^{-1})$  имеет максимум при больших величинах относительного радиуса ( $\tilde{r} > 10$ ). Если  $i \geq 40^\circ$ , то наибольшее значение  $\Delta \tilde{V}_\Sigma$  достигается при  $\tilde{r} = 1$ . Это значит, что перелет на относительно близкую орбиту в случае значительного угла некомпланарности требует большего суммарного приращения скорости, чем перелет на более далекую орбиту с таким же углом некомпланарности.

**5.7.2. Второй некомпланарный двухимпульсный перелет.** Второй некомпланарный двухимпульсный перелет отличается тем, что поворот плоскости производится с каждым импульсом скорости (в два приема). Сум-

Рис. 5.32. Суммарное приращение скорости при первом некомпланарном двухимпульсном перелете (с поворотом плоскости в апоцентре)

марное приращение скорости на такой маневр, отнесенное к  $V_{кр1}$ , вычисляется по формуле

$$\Delta \tilde{V}_\Sigma = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{V_{кр1}} = \sqrt{\frac{1+3\tilde{r}}{1+\tilde{r}} - 2\sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}}}\cos i_1} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \sqrt{\frac{3+\tilde{r}}{1+\tilde{r}} - 2\sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}}}\cos(i-i_1)}. \quad (5.7.3)$$

Здесь  $i_1$  — угол поворота плоскости движения в момент приложения первого импульса скорости. Для заданных величин относительного радиуса  $\tilde{r}$  и угла некомпланарности  $i$  существует оптималь-

ный угол  $i_1^{OPT}$ , обеспечивающий минимум  $\Delta\tilde{V}_z(i_1)$ . Этот угол определяется из условия  $d\Delta\tilde{V}_z/di_1 = 0$ :

$$\frac{\tilde{r} \sin i}{\sqrt{1 + 3\tilde{r} - 2\sqrt{2\tilde{r}(1+\tilde{r})} \cos i_1}} - \frac{\sin i \cos i_1 - \cos i \sin i_1}{\sqrt{3 + \tilde{r} - 2\sqrt{2(1+\tilde{r})} (\cos i \cos i_1 + \sin i \sin i_1)}} = 0. \quad (5.7.4)$$

Расчеты показывают, что угол  $i_1^{OPT}$  не превышает нескольких градусов, как и в рассмотренном ранее случае поворота плоскости круговой орбиты с использованием модифицированного трехимпульсного маневра (поворот плоскости в три приема).

Такой способ перелета между некомпланарными круговыми орбитами экономичнее первого некомпланарного двухимпульсного перелета во всем диапазоне углов  $i$  и относительных радиусов  $\tilde{r}$ . Для каждого значения  $\tilde{r}$  существует такая величина угла некомпланарности  $i^*$ , при которой достигается наибольшая экономия от использования второго некомпланарного двухимпульсного перелета по сравнению с первым. На рис. 5.33 построена величина наибольшей

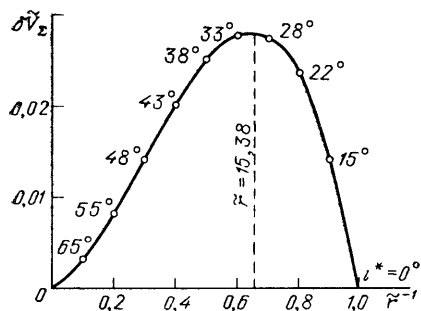


Рис. 5.33. Максимальная возможная экономия суммарного приращения скорости при использовании второго некомпланарного двухимпульсного перелета (с поворотом плоскости в два приема)

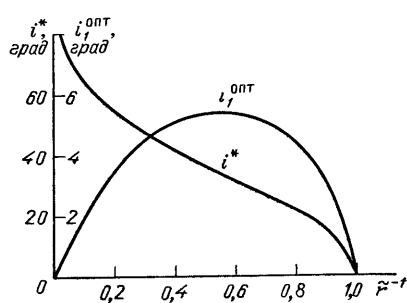


Рис. 5.34. Условия наибольшей экономии при использовании второго некомпланарного двухимпульсного перелета (с поворотом плоскости в два приема)

возможной экономии  $\delta\tilde{V}_z$  для различных значений  $\tilde{r}^{-1}$ . Отмеченные на графике точки показывают соответствующие величины угла  $i^*$ . Максимальная экономия ( $\delta\tilde{V}_z = 0,027$ ) достигается при  $\tilde{r} \approx 15,38$  и  $i \approx 30^\circ$ .

На рис. 5.34 показаны зависимости от  $\tilde{r}^{-1}$  угла некомпланарности  $i^*$ , при котором достигается наибольшая экономия  $\delta\tilde{V}_z$ , и угла  $i_1^{OPT}$  поворота плоскости движения в момент приложения первого импульса скорости [89].

### § 5.8. Трехимпульсный перелет между некомпланарными круговыми орбитами

Рассмотрим трехимпульсные перелеты между некомпланарными круговыми орбитами. Как и при повороте плоскости орбиты, возможны различные варианты трехимпульсного маневра.

**5.8.1. Первый некомпланарный трехимпульсный перелет.** Первый некомпланарный трехимпульсный перелет по существу представляет собой биэллиптический перелет с поворотом плоскости движения в апоцентре траектории ( $\tilde{r}_a > \tilde{r}$ ). Суммарное приращение скорости на маневр, отнесенное к круговой скорости начальной (внутренней) орбиты, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{V}_\Sigma = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3}{V_{кр1}} = & \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a}} - 1 + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a}} \sqrt{\frac{1}{1 + \tilde{r}_a} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{r} + \tilde{r}_a} - 2 \sqrt{\frac{\tilde{r}}{(1 + \tilde{r}_a)(\tilde{r} + \tilde{r}_a)}} \cos i} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left( \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r} + \tilde{r}_a}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.8.1)$$

Для заданных значений относительного радиуса  $\tilde{r}$  и угла некомпланарности орбит  $i$  величина  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$  является функцией относительного радиуса апоцентра  $\tilde{r}_a$ . Если  $\tilde{r}_a = \tilde{r}$ , третий импульс скорости обращается в нуль, формула (5.8.1) переходит в (5.7.1), а трехимпульсная траектория становится двухимпульсной. Случай  $\tilde{r}_a < \tilde{r}$  не рассматривается, поскольку траектория перелета оказывается неоптимальной по  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$ . При  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$  обращается в нуль второй импульс, так как поворот плоскости движения на произвольный угол  $i$  и любое изменение радиуса перицентра требуют приложения бесконечно малого импульса скорости в апоцентре траектории, радиус которого неограниченно велик. Поэтому

$$\Delta\tilde{V}_\Sigma = (\sqrt{2} - 1) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \right) \quad (5.8.2)$$

независимо от угла некомпланарности  $i$ .

Аналитическое исследование минимума функции  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a)$ , задаваемой формулой (5.8.1), приводит к весьма громоздким соотношениям. Поэтому ниже представлены только результаты численного анализа трехимпульсных траекторий перелета с поворотом плоскости в апоцентре [77, 89].

Радиус апоцентра  $\tilde{r}_a$  однозначно определяется величиной первого импульса скорости  $\Delta\tilde{V}_1 = \Delta V_1 / V_{кр1}$ . Именно  $\Delta\tilde{V}_1$  удобно использовать в качестве независимой переменной для графического представления результатов расчета, в том числе областей оптимальности

двух- и трехимпульсных траекторий перелета с одноразовым поворотом плоскости движения.

Расчеты показали, что для каждого значения относительного радиуса  $\tilde{r}$  существует граничный угол некомпланарности  $i_{гр}$ , при котором трехимпульсная траектория перелета вырождается в двухимпульсную, так как  $\tilde{r}_a = \tilde{r}$  и третий импульс скорости равен нулю. В области углов некомпланарности  $0 \leq i \leq i_{гр}$  более экономичной оказывается двухимпульсная траектория перелета по сравнению с трехимпульсной траекторией, у которой радиус промежуточного апоцентра имеет конечное значение. Эта область выделена на

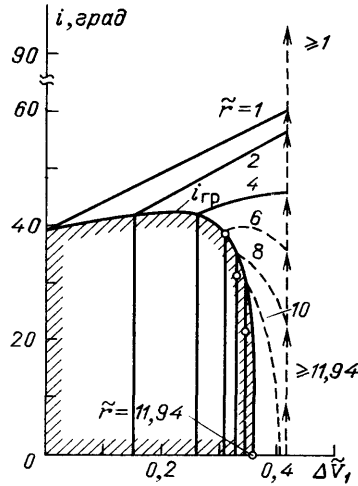


Рис. 5.35. Области оптимальности двух- и трехимпульсных траекторий перелета с одноразовым поворотом плоскости движения: кружки — граничные точки оптимальных двухимпульсных траекторий; штриховые линии — неоптимальные участки кривых; штриховкой обозначена граница области оптимальности двухимпульсных траекторий

рис. 5.35 штриховкой. Вместе с тем при больших величинах относительного радиуса ( $\tilde{r} > 6$ ) и больших углах некомпланарности, удовлетворяющих условию  $i \leq i_{гр}$ , может оказаться, что минимальное потребное приращение скорости на маневр реализуется в случае трехимпульсного пространственного перелета с неограниченно большим радиусом апоцентра ( $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ ). Соответствующие неоптимальные участки изолиний  $\tilde{r} = \text{const}$  показаны на рис. 5.35 пунктиром.

Для углов некомпланарности  $i > i_{гр}$  выгоднее использовать трехимпульсную траекторию, причем в зависимости от  $i$  можно выбрать такую величину  $\Delta V_1$  (или  $\tilde{r}_a$ ), которая обеспечивает перелет с минимальным потребным приращением скорости  $\Delta V_{\Sigma}$ .

Чтобы воспользоваться построенными на рис. 5.35 зависимостями, надо руководствоваться следующим правилом. Пусть заданы величины относительного радиуса  $\tilde{r}^*$  и угла некомпланарности  $i^*$ . Построим горизонтальную линию  $i = i^*$  и найдем ее пересечение с изолинией  $\tilde{r} = \tilde{r}^*$ . Если точка пересечения находится на сплошной части изолинии, то в случае  $i^* < i_{гр}$  (пересечение с вертикальной

частью изолинии) оптимальной оказывается двухимпульсная некомпланарная траектория, а в случае  $i^* > i_{гр}$  (пересечение с наклонной частью изолинии) оптимальной является трехимпульсная некомпланарная траектория перелета с ограниченной величиной радиуса промежуточного апоцентра. В тех случаях, когда точка

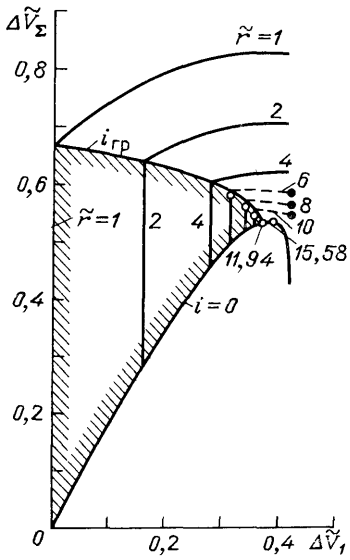


Рис. 5.36. Характеристики двух- и трехимпульсных траекторий перелета между некомпланарными круговыми орбитами (одноразовый поворот плоскости движения в апоцентре): светлые кружки — граничные точки оптимальных двухимпульсных траекторий; черные кружки — оптимальные точки; штриховые линии — неоптимальные участки кривых; штриховкой обозначена граница области оптимальности двухимпульсных траекторий

пересечения расположена на пунктирной части изолинии  $\tilde{r} = \tilde{r}^*$ , оптимальной является трехимпульсная некомпланарная траектория перелета с бесконечно большим радиусом апоцентра ( $r_a \rightarrow \infty$ ). Видно, что при  $i > 60^\circ$  или  $\tilde{r} > 11,94$  всегда оптимальна трехимпульсная некомпланарная траектория перелета с неограниченно большим радиусом апоцентра. Поскольку такой перелет требует бесконечно большого времени, его можно заменить траекторией с достаточно большой, но конечной величиной  $\tilde{r}_a$  без существенного увеличения  $\Delta\tilde{V}_z$ .

На рис. 5.36 построены значения  $\Delta\tilde{V}_z$ , отвечающие указанным областям оптимальности. Пунктиром показаны неоптимальные части кривых. Рис. 5.37 иллюстрирует минимальные потребные приращения скорости для перелета между некомпланарными круговыми орбитами с одноразовым поворотом плоскости движения. При  $i = 32,5^\circ$  величина  $\Delta\tilde{V}_z$  почти не зависит от  $\tilde{r}$  и составляет примерно 0,55 (от  $V_{кр1}$ ). По мере увеличения угла некомпланарности от  $32,5^\circ$  до  $90^\circ$  величина  $\Delta\tilde{V}_z$  сначала растет, а затем достигает некоторого предела, который тем больше, чем меньше  $\tilde{r}$ . Это означает, что для углов некомпланарности  $i > 40^\circ$  перелет на более удаленные орбиты требует меньшего суммарного приращения скорости  $\Delta\tilde{V}_z$ , чем перелет на близкие орбиты.



На рис. 5.38 построена наибольшая экономия в суммарном приращении скорости  $\delta\tilde{V}_\Sigma$  при использовании трехимпульсных некомпланарных траекторий перелета вместо двухимпульсных. Видно, что экономия достигается для углов некомпланарности  $i > 40^\circ$ . При фиксированном значении  $i$  экономия тем больше, чем меньше относительный радиус  $\tilde{r}$ .

**5.8.2. Второй некомпланарный трехимпульсный перелет.** Обсудим теперь второй некомпланарный трехимпульсный перелет с поворотом плоскости движения в три приема, когда одновременно с приложением каждого импульса скорости плоскость движения поворачивают на некоторый угол. Установлено, как и в задаче поворота плоскости круговой орбиты, что первый и третий углы поворота не превышают нескольких градусов. Поэтому основной поворот плоскости движения производится с помощью второго импульса скорости. Каждое изменение плоскости движения выполняется на линии узлов начальной и конечной орбит, а импульсы скорости прикладываются в плоскостях, нормальных текущим радиусам-векторам. Суммарное приращение скорости на такой маневр, отнесенное к  $V_{кр1}$ , вычисляется по формуле

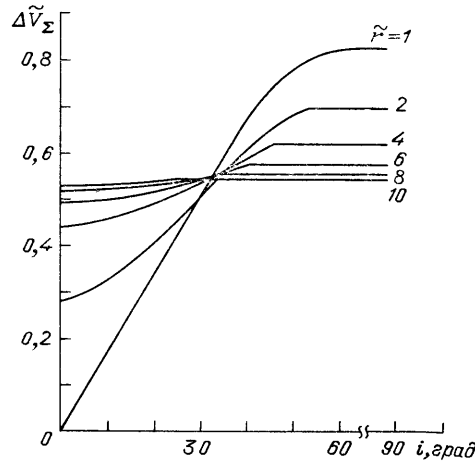


Рис. 5.37. Минимальное приращение скорости для перелета между некомпланарными круговыми орбитами с поворотом плоскости в апоцентре

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{V}_\Sigma = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3}{V_{кр1}} = & \sqrt{\frac{1 + 3\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a} - 2 \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a} \cos i_1} +} \\ & + \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a} \sqrt{\frac{1}{1 + \tilde{r}_a} + \frac{\tilde{r}_a}{\tilde{r} + \tilde{r}_a} - 2 \sqrt{\frac{\tilde{r}}{(1 + \tilde{r}_a)(\tilde{r} + \tilde{r}_a)} \cos i_2} +} \\ & + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \sqrt{\frac{\tilde{r} + 3\tilde{r}_a}{\tilde{r} + \tilde{r}_a} - 2 \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r} + \tilde{r}_a} \cos(i - i_1 - i_2)}. \quad (5.8.3) \end{aligned}$$

При  $\tilde{r}_a = \tilde{r}$  и  $i_1 + i_2 = i$  третий импульс скорости обращается в нуль. Поэтому второй некомпланарный трехимпульсный перелет трансформируется во второй некомпланарный двухимпульсный перелет, а формула (5.8.3) преобразуется в (5.7.3).

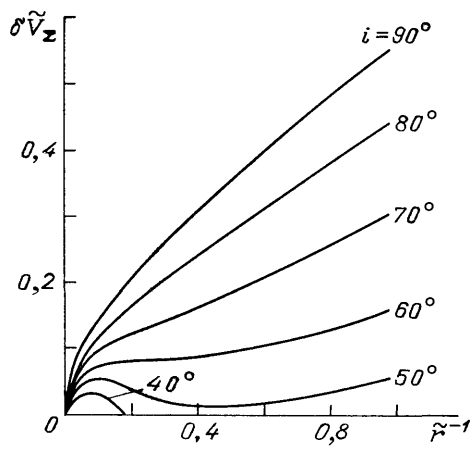


Рис. 5.38. Наибольший выигрыш в скорости при использовании трехимпульсных некопланарных траекторий перелета вместо двухимпульсных (поворот плоскости в апоцентре)

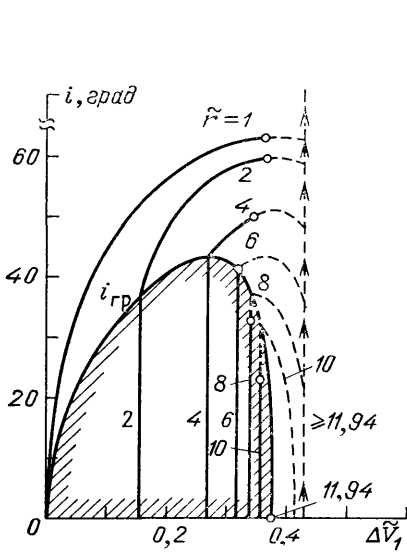


Рис. 5.39. Области оптимальности двух- и трехимпульсных траекторий перелета (при повороте плоскости движения с каждым импульсом скорости): кружки — граничные точки оптимальных двухимпульсных траекторий; штриховые линии — неоптимальные участки кривых; штриховкой обозначена граница области оптимальности двухимпульсных траекторий

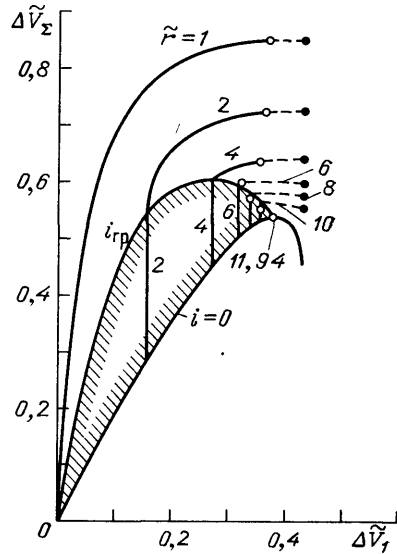


Рис. 5.40. Характеристики двух- и трехимпульсных траекторий перелета между некопланарными круговыми орбитами (при повороте плоскости движения с каждым импульсом скорости): светлые кружки — граничные точки оптимальных двухимпульсных траекторий; черные кружки — оптимальные точки; штриховые линии — неоптимальные участки кривых; штриховкой обозначена граница области оптимальности двухимпульсных траекторий

В общем случае  $\Delta\tilde{V}_2$  является функцией трех аргументов: углов поворота  $i_1, i_2$  и относительного радиуса апоцентра  $\tilde{r}_a$ . Численное исследование минимума этой функции позволило выделить области оптимальности двухимпульсных траекторий перелета с поворотом плоскости движения в два приема и трехимпульсных траекторий с поворотом плоскости в три приема (при ограниченной величине радиуса промежуточного апоцентра  $\tilde{r}_a$ ). Эти области построены на рис. 5.39. Как и прежде, граничный угол некомпланарности  $i_{гр}$  отвечает случаю вырождения трехимпульсного маневра в двухимпульсный ( $\tilde{r}_a = \tilde{r}, \Delta\tilde{V}_3 = 0$ ). В отличие от траектории перелета с однократным поворотом плоскости движения в апоцентре (см. рис. 5.35), здесь существуют оптимальные трехимпульсные траек-

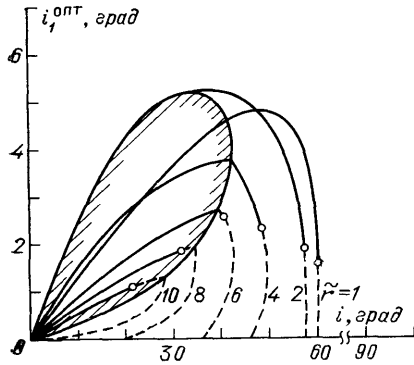


Рис. 5.41. Оптимальные величины первого угла поворота плоскости движения для двух- и трехимпульсных траекторий перелета (при повороте плоскости движения с каждым импульсом скорости): кружки — граничные точки оптимальных кривых; штриховые линии — неоптимальные части кривых; штриховкой обозначена граница области оптимальности двухимпульсных траекторий

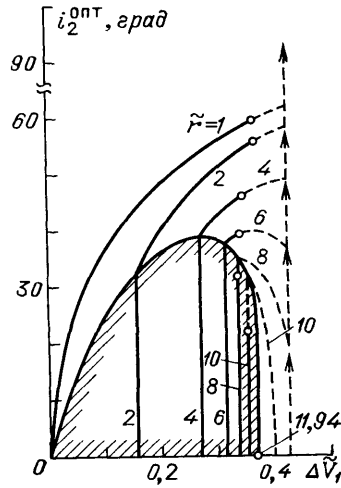


Рис. 5.42. Оптимальные величины второго угла поворота плоскости движения для двух- и трехимпульсных траекторий перелета (при повороте плоскости движения с каждым импульсом скорости): кружки — граничные точки оптимальных кривых; штриховые линии — неоптимальные части кривых; штриховкой обозначена граница области оптимальности двухимпульсных траекторий

тории даже при углах некомпланарности  $0 \leq i \leq 30^\circ$  и относительных радиусах орбит  $1 \leq \tilde{r} \leq 1.5$ . Пунктиром выделены части изолиний  $\tilde{r} = \text{const}$ , для которых оптимальным является второй некомпланарный трехимпульсный перелет с бесконечно большим радиусом апоцентра ( $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ ).

На рис. 5.40 построены необходимые приращения скорости, соответствующие областям оптимальности. Если  $i < 30^\circ$  и  $1,5 < \tilde{r} < 8$ , то оптимальным оказывается двухимпульсный перелет с поворотом плоскости в два приема. При  $\tilde{r} > 6$  оптимальными являются либо вторая двухимпульсная некомпланарная траектория (вырожденный случай трехимпульсной траектории с  $\tilde{r}_a = \tilde{r}$  и  $\Delta V_3 = 0$ ), либо вторая трехимпульсная некомпланарная траектория с  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ . Оптимальная величина радиуса апоцентра не может принимать промежуточных значений  $1 < \tilde{r}_a < \infty$ . Только при  $\tilde{r} < 6$  возможны оптимальные значения  $\tilde{r}_a$  внутри указанного диапазона.

На рис. 5.41 построены оптимальные величины первого угла поворота плоскости движения  $i_1^{\text{опт}}$ . Наибольшая величина  $i_1^{\text{опт}}$  не превышает  $6^\circ$ , причем максимум достигается вблизи значений  $i \approx 40^\circ$  и  $\tilde{r} \approx 1,5$ . Концы оптимальных участков выделены кружками. Если

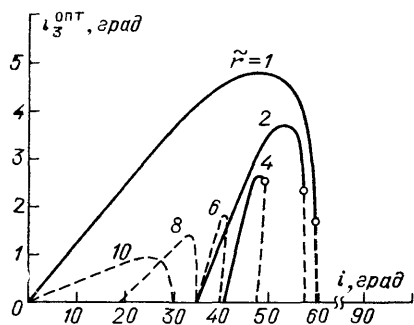


Рис. 5.43. Оптимальные величины третьего угла поворота плоскости движения для трехимпульсных траекторий перелета (при повороте плоскости движения с каждым импульсом скорости): кружки — граничные точки оптимальных кривых; штриховые линии — неоптимальные части кривых

угол некомпланарности превышает значения, отвечающие этим кружкам, то следует принять  $i_1^{\text{опт}} = 0$ .

На рис. 5.42 показаны оптимальные величины второго угла поворота плоскости движения  $i_2^{\text{опт}}$ . На рис. 5.43 представлены оптимальные величины третьего угла поворота плоскости движения  $i_3^{\text{опт}}$ . Наибольшая величина  $i_3^{\text{опт}}$  не превышает  $5^\circ$ , а при  $\tilde{r} > 6$  имеем  $i_3^{\text{опт}} = 0$ . Для углов некомпланарности  $i$ , при которых нет оптимальных зависимостей  $i_3^{\text{опт}}(i)$ , следует принять  $i_3^{\text{опт}} = 0$ .

**5.8.3. Области оптимальности двух- и трехимпульсного перелета.** На рис. 5.44 построены минимальные необходимые скорости для перелета между некомпланарными круговыми орбитами по двух- и трехимпульсным траекториям с поворотом плоскости движения соответственно в два и в три приема. Видно, что при  $i \approx 35^\circ$  величина  $\Delta V_2$  почти не зависит от  $\tilde{r}$ . При углах некомпланарности  $i > 45^\circ$  величина  $\Delta V_2$  уменьшается по мере увеличения  $\tilde{r}$ . Следо-

вательно, в указанных случаях перелет на более удаленные орбиты требует меньшего суммарного приращения скорости  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$ , чем перелет на близкие орбиты.

Заканчивая рассмотрение траекторий перелета между некомпланарными круговыми орбитами с числом импульсов не больше трех,

можно сделать некоторые общие выводы. Для трехимпульсных траекторий перелета с тремя поворотами плоскости движения величины первого и третьего углов поворота не превышает  $5^\circ$ — $6^\circ$ , т. е. малы. В значительном диапазоне углов некомпланарности  $i$  и относительных радиусов  $\tilde{r}$  первый и третий углы поворота равны нулю. Основным оказывается второй поворот плоскости движения, так как  $i_2 > 0,73 i$ . Именно этим объясняется тот факт, что траектория перелета с поворотом плоскости движения в три приема обеспечивает несущественную экономию  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$  по сравнению с траекторией, на которой поворот плоскости осуществляется только в апоцентре. Таким образом, во многих задачах можно ограничиться рассмотрением трехимпульсных траекторий с поворотом плоскости в апоцентре (первый некомпланарный трехимпульсный перелет), причем  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ , если  $i > 45^\circ$  или  $\tilde{r} > 11,94$ . Наибольший практический интерес представляет область, заданная условиями  $i < 30^\circ$ ,  $\tilde{r} < 8$ , где оптимальным оказывается первый некомпланарный двухимпульсный перелет с поворотом плоскости движения в апоцентре, радиус которого равен радиусу большей круговой орбиты ( $\tilde{r}_a = \tilde{r}$ ).

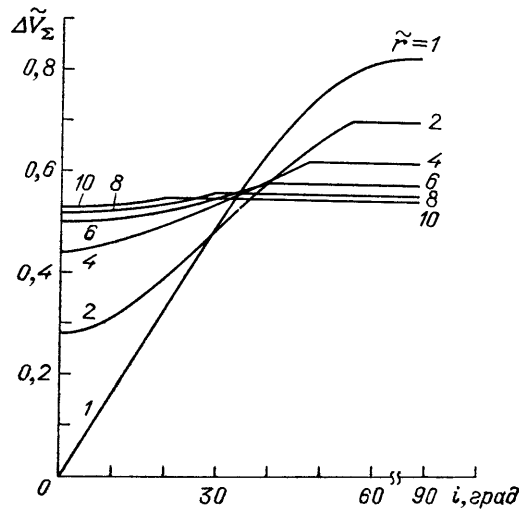


Рис. 5.44. Минимальные приращения скорости для перелета между некомпланарными круговыми орбитами (при повороте плоскости движения с каждым импульсом скорости)

Рис. 5.44. Минимальные приращения скорости для перелета между некомпланарными круговыми орбитами (при повороте плоскости движения с каждым импульсом скорости)

### § 5.9. Перелет с эллиптической орбиты на некомпланарную круговую

Сложность анализа задачи перелета с эллиптической орбиты на некомпланарную круговую орбиту существенно зависит от взаимного положения линии апсид и линии узлов, образованной плоскостями орбит [68, 70]. В частном случае, когда линия апсид совпадает с линией узлов, оптимальные траектории перелета ничем

не отличаются от траекторий перелета между некомпланарными круговыми орбитами: импульсы скорости прикладываются в моменты пересечения линии узлов и направлены в местной горизонтальной плоскости. С учетом соотношения геометрических размеров орбит оптимальной может оказаться одна из модифицированных траекторий Гоманна (с поворотом плоскости в один или два приема) или одна из трехимпульсных биэллиптических траекторий (с поворотом плоскости в один или три приема). Численные исследования показали следующее. Если радиус апоцентра начальной эллиптической орбиты меньше радиуса конечной круговой орбиты, то оптимальная траектория начинается в перигеуме. Если же радиус апоцентра эллиптической орбиты больше радиуса круговой орбиты, оптимальная траектория начинается в апоцентре.

Рассмотрим сначала общий случай двухимпульсного перелета КА с эллиптической орбиты на некомпланарную круговую. Предположим, что линия апсид не совпадает с линией узлов. Для некоторого упрощения этой общей сложной задачи, которую обычно исследуют численно, вводят дополнительные ограничения на величины, задающие орбиты и их взаимное расположение.

Сначала рассмотрим общую постановку задачи перелета с эллиптической орбиты на круговую при минимальном суммарном приращении скорости на маневр. Заметим, что полученное решение рассматриваемой задачи будет одновременно определять и оптимальную траекторию для обратной задачи перелета с круговой орбиты на некомпланарную эллиптическую.

На рис. 5.45 показана схема перелета с эллиптической орбиты на некомпланарную круговую. Здесь  $\omega$  — аргумент перицентра эллиптической орбиты,  $\Pi$  — перицентр,  $A$  — апоцентр,  $\vartheta_0$  — истинная аномалия точки отправления  $M_1$ ,  $\varphi_k$  — угловое расстояние от восходящего узла до точки  $M_2$  выхода на круговую орбиту,  $i$  — угол некомпланарности орбит.

При заданной ориентации начальной эллиптической орбиты (т. е. заданном угле  $\omega$ ), фиксированных точках отправления и прибытия суммарное приращение скорости  $\Delta V_{\Sigma}$  на двухимпульсный перелет будет зависеть от величины большой полуоси  $a$  эллиптической траектории перелета. Для вычисления  $\Delta V_{\Sigma}$  надо знать радиальную и трансверсальную составляющие скорости в точке отправления с эллиптической орбиты и в начальной точке эллипти-

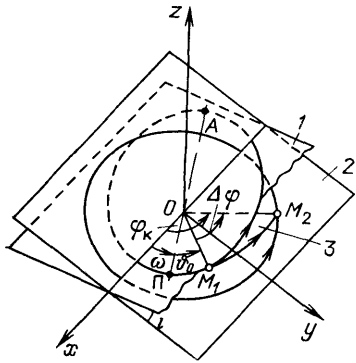


Рис 5.45. Схема пространственного перелета с эллиптической орбиты на круговую: 1 — плоскость начальной эллиптической орбиты; 2 — плоскость конечной круговой орбиты; 3 — плоскость перелета

ческой траектории перелета, а также в ее конечной точке. Необходимо еще знать углы  $i_1$  и  $i_2$ , образованные плоскостью перелета соответственно с плоскостями начальной и конечной орбит.

Отнесем радиальную (2.3.5) и трансверсальную (2.3.7) составляющие скорости эллиптической орбиты к круговой скорости  $V_{кр} = \sqrt{\mu/r_{кр}}$ , где  $r_{кр}$  — радиус конечной круговой орбиты; тогда получим

$$\hat{V}_r = \frac{V_r}{V_{кр}} = \sqrt{\frac{r_{кр}}{p}} e \sin \vartheta = \sqrt{\frac{r_{кр}}{a(1-e^2)}} e \sin \vartheta, \quad (5.9.1)$$

$$\tilde{V}_n = \frac{V_n}{V_{кр}} = \sqrt{\frac{r_{кр}}{p}} (1 + e \cos \vartheta) = \sqrt{\frac{r_{кр}}{a(1-e^2)}} (1 + e \cos \vartheta). \quad (5.9.2)$$

Здесь  $p$ ,  $e$ ,  $a$  — параметр, эксцентриситет и большая полуось рассматриваемой эллиптической орбиты,  $\vartheta$  — истинная аномалия. Поскольку заданы радиусы точек отправления и прибытия, то формулы (5.9.1) и (5.9.2) с учетом уравнения орбиты (2.2.31) удобнее представить в следующем виде:

$$\tilde{V}_r = \pm \sqrt{\frac{r_{кр}}{p}} \sqrt{e^2 \left[ 1 - \frac{1}{e^2} \left( \frac{p}{r} - 1 \right)^2 \right]} = \pm \sqrt{\frac{r_{кр}}{r} \left( 2 - \frac{p}{r} \right) - \frac{r_{кр}}{a}}, \quad (5.9.1a)$$

$$\tilde{V}_n = \frac{\sqrt{pr_{кр}}}{r}. \quad (5.9.2a)$$

Знак «+» — для восходящей, а «-» — для нисходящей ветвей эллиптической орбиты. Суммарное приращение скорости на двухимпульсный перелет, отнесенное к  $V_{кр}$ , вычисляется через приращения радиальной и трансверсальной составляющих скорости в точках отправления и прибытия

$$\Delta \tilde{V}_\Sigma = \Delta \tilde{V}_1 + \Delta \tilde{V}_2 = \sqrt{\Delta \tilde{V}_{r1}^2 + \Delta \tilde{V}_{n1}^2} + \sqrt{\Delta \tilde{V}_{r2}^2 + \Delta \tilde{V}_{n2}^2}, \quad (5.9.3)$$

где

$$\Delta \tilde{V}_{r1} = | \tilde{V}_{r1}^{\text{пер}} - \hat{V}_{r1} |, \quad (5.9.4)$$

$$\Delta \tilde{V}_{n1} = \sqrt{V_{n1}^2 + (\tilde{V}_{n1}^{\text{пер}})^2 - 2\hat{V}_{n1}\tilde{V}_{n1}^{\text{пер}} \cos i_1} \quad (5.9.5)$$

— соответственно радиальная и трансверсальная составляющие приращения скорости в точке отправления,  $\hat{V}_{r1}$ ,  $\hat{V}_{n1}$  — радиальная и трансверсальная составляющие скорости начальной эллиптической орбиты в точке отправления,  $\tilde{V}_{r1}^{\text{пер}}$ ,  $\tilde{V}_{n1}^{\text{пер}}$  — радиальная и трансверсальная составляющие скорости в начальной точке траектории перелета;

$$\Delta \tilde{V}_{r2} = | \tilde{V}_{r2}^{\text{пер}} |, \quad (5.9.6)$$

$$\Delta \tilde{V}_{n2} = \sqrt{(\tilde{V}_{n2}^{\text{пер}})^2 + 1 - 2\tilde{V}_{n2}^{\text{пер}} \cos i_2} \quad (5.9.7)$$

— радиальная и трансверсальная составляющие приращения скорости в точке прибытия на круговую орбиту,  $\hat{V}_{r_2}^{\text{пер}}$ ,  $\hat{V}_{n_2}^{\text{пер}}$  — радиальная и трансверсальная составляющие скорости в конечной точке траектории перелета.

Для определения величин  $\cos i_1$ ,  $\cos i_2$ , входящих в (5.9.5) и (5.9.7), предварительно рассмотрим единичные векторы  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$ ,  $\mathbf{n}_{\text{пер}}$ , нормальные соответственно плоскостям начальной орбиты, конечной орбиты и траектории перелета. В системе координат  $Oxyz$  (рис. 5.45), начало которой совпадает с притягивающим центром, ось  $Ox$  направлена в восходящий узел, ось  $Oy$  расположена в плоскости конечной круговой орбиты, а ось  $Oz$  дополняет систему координат до правой, единичные радиусы-векторы точек отправления  $\mathbf{r}_1^0$  и прибытия  $\mathbf{r}_2^0$  имеют такие составляющие:

$$\mathbf{r}_1^0 = [\cos(\omega + \vartheta_0), \cos i \sin(\omega + \vartheta_0), \sin i \sin(\omega + \vartheta_0)], \quad (5.9.8)$$

$$\mathbf{r}_2^0 = (\cos \varphi_k, \sin \varphi_k, 0). \quad (5.9.9)$$

Будем полагать, что векторы  $\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0$  неколлинеарны, тогда единичный вектор, нормальный плоскости перелета, определяется соотношением

$$\mathbf{n}_{\text{пер}}^0 = \frac{\mathbf{r}_1^0 \times \mathbf{r}_2^0}{|\mathbf{r}_1^0 \times \mathbf{r}_2^0|} = \left[ -\frac{\sin i \sin(\omega + \vartheta_0) \sin \varphi_k}{\sin \Delta\varphi}, \frac{\sin i \sin(\omega + \vartheta_0) \cos \varphi_k}{\sin \Delta\varphi}, \frac{\cos(\omega + \vartheta_0) \sin \varphi_k - \cos i \sin(\omega + \vartheta_0) \cos \varphi_k}{\sin \Delta\varphi} \right], \quad (5.9.10)$$

где  $\Delta\varphi$  — угловая дальность перелета от начальной точки  $M_1$  до конечной точки  $M_2$ , вычисляемая по формуле

$$\Delta\varphi = \arccos(\mathbf{r}_1^0 \cdot \mathbf{r}_2^0) = \arccos[\cos(\omega + \vartheta_0) \cos \varphi_k + \cos i \sin(\omega + \vartheta_0) \sin \varphi_k]. \quad (5.9.11)$$

Запишем единичные векторы, нормальные плоскостям начальной и конечной орбит,

$$\mathbf{n}_1^0 = (0, -\sin i, \cos i). \quad (5.9.12)$$

$$\mathbf{n}_2^0 = (0, 0, 1). \quad (5.9.13)$$

Теперь можно вычислить

$$\cos i_1 = \mathbf{n}_1^0 \cdot \mathbf{n}_{\text{пер}}^0 = \frac{\cos i \cos(\omega + \vartheta_0) \sin \varphi_k - \sin(\omega + \vartheta_0) \cos \varphi_k}{\sin \Delta\varphi}, \quad (5.9.14)$$

$$\cos i_2 = \mathbf{n}_2^0 \cdot \mathbf{n}_{\text{пер}}^0 = \frac{\cos(\omega + \vartheta_0) \sin \varphi_k - \cos i \sin(\omega + \vartheta_0) \cos \varphi_k}{\sin \Delta\varphi}. \quad (5.9.15)$$

Чтобы определить суммарное приращение скорости на двухимпульсный перелет с эллиптической орбиты на круговую, необходи-



мо знать элементы траектории перелета, которая является частью эллиптической орбиты, заключенной между точками отправления ( $M_1$ ) и прибытия ( $M_2$ ). Если векторы  $r_1^0$  и  $r_2^0$  неколлинеарны, то существует бесконечное число эллипсов, проходящих через точки  $M_1$ ,  $M_2$  и лежащих в одной плоскости. В случае коллинеарности векторов  $r_1^0$  и  $r_2^0$  существует бесконечное число возможных плоскостей перелета. В дальнейшем ограничимся рассмотрением первого случая, как представляющего наибольший интерес.

Пусть даны две точки,  $M_1$  и  $M_2$ , расположенные соответственно на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от притягивающего центра  $O$ ; угловая дальность между этими точками равна  $\Delta\varphi$  (рис. 5.46). По определению эллипса как геометрического места точек, сумма расстояний которых до фокусов есть величина постоянная и равная удвоенной большой полуоси, т. е.  $2a_{\text{пер}}$ , можно построить второй фокус (первый совпадает с притягивающим центром  $O$ ). Проведем из точки  $M_1$  окружность радиуса  $2a_{\text{пер}} - r_1$ , а из точки  $M_2$  окружность радиуса  $2a_{\text{пер}} - r_2$ . Точки пересечения этих окружностей определяют возможные положения второго фокуса. В общем случае имеют место две точки пересечения, отсюда — существование двух различных эллиптических траекторий с одинаковой величиной большой полуоси. Меняя величину  $2a_{\text{пер}}$ , можно построить геометрическое место точек вторых фокусов, которое по построению является гиперболой с фокусами в точках  $M_1$  и  $M_2$ . Предельный случай касания двух окружностей определяет единственный второй фокус  $F'$ , расположенный на отрезке прямой  $M_1M_2$ . В этом случае величина большой полуоси оказывается минимальной возможной

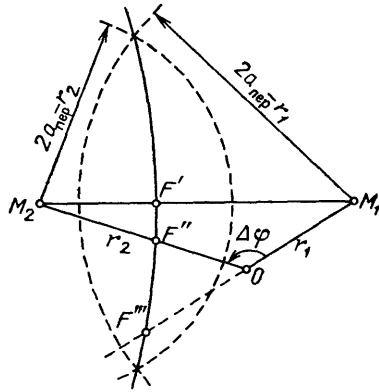


Рис. 5.46. Построение второго фокуса эллиптической траектории перелета от точки  $M_1$  к точке  $M_2$

$$a_{\text{пер}}^{\text{min}} = \frac{r_1 + r_2 + c}{4}, \tag{5.9.16}$$

где

$$c = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \Delta\varphi} \tag{5.9.17}$$

— длина отрезка прямой  $M_1M_2$ .

Если  $a_{\text{пер}} > a_{\text{пер}}^{\text{min}}$ , то возможны две эллиптические траектории перелета с общим фокусом в точке  $O$  и разными вторыми фокусами. Для одной траектории оба фокуса расположены по одну сторону от прямой  $M_1M_2$ , а для второй — по разные стороны. На рис. 5.46 построен пример для случая, когда  $r_1 < r_2$ . Если при этом

величина большой полуоси выбрана так, что второй фокус оказывается в точке  $F'''$ , то начальная точка траектории перелета  $M_1$  является ее перигентом. Если бы перелет совершался из точки  $M_2$  в точку  $M_1$  (величина начального радиуса-вектора больше величины конечного радиуса-вектора), то при нахождении второго фокуса в точке  $F''$  апоцентр траектории перелета совпадал бы с точкой отправления  $M_2$ .

Предположим теперь, что положение второго фокуса на гиперболе выбрано. Тем самым однозначно определена величина большой полуоси  $a_{\text{пер}}$  траектории перелета и ориентация линии апсид. Следовательно, графически или аналитически (доказательство приведено в гл. 4) можно определить все необходимые величины для

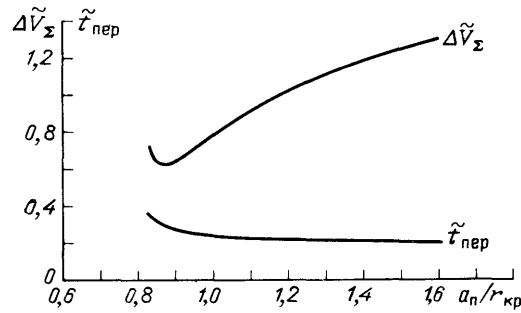


Рис. 5.47. Характеристики траектории перелета ( $a_0 = r_{\text{кр}}$ ,  $e = 0,3$ ,  $i = 20^\circ$ ,  $\omega = 30^\circ$ ,  $\vartheta_0 = 0^\circ$ ,  $\varphi_{\text{к}} = 170^\circ$ )

расчета траектории перелета, затем по формулам (5.9.1) — (5.9.7), (5.9.14), (5.9.15) вычислить  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$ . Изменяя положение второго фокуса (или величину большой полуоси), можно определить оптимальную траекторию перелета с минимальным значением  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$ .

На рис. 5.47 приведены типичные результаты расчета для случая перелета с эллиптической орбиты на круговую при

следующих условиях [68]: радиус круговой орбиты равен величине большой полуоси начальной эллиптической орбиты ( $r_{\text{кр}} = a$ ), эксцентриситет которой  $e = 0,3$ , аргумент перигента  $\omega = 30^\circ$ , точка отправления совпадает с перигентом ( $\vartheta_0 = 0$ ), угловое расстояние от линии узлов начальной и конечной орбит до точки прибытия, измеряемой в плоскости круговой орбиты,  $\varphi_{\text{к}} = 170^\circ$ , угол некомпланарности  $i = 20^\circ$ . Как показали расчеты, для таких условий перелета минимальное значение  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$  реализуется на траекториях, у которых оба фокуса располагаются по одну сторону от прямой  $M_1M_2$ . В рассматриваемом примере  $\min \Delta\tilde{V}_\Sigma = 0,61$  имеет место при

$a_{\text{пер}}/r_{\text{кр}} = 0,86$ , а время перелета, отнесенное к периоду обращения на круговой орбите,  $\tilde{t}_{\text{пер}} = t_{\text{пер}}/T_{\text{кр}} = 0,3$ . Чтобы уменьшить это время перелета на одну треть, необходимо почти удвоить величину  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$ . Обсуждаемый пример иллюстрирует характер изменения зависимостей  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(a_{\text{пер}}/r_{\text{кр}})$  и  $\tilde{t}_{\text{пер}}(a_{\text{пер}}/r_{\text{кр}})$  при фиксированных положениях точек отправления и прибытия.

Для каждой точки отправления с эллиптической орбиты ( $\vartheta_0$ ) существует своя оптимальная точка прибытия на круговую орбиту

$\varphi_k^{\text{опт}}$ ), обеспечивающая минимальное значение  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$  (рис. 5.48, а). При этом угловая дальность перелета (5.9.11) может существенно отличаться от  $180^\circ$ , хотя при компланарном перелете такая угловая дальность обычно является оптимальной. В рассматриваемом примере даже в случае перелета из перицентра эллиптической

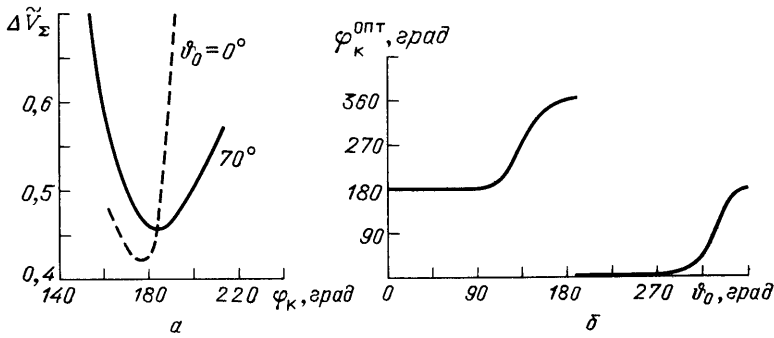


Рис. 5.48. Выбор оптимальной точки прибытия на круговую орбиту (а) и совокупность оптимальных точек прибытия для различных начальных точек (б) ( $a = r_{\text{кр}}, e = 0,3, i = 20^\circ, \omega = 30^\circ$ )

орбиты ( $\vartheta_0 = 0$ ) оптимальной оказалась угловая дальность  $\Delta\varphi^{\text{опт}} = 150^\circ$ . Численные расчеты показывают, что в большинстве случаев оптимальные точки прибытия располагаются вблизи линии узлов (рис. 5.48, а, б). Поскольку здесь угол  $\varphi_k$ , определяющий положение точки прибытия на круговой орбите, отсчитывается от линии узлов начальной и конечной орбит, то  $\varphi_k^{\text{опт}} \approx 180^\circ$  или  $0^\circ$  ( $360^\circ$ ). Лишь для ограниченной совокупности точек отправления в диапазоне  $110^\circ < \vartheta_0 < 160^\circ$  и  $290^\circ < \vartheta_0 < 340^\circ$  имеем соответственно  $200^\circ < \varphi_k^{\text{опт}} < 340^\circ$  и  $20^\circ < \varphi_k^{\text{опт}} < 160^\circ$ , т. е. оптимальные точки прибытия располагаются между узлами.

Ниже обсуждаются некоторые другие результаты численного исследования рассматриваемого примера.

На рис. 5.49 построены зависимости  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\vartheta_0)$  и  $\tilde{t}_{\text{пер}}(\vartheta_0)$ . Минимальная величина  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$  достигается в точке отправления с истинной аномалией  $\vartheta_0 = 160^\circ$ , которая является промежуточной между точками линии узлов ( $\vartheta = 150^\circ$ ) и апоцентра ( $\vartheta = 180^\circ$ ). При этом

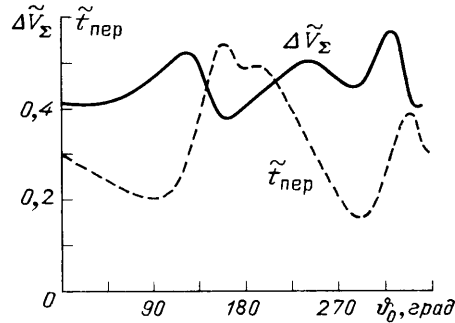


Рис. 5.49. Характеристики оптимальных траекторий перелета для разных точек отправления с эллиптической орбиты на круговую ( $a = r_{\text{кр}}, e = 0,3, i = 20^\circ, \omega = 30^\circ$ )

время перелета оказывается близким к максимальному ( $\bar{t}_{\text{пер}} = 0,54$ ), что во многих задачах нежелательно. Если в качестве начальной выбрать точку вблизи перигея с истинной аномалией от  $340^\circ$  до  $60^\circ$ , то величина  $\Delta\tilde{V}_z$  оказывается близкой к минимальной возможной, а время перелета сокращается почти вдвое.

При изменении угла некомпланарности в диапазоне  $i = 10^\circ \div 30^\circ$  форма кривых  $\Delta\tilde{V}_z(\vartheta_0)$  практически сохраняется, хотя сами величины суммарного приращения скорости увеличиваются с возрастанием  $i$  (рис. 5.50, а). Время перелета, величина большой полуоси

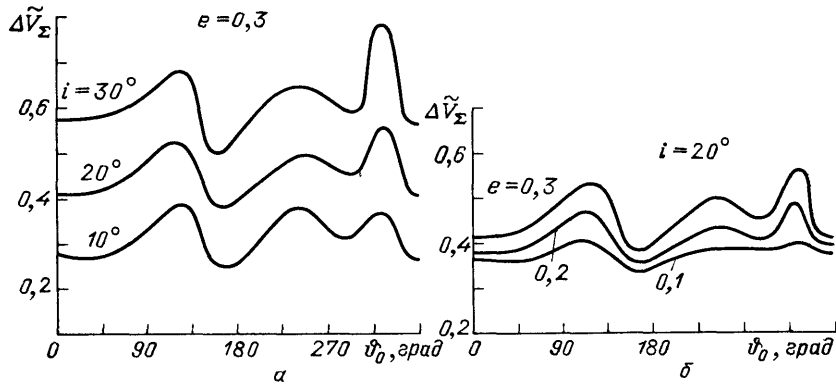


Рис. 5.50. Влияние угла некомпланарности орбит (а) и эксцентриситета эллиптической орбиты (б) на величину суммарного приращения скорости для перелета с эллиптической орбиты на круговую ( $a = r_{\text{кр}}$ ,  $\omega = 30^\circ$ )

эллиптической траектории перелета и положение оптимальной точки прибытия оказываются почти такими же, как при угле некомпланарности  $i = 20^\circ$ .

Исследование влияния вариации эксцентриситета начальной эллиптической орбиты в диапазоне  $e = 0,1 \div 0,3$  иллюстрирует рис. 5.50, б. Видно, что положение относительных минимумов зависимостей  $\Delta\tilde{V}_z(\vartheta_0)$  практически сохраняется при рассмотренных значениях эксцентриситета, хотя сами минимальные величины  $\Delta\tilde{V}_z$  несколько возрастают с увеличением эксцентриситета.

Анализ рассмотренных примеров двухимпульсных траекторий перелета с эллиптической орбиты на близкую к ней по размерам некомпланарную круговую орбиту позволяет сделать следующие выводы. Для каждой точки отправления с эллиптической орбиты существует своя оптимальная точка прибытия на круговую орбиту, обеспечивающая минимальную величину  $\Delta\tilde{V}_z$ . На эллиптической орбите имеется некоторая совокупность точек отправления, для которых величина  $\Delta\tilde{V}_z$  оказывается меньше, чем при отправлении из перигея или апогея. Оптимальные точки прибытия на круговую орбиту, как правило, располагаются вблизи линии узлов, образованной плоскостями начальной и конечной орбит. При уве-

личении угла некомпланарности увеличивается минимальное потребное приращение скорости  $\Delta V_z$  на маневр, а оптимальная величина большой полуоси траектории перелета, время перелета, оптимальная точка прибытия на круговую орбиту практически не зависят от угла некомпланарности в диапазоне  $10^\circ \leq i \leq 30^\circ$ . С уменьшением эксцентриситета начальной эллиптической орбиты уменьшается минимальная величина  $\Delta V_z$ , а зависимость  $\Delta V_z(\vartheta_0)$  становится более пологой.

Метод численного анализа можно применять и для задачи оптимального перелета между некомпланарными эллиптическими орбитами. Вычислительная процедура близка к рассмотренной выше, но при этом существенно увеличивается объем расчетов, усложняется наглядное представление результатов и их обобщение из-за большого числа исходных параметров задачи.

### § 5.10. Оптимальная ориентация импульса скорости для схода с орбиты

Когда требуется обеспечить спуск КА с произвольной орбиты на планету, имеющую атмосферу, обычно возникает задача о выборе ориентации тормозного импульса скорости из условия оптимизации некоторых параметров траектории входа в атмосферу. При этом используют понятие *условной границы атмосферы*, т. е. сферической поверхности, ниже которой необходимо учитывать воздействие на КА аэродинамических сил. Понятно, что высота условной границы атмосферы должна зависеть от свойств самой атмосферы и аэродинамических характеристик КА. Так, условную границу атмосферы Земли принимают на высотах 80—120 км, атмосферы Марса — на высоте  $\sim 100$  км, атмосферы Венеры — на высоте  $\sim 120$  км.

В качестве критерия оптимальности наиболее часто рассматривают угол входа в атмосферу, т. е. угол наклона траектории на условной границе атмосферы. Бывает, что требуется минимизировать разброс угла входа при возможных ошибках в ориентации тормозного импульса скорости и его величине. Иногда необходимо уменьшить отклонение точки входа в атмосферу от расчетной и т. п.

**5.10.1. Получение максимального по величине угла входа в атмосферу.** Рассмотрим компланарную задачу схода КА с произвольной орбиты, параметры которой заданы, т. е. в каждый момент времени известны текущие величины радиуса-вектора  $r$ , скорости  $V$  и угла наклона траектории  $\theta$ . При заданной величине тормозного импульса скорости  $\Delta V$  требуется определить оптимальное направление импульса из условия получения максимального по величине угла входа в атмосферу. Условная граница атмосферы задана радиусом  $r_{ат}$ . В силу обратимости, найденное решение будет обеспечивать заданный угол входа с минимальным по величине тормозным импульсом. Угол входа  $\theta_{вх}$  является наиболее существенным

параметром, от которого зависит траектория спуска в атмосфере, так как для реальных величин  $\Delta V$  скорость входа  $V_{вх}$  мало меняется при изменении ориентации тормозного импульса скорости. Правда, в приведенном ниже анализе задачи схода с орбиты величина  $\Delta V$  не ограничивается в целях большей общности получаемых результатов.

Пусть тормозной импульс скорости  $\Delta V$  прикладывается в заданной точке начальной орбиты. Эта точка характеризуется величиной радиуса-вектора  $r_0$ , скоростью  $V_0$  и углом наклона траектории  $\theta_0$ . Вектор  $\Delta V$  сообщается под некоторым углом  $\chi$ , который отсчитывается от направления, противоположного вектору  $V_0$ . Вектор  $\Delta V$  может иметь отрицательную или положительную радиальную составляющую. В случае круговой начальной орбиты знак радиальной составляющей не влияет на величину угла входа в атмосферу, хотя угловая дальность до точки входа существенно различается (рис. 5.51). Действительно, при  $|\Delta V| = |\Delta V'|$  и  $|\chi| = |\chi'|$  в силу симметрии реализуется нисходящая или восходящая ветви

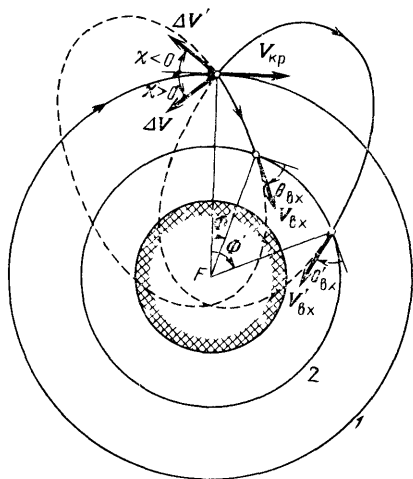


Рис. 5.51. Возможные траектории спуска с круговой орбиты: 1 — начальная круговая орбита; 2 — условная граница атмосферы

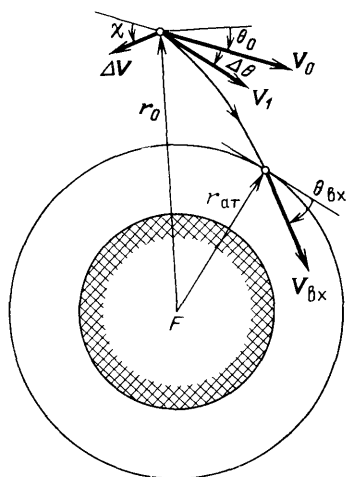


Рис. 5.52. Схема торможения при спуске с произвольной орбиты

переходной эллиптической траектории соответственно для отрицательной и положительной радиальной составляющей  $\Delta V$ . Отсюда для начальной круговой орбиты имеем равенство углов  $\theta_{вх} = \theta'_{вх}$  и скоростей  $V_{вх} = V'_{вх}$  на условной границе атмосферы. Однако эти траектории различаются по угловой дальности от точки приложения импульса скорости  $\Delta V$  до входа в атмосферу:  $\Phi' > \Phi$ . Траектория с большей угловой дальностью всегда чувствительнее к ошибкам реализации  $\Delta V$ , чем траектория с меньшей дальностью. Поэтому

практический интерес представляет только короткая траектория спуска, которая реализуется при отрицательной радиальной составляющей вектора  $\Delta V$ .

Возвращаясь к общей постановке задачи, когда начальная орбита может быть произвольной, заметим, что при одинаковых по величине, но разных по знаку радиальных составляющих  $\Delta V$  переходные траектории будут иметь разные по величине углы входа в атмосферу, если траектория с положительной радиальной составляющей вообще пересекает условную границу атмосферы. Поэтому целесообразно ограничиться рассмотрением только случая отрицательной радиальной составляющей тормозного импульса скорости  $\Delta V$ .

После приложения  $\Delta V$  получим (рис. 5.52):

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}, \quad (5.10.1)$$

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 + \Delta V^2 - 2V_0\Delta V \cos \chi}. \quad (5.10.2)$$

Изменение угла наклона траектории

$$\Delta \theta = \arccos \frac{V_0 - \Delta V \cos \chi}{V_1}. \quad (5.10.3)$$

Примем, что трансверсальная составляющая орбитальной скорости не меняет направления после приложения  $\Delta V$ , т. е. всегда выполняется условие

$$V_0 - \Delta V \cos \chi > 0.$$

Используя интеграл энергии (2.2.1) и площадей (2.2.11), вычислим скорость и угол наклона траектории при входе в атмосферу

$$V_{\text{вх}} = \sqrt{V_1^2 + \eta}, \quad (5.10.4)$$

$$\theta_{\text{вх}} = -\arccos \left[ \tilde{r} \frac{(V_0 - \Delta V \cos \chi) \cos \theta_0 + \Delta V \sin \theta_0 \sin \chi}{\sqrt{V_1^2 + \eta}} \right]. \quad (5.10.5)$$

Здесь

$$\eta = \frac{2\mu(\tilde{r}-1)}{r_0}, \quad (5.10.6)$$

где  $\tilde{r} = r_0/r_{\text{вх}} \geq 1$ ,  $\mu$  — произведение массы притягивающего тела на постоянную притяжения. Знак «-» в формуле (5.10.5) показывает, что радиальная составляющая скорости входа отрицательна.

Вычислим производную угла входа  $\theta_{\text{вх}}$  по  $\chi$  — углу ориентации тормозного импульса скорости:

$$\frac{d\theta_{\text{вх}}}{d\chi} = \frac{\tilde{r}}{\sin \theta_{\text{вх}}} \left\{ \frac{V_0 \Delta V \sin \chi}{\sqrt{(V_1^2 + \eta)^3}} [(V_0 - \Delta V \cos \chi) \cos \theta_0 + \Delta V \sin \theta_0 \sin \chi] - \frac{\Delta V}{\sqrt{V_1^2 + \eta}} (\sin \chi \cos \theta_0 + \cos \chi \sin \theta_0) \right\}. \quad (5.10.7)$$

Полагая  $d\theta_{\text{вх}}/d\chi = 0$ , найдем необходимое условие оптимальности угла  $\chi$ :

$$(V_0 - \Delta V \cos \chi) V_0 \sin \chi - (V_0^2 + \Delta V^2 - 2V_0 \Delta V \cos \chi + \eta) \sin \chi + \\ + \operatorname{tg} \theta_0 [V_0 \Delta V \sin^2 \chi - (V_0^2 + \Delta V^2 - 2V_0 \Delta V \cos \chi + \eta) \cos \chi] = 0,$$

или

$$(V_0 \Delta V \cos \chi - \Delta V^2 - \eta) \sin \chi + \operatorname{tg} \theta_0 [V_0 \Delta V - (V_0^2 + \Delta V^2 + \eta) \cos \chi + \\ + V_0 \Delta V \cos^2 \chi] = 0. \quad (5.10.8)$$

Для заданных значений  $r_0$ ,  $V_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\mu$  и  $\Delta V$  можно численно решить уравнение (5.10.8) и определить величины угла  $\chi$ , удовлетворяющие необходимому условию оптимальности. Затем выбрать тот угол ориентации тормозного импульса скорости, при котором достигается максимальный (по абсолютной величине) угол входа в атмосферу.

Исследование задачи в общем виде можно довести до конца, если ограничиться случаем  $\theta_0 = 0$ , который соответствует спуску с круговой орбиты, а также спуску из апоцентра (перигентра) эллиптической орбиты или из перигентра параболической и гиперболической орбит. Эти случаи представляют наибольший практический интерес. С учетом  $\theta_0 = 0$  получим из (5.10.8)

$$(V_0 \Delta V \cos \chi - \Delta V^2 - \eta) \sin \chi = 0 \quad (5.10.9)$$

Отсюда имеем два значения угла  $\chi$ , удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности:

$$\chi_1 = 0, \quad (5.10.10)$$

$$\chi_2 = \arccos \frac{\Delta \tilde{V}^2 + \tilde{\eta}}{\Delta \tilde{V}}, \quad (5.10.11)$$

где

$$\Delta \tilde{V} = \Delta V / V_0, \quad \tilde{\eta} = \eta / V_0^2. \quad (5.10.12)$$

В рассматриваемом случае  $\theta_0 = 0$  спуск с орбиты может происходить в перигентре произвольной орбиты, где истинная аномалия  $\vartheta_0 = 0$ , апоцентре эллиптической орбиты ( $\vartheta_0 = \pi$ ) или любой точке круговой орбиты. Поэтому с учетом (2.3.9) и (2.3.10) можно записать

$$V_0^2 = \frac{\mu}{p} (1 \pm e)^2. \quad (5.10.13)$$

Здесь знак «+» соответствует сходу с орбиты в перигентре, а знак «-» отвечает сходу в апоцентре. Далее, с учетом (5.10.6) и



(5.10.13) получим окончательно

$$\tilde{\eta} = \frac{2(\tilde{r} - 1)}{1 \pm e}. \quad (5.10.14)$$

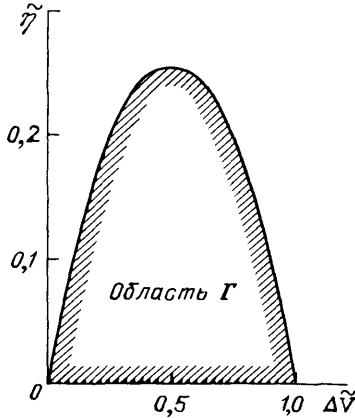
В плоскости параметров  $(\Delta\tilde{V}, \tilde{\eta})$  можно построить область  $\Gamma$ , в которой угол  $\chi_2 > 0$ . На границе области  $\Gamma$  имеем  $\chi_2 = 0$ . Полагая в (5.10.11)  $\chi_2 \geq 0$ , получим

$$\Delta\tilde{V}^2 - \Delta\tilde{V} + \tilde{\eta} \leq 0. \quad (5.10.15)$$

Следовательно, область  $\Gamma$  — это часть плоскости, ограниченная параболой (5.10.15) и осью  $\tilde{\eta} = 0$ , поскольку  $\tilde{\eta} \geq 0$  согласно (5.10.14). Окончательно условие  $\chi_2 \geq 0$  можно записать двумя соотношениями, которые эквивалентны (5.10.15):

$$\left| \Delta\tilde{V} - \frac{1}{2} \right| \leq \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{\eta}}, \quad (5.10.16)$$

$$0 \leq \tilde{\eta} \leq \frac{1}{4}. \quad (5.10.17)$$



Область  $\Gamma$  для случая схода с произвольной орбиты в точке, где  $\theta_0 = 0$ , показана на рис. 5.53.

Рассмотрим теперь вторую производную  $d^2\theta_{\text{вх}}/d\chi^2$  при условии, что  $\theta_0 = 0$ . Дифференцируя (5.10.7) по  $\chi$  и полагая  $\theta_0 = 0$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_{\text{вх}}}{d\chi^2} \Big|_{\theta_0=0} &= - \left( \frac{d\theta_{\text{вх}}}{d\chi} \right)_{\theta_0=0}^2 \text{ctg } \theta_{\text{вх}} + \\ &+ \frac{\tilde{r}}{\sin \theta_{\text{вх}}} \left[ - \frac{3V_0^2 \Delta V^2 \sin^2 \chi}{V (V_1^2 + \eta)^5} (V_0 - \Delta V \cos \chi) + \right. \\ &\left. + \frac{V_0^2 \Delta V \cos \chi - V_0 \Delta V^2 \cos^2 \chi + 2V_0 \Delta V^2 \sin^2 \chi}{V (V_1^2 + \eta)^3} - \frac{\Delta V \cos \chi}{V \sqrt{V_1^2 + \eta}} \right]. \quad (5.10.18) \end{aligned}$$

Исследуем теперь знак  $d^2\theta_{\text{вх}}/d\chi^2$  в точках стационарности. После подстановки  $\chi = \chi_1 = 0$  в уравнение (5.10.18) и перехода к безразмерным параметрам (5.10.12) имеем

$$\frac{d^2\theta_{\text{вх}}}{d\chi^2} \Big|_{\substack{\theta_0=0 \\ \chi=\chi_1=0}} = - \frac{\tilde{r}}{\sin \theta_{\text{вх}}} \frac{\Delta\tilde{V}}{V [(1 - \Delta\tilde{V})^2 + \tilde{\eta}]^3} (\Delta\tilde{V}^2 - \Delta\tilde{V} + \tilde{\eta}). \quad (5.10.19)$$

Знак (5.10.19) зависит от знака сомножителя  $(\Delta\tilde{V}^2 - \Delta\tilde{V} + \tilde{\eta})$ , ко-

торый на границе области  $\Gamma$  обращается в нуль. Поэтому

$$\frac{d^2\theta_{\text{вх}}}{d\chi^2} \Big|_{\theta_0=0, \chi=\chi_1=0} \begin{cases} > 0 \text{ вне области } \Gamma, \\ = 0 \text{ на границе области } \Gamma, \\ < 0 \text{ внутри области } \Gamma. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что на границе области  $\Gamma$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d^3\theta_{\text{вх}}}{d\chi^3} \Big|_{\theta_0=0, \chi=\chi_1=0} &= 0, \\ \frac{d^4\theta_{\text{вх}}}{d\chi^4} \Big|_{\theta_0=0, \chi=\chi_1=0} &= \frac{3\tilde{r}\Delta\tilde{V}^2}{\sqrt{(1-\Delta\tilde{V})^3 [1-\tilde{r}^2(1-\Delta\tilde{V})]}} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условие ориентации  $\chi_1=0$  тормозного импульса скорости обеспечивает минимальный угол входа в атмосферу (т. е. максимальный по абсолютной величине угол входа, поскольку  $\theta_{\text{вх}} < 0$ ), если параметры  $\Delta\tilde{V}$  и  $\tilde{\eta}$  находятся вне области  $\Gamma$  или на ее границе.

Определим знак второй производной (5.10.18) при  $\chi = \chi_2$ . После несложных преобразований получим с учетом (5.10.14)

$$\frac{d^2\theta_{\text{вх}}}{d\chi^2} \Big|_{\theta_0=0, \chi=\chi_2} = \frac{\tilde{r}}{\sin\theta_{\text{вх}}} \frac{(\Delta\tilde{V}^2 + \Delta\tilde{V} + \tilde{\eta})(\Delta\tilde{V}^2 - \Delta\tilde{V} + \tilde{\eta})}{\sqrt{[1 - (\Delta\tilde{V}^2 + \tilde{\eta})]^3}}. \quad (5.10.20)$$

Знак второй производной (5.10.20) определяется знаком сомножителя  $(\Delta\tilde{V}^2 - \Delta\tilde{V} + \tilde{\eta})$ , который отрицателен в области  $\Gamma$ , обращается в нуль на ее границе и положителен вне этой области. Отсюда видно, что

$$\frac{d^2\theta_{\text{вх}}}{d\chi^2} \Big|_{\theta_0=0, \chi=\chi_2} \begin{cases} > 0 \text{ внутри области } \Gamma, \\ = 0 \text{ на границе области } \Gamma, \\ < 0 \text{ вне области } \Gamma. \end{cases}$$

Итак, если заданная точка  $(\Delta\tilde{V}, \tilde{\eta})$  находится внутри области  $\Gamma$ , т. е. величины  $\Delta\tilde{V}$  и  $\tilde{\eta}$  удовлетворяют условиям (5.10.16), (5.10.17), для получения максимального (по абсолютной величине) угла входа в атмосферу тормозной импульс скорости должен прикладываться под углом  $\chi = \chi_2$ , который вычисляется по формуле (5.10.14). Если же заданная точка  $(\Delta\tilde{V}, \tilde{\eta})$  находится на границе области  $\Gamma$  или вне указанной области, то максимальный (по абсолютной величине) угол входа достигается при ориентации тормозного импульса скорости строго против направления движения, т. е.  $\chi = \chi_1 = 0$  [54].

В случае ненулевой оптимальной ориентации тормозного импульса скорости параметры траектории на высоте условной границы

атмосферы вычисляются по формулам

$$\tilde{V}_{\text{вх}} = \sqrt{1 - \Delta\tilde{V}^2 - \tilde{\eta}}, \quad (5.10.21)$$

$$\theta_{\text{вх}} = -\arccos\left(\tilde{r} \sqrt{1 - \Delta\tilde{V}^2 - \tilde{\eta}}\right), \quad (5.10.22)$$

где  $\tilde{V}_{\text{вх}} = V_{\text{вх}}/V_0$ .

Обращая формулу (5.10.22), можно определить минимальную требуемую величину тормозного импульса скорости для заданного угла входа в атмосферу  $\theta_{\text{вх}}^*$ :

$$\Delta\tilde{V} = \sqrt{1 - \tilde{\eta} - \left(\frac{\cos \theta_{\text{вх}}^*}{\tilde{r}}\right)^2}. \quad (5.10.23)$$

Предельный радиус точки торможения, до которой существует ненулевой угол ориентации тормозного импульса скорости, определяется согласно (5.10.17) условием  $\tilde{\eta} = 1/4$  или с учетом (5.10.14)

$$\tilde{r}_{\text{пред}} = 1 + \frac{1}{8}(1 \pm e). \quad (5.10.24)$$

Здесь знак «+» относится к случаю торможения в перигентре произвольной орбиты, а знак «-» соответствует торможению в апоцентре эллиптической орбиты.

Если начальные параметры в точке схода с орбиты находятся на границе области  $\Gamma$  или вне ее, а условия оптимального торможения требуют ориентации тормозного импульса скорости против направления движения, при входе в атмосферу получают такие параметры движения:

$$\tilde{V}_{\text{вх}} = \sqrt{(1 - \Delta\tilde{V})^2 + \tilde{\eta}}, \quad (5.10.25)$$

$$\theta_{\text{вх}} = -\arccos \frac{\tilde{r}(1 - \Delta\tilde{V})}{\sqrt{(1 - \Delta\tilde{V})^2 + \tilde{\eta}}}. \quad (5.10.26)$$

Потребная величина тормозного импульса скорости, обеспечивающая заданный угол входа  $\theta_{\text{вх}}^*$  при торможении против направления движения, вычисляется по формуле

$$\Delta\tilde{V} = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{\eta}}{(\tilde{r} \sec \theta_{\text{вх}}^*)^2 - 1}}. \quad (5.10.27)$$

Величина тормозного импульса при сходе с орбиты ограничена снизу дополнительным условием  $\cos \theta_{\text{вх}} \leq 1$ . Используя формулы (5.10.14) и (5.10.22), получим

$$\tilde{r} \sqrt{1 - \Delta\tilde{V}^2 - \frac{2(\tilde{r}-1)}{1 \pm e}} \leq 1.$$

Отсюда следует ограничение на минимальную допустимую величину тормозного импульса в случае  $\chi = \chi_2$ :

$$\Delta\tilde{V}^2 \geq 1 - \frac{1}{\tilde{r}^2} - \frac{2(\tilde{r}-1)}{1 \pm e}. \quad (5.10.28)$$

Это условие может сузить область  $\Gamma$  за счет сдвига ее левой границы. Аналогично найдем с помощью соотношений (5.10.14), (5.10.26) в случае  $\chi = \chi_1 = 0$

$$\frac{\tilde{r}(1 + \Delta\tilde{V})}{\sqrt{(1 + \Delta\tilde{V}^2)^2 + \frac{2(\tilde{r}-1)}{1 \pm e}}} \leq 1$$

и далее

$$\Delta\tilde{V} \geq 1 - \sqrt{\frac{2}{(1 + \tilde{r})(1 \pm e)}}. \quad (5.10.29)$$

В формулах (5.10.28), (5.10.29) знак перед эксцентриситетом выбирается, как указывалось выше.

**5.10.2. Спуск с круговой орбиты.** Если начальная орбита круговая, то полученные формулы для задачи спуска с орбиты, оптимального по углу входа в атмосферу, существенно упрощаются. Действительно, для круговой орбиты эксцентриситет  $e = 0$  и согласно (5.10.14)

$$\tilde{\eta} = 2(\tilde{r} - 1). \quad (5.10.30)$$

Условия (5.10.16) и (5.10.17), соответствующие ненулевой оптимальной ориентации тормозного импульса скорости, для круговой орбиты имеют вид

$$\left| \Delta\tilde{V} - \frac{1}{2} \right| \leq \sqrt{2\left(\frac{9}{8} - \tilde{r}\right)}, \quad (5.10.31)$$

$$1 \leq \tilde{r} \leq \frac{9}{8}. \quad (5.10.32)$$

Оптимальный угол ориентации тормозного импульса скорости

$$\chi_2 = \arccos \frac{\Delta\tilde{V}^2 - 2(\tilde{r} - 1)}{\Delta\tilde{V}}, \quad (5.10.33)$$

а параметры траектории на высоте условной границы атмосферы

$$V_{\text{вх}} = \sqrt{3 - 2\tilde{r} - \Delta\tilde{V}^2}, \quad (5.10.34)$$

$$\theta_{\text{вх}} = -\arccos(\tilde{r}\sqrt{3 - 2\tilde{r} - \Delta\tilde{V}^2}). \quad (5.10.35)$$

Для получения заданного угла входа в атмосферу  $\theta_{\text{вх}}^*$  требуется тормозной импульс величиной

$$\Delta\tilde{V} = \sqrt{3 - 2\tilde{r} - \left(\frac{\cos \theta_{\text{вх}}^*}{\tilde{r}}\right)^2}. \quad (5.10.36)$$

Согласно условию (5.10.32) предельный относительный радиус при спуске с круговой орбиты

$$\tilde{r}_{\text{пред}} = \frac{9}{8}, \quad (5.10.37)$$

т. е. при  $r_0 > 9r_{\text{ат}}/8$  торможение должно осуществляться против направления движения, независимо от величины тормозного импульса скорости [54, 73, 91].

При нарушении ограничения (5.10.31) на величину тормозного импульса скорости торможение также должно происходить против направления движения ( $\chi = \chi_1 = 0$ ). В этом случае

$$V_{\text{вх}} = \sqrt{(1 - \Delta\tilde{V})^2 + 2(\tilde{r} - 1)}, \quad (5.10.38)$$

$$\theta_{\text{вх}} = \arccos \frac{\tilde{r}(1 - \Delta\tilde{V})}{\sqrt{(1 - \Delta\tilde{V})^2 + 2(\tilde{r} - 1)}}, \quad (5.10.39)$$

а величина потребного импульса скорости для заданного угла входа в атмосферу  $\theta_{\text{вх}}^*$

$$\Delta\tilde{V} = 1 - \sqrt{\frac{2(\tilde{r} - 1)}{(\tilde{r} \sec \theta_{\text{вх}}^*)^2 - 1}}. \quad (5.10.40)$$

Для круговой орбиты условие (5.10.28) приводится к виду

$$\Delta\tilde{V}^2 \geq 3 - \frac{1}{\tilde{r}^2} - 2\tilde{r},$$

или

$$\Delta\tilde{V}^2 \geq -\frac{1}{\tilde{r}^2}(\tilde{r} - 1)^2(2\tilde{r} + 1). \quad (5.10.41)$$

Соотношение (5.10.41) заведомо выполняется. Отсюда видно, что при спуске с круговой орбиты, когда начальные параметры ( $\Delta\tilde{V}$ ,  $\tilde{\eta}$ ) находятся в области  $\Gamma$  (5.10.31), (5.10.32), траектория всегда пересекает условную границу атмосферы, т. е. ограничение  $\cos \theta_{\text{вх}} \leq 1$  заведомо выполняется.

С помощью ограничения (5.10.29) установим минимальную допустимую величину тормозного импульса скорости, обеспечивающую вход в атмосферу в случае, когда торможение производится против направления движения ( $\chi = \chi_1 = 0$ ):

$$\Delta\tilde{V} \geq 1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \tilde{r}}}.$$

На рис. 5.54 построены примеры расчета параметров траектории на входе в атмосферу при спуске с круговой орбиты, для которой относительный радиус  $\tilde{r} = r_0/r_{\text{ат}} = 1,05$ . Величина относительного тормозного импульса скорости  $\Delta\tilde{V} = 0,04$  находится вне области  $\Gamma$  и соответствует нулевой оптимальной ориентации (торможение против направления движения). Величина  $\Delta\tilde{V} = 0,2$  находится в области  $\Gamma$ . Оптимальный угол ориентации тормозного импульса скорости  $\chi = \chi_2 = 45,6^\circ$ . Величина  $\Delta\tilde{V} = 0,113$  попадает на границу области  $\Gamma$ , где следует выбрать  $\chi = \chi_1 = 0$ .

Если рассмотреть также отрицательные значения угла  $\chi$ , когда реализуются исключенные из анализа траектории с большой угловой дальностью, получим зависимости  $\theta_{вх}(\chi)$ ,  $V_{вх}(\chi)$ , которые являются зеркальным отражением рис. 5.54 относительно оси ординат [74].

Область  $\Gamma$  ненулевой оптимальной ориентации тормозного импульса скорости при спуске с круговой орбиты показана на

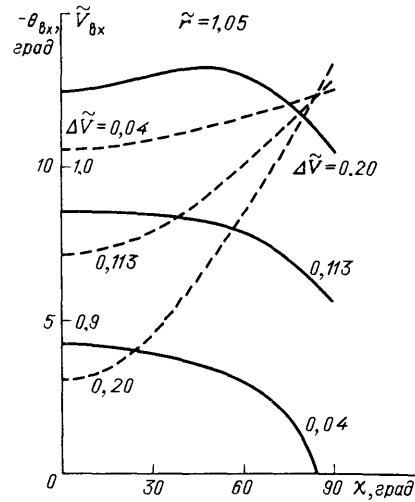


Рис. 5.54. Параметры траектории на входе в атмосферу при различной ориентации тормозного импульса скорости (спуск с круговой орбиты): штриховые линии —  $V_{вх}$ ; сплошные линии —  $\theta_{вх}$

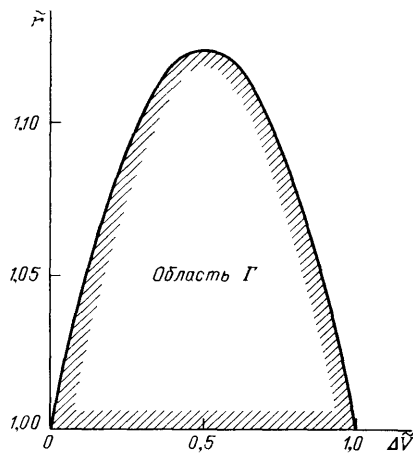


Рис. 5.55. Область  $\Gamma$  ненулевой ориентации тормозного импульса скорости при спуске с круговой орбиты

рис. 5.55 в плоскости параметров  $(\Delta\tilde{V}, \tilde{r})$ . На рис. 5.56 представлены параметры входа в атмосферу и оптимальный угол ориентации тормозного импульса скорости при спуске с круговой орбиты, отвечающей условиям  $1 \leq \tilde{r} \leq 1,125$ . Видно, что в случае малых величин  $\Delta\tilde{V}$  торможение должно производиться против направления движения ( $\chi = 0$ ). В некотором диапазоне значений  $\Delta\tilde{V}$  оптимальный угол ориентации тормозного импульса скорости не равен нулю и может достигать больших величин (до  $90^\circ$ ). При этом переход от нулевых углов  $\chi$  к ненулевым очень резкий. С увеличением  $\Delta\tilde{V}$  угол  $\chi$  сначала возрастает, а затем начинает уменьшаться вплоть до 0. Для достаточно больших величин  $\Delta\tilde{V}$  торможение должно осуществляться против направления движения ( $\chi = 0$ ). И в этом случае имеет место резкий переход от ненулевых углов к нулевому.

**5.10.3. Спуск из апоцентра эллиптической орбиты.** Спуск из апоцентра эллиптической орбиты обеспечивает условия, близкие к оптимальным в смысле получения максимального по абсолютной

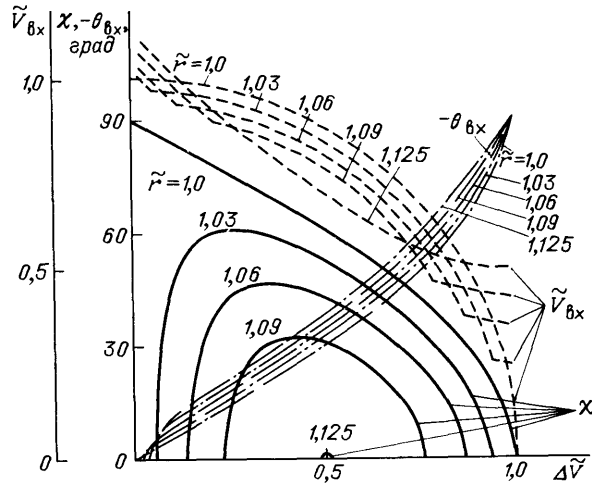


Рис. 5.56. Параметры входа в атмосферу и оптимальный угол ориентации тормозного импульса скорости при спуске с круговой орбиты

величине угла входа при заданной величине  $\Delta \tilde{V}$  [73]. В этом случае

$$\tilde{\eta} = \frac{2(\tilde{r} - 1)}{1 - e}, \quad (5.10.42)$$

и диапазон изменения параметра  $\tilde{\eta}$ :

$$2(\tilde{r} - 1) < \tilde{\eta} < \infty.$$

Область  $\Gamma$  ненулевой ориентации тормозного импульса скорости при спуске из апоцентра эллиптической орбиты определяется условиями

$$\left| \Delta \tilde{V} - \frac{1}{2} \right| \leq \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2(\tilde{r} - 1)}{1 - e}} \quad (5.10.43)$$

$$1 \leq \tilde{r} \leq 1 + \frac{1}{8}(1 - e). \quad (5.10.44)$$

Предельный радиус точки схода  $r_{\text{пред}}$ , при превышении которого тормозной импульс должен прикладываться против направления движения, вычисляется по формуле (5.10.24)

$$\tilde{r}_{\text{пред}} = \frac{9}{8} - \frac{e}{8}.$$

Когда  $e \rightarrow 1$ , имеем  $\tilde{r}_{\text{пред}} \rightarrow 1$ . Это означает, что при спуске из апоцентра сильно вытянутой эллиптической орбиты торможение должно осуществляться против направления движения.

Ранее была рассмотрена классическая задача двух тел в предположении, что масса одного тела существенно меньше массы другого тела. Эта фундаментальная задача явилась основой для построения решения многих прикладных задач механики космического полета. Более сложной, хотя и не имеющей такого широкого применения в прикладном аспекте, является классическая *задача трех тел*, которые совершают движение под действием взаимного притяжения, определяемого ньютоновским законом. Общая постановка задачи трех тел предполагает соизмеримость их масс. Это условие не выполняется в задачах механики космического полета, так как масса КА на много порядков меньше массы небесных тел. *Ограниченная задача трех тел* предполагает, что одно из тел имеет бесконечно малую массу по сравнению с массами двух других тел, имеющих соизмеримые массы, и не оказывает воздействия на их движение.

В ограниченной задаче движение двух тел с конечными массами  $m_1$  и  $m_2$  относительно их барицентра считают известным, требуется определить движение тела с бесконечно малой массой  $m_3$ . Для определенности будем полагать, что  $m_3 \ll m_2 < m_1$ . Если тела  $m_1$  и  $m_2$  с конечными массами движутся относительно своего барицентра по круговым орбитам, то имеет место *круговая ограниченная задача трех тел*. Эта задача может быть *плоской*, если все три тела движутся в инерциальном пространстве в одной плоскости. Таково, например, движение КА в плоскости эклиптики под воздействием Солнца и Земли. *Пространственная задача* возникает в том случае, когда плоскость движения тела бесконечно малой массы  $m_3$  не совпадает с плоскостью движения тел  $m_1$  и  $m_2$ . Примером пространственной круговой ограниченной задачи трех тел может служить движение КА под воздействием Земли и Луны при условии, что плоскость его движения не совпадает с плоскостью орбиты Луны (эта орбита предполагается круговой).

Если тело  $m_2$  движется относительно  $m_1$  по эллиптической орбите, то возникает *эллиптическая ограниченная задача трех тел* (плоская или пространственная). Соответственно можно рассматривать также *гиперболическую, параболическую и прямолинейную* ограниченные задачи трех тел.



## § 6.1. Общая постановка задачи трех тел

Общая постановка задачи трех тел, предполагающая соизмеримость их масс, представляет интерес, в частности, для прогнозирования движения этих тел на заданный момент времени. Например, можно рассматривать Солнце, Землю и Луну или Солнце и две планеты, которые в наибольшей степени влияют на движение друг друга.

**6.1.1. Уравнения движения трех притягивающих тел.** Пусть  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  — массы и одновременно обозначения трех притягивающих тел. Движение этих тел будем рассматривать в инерциальной системе координат  $Oxyz$  с произвольной ориентацией осей. Обозначим через  $\mathbf{r}_k$  радиусы-векторы, а через  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$  координаты этих тел ( $k = 1, 2, 3$ ). Движение тела  $m_1$  происходит под действием суммарной силы

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31},$$

где

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{fm_1m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

— сила притяжения тела  $m_1$  к  $m_2$ ,

$$\mathbf{F}_{31} = \frac{fm_1m_3}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$$

— сила притяжения тела  $m_1$  к  $m_3$ ,

$$r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|, \quad r_{13} = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|.$$

— расстояние между соответствующими телами. Уравнение движения тела  $m_1$  в векторной форме

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{fm_1m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{fm_1m_3}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1), \quad (6.1.1)$$

или в скалярной форме

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= \frac{fm_1m_2}{r_{12}^3}(x_2 - x_1) + \frac{fm_1m_3}{r_{13}^3}(x_3 - x_1), \\ m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} &= \frac{fm_1m_2}{r_{12}^3}(y_2 - y_1) + \frac{fm_1m_3}{r_{13}^3}(y_3 - y_1), \\ m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} &= \frac{fm_1m_2}{r_{12}^3}(z_2 - z_1) + \frac{fm_1m_3}{r_{13}^3}(z_3 - z_1), \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

где

$$\begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \\ r_{13} &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

По аналогии можно записать векторные уравнения движения тел  $m_2$  и  $m_3$ :

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{fm_1 m_2}{r_{21}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{fm_2 m_3}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2), \quad (6.1.4)$$

$$m_3 \frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = \frac{fm_1 m_3}{r_{31}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{fm_2 m_3}{r_{32}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). \quad (6.1.5)$$

Здесь  $r_{21} = r_{12}$ ,  $r_{31} = r_{13}$ ,

$$r_{23} = r_{32} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}. \quad (6.1.6)$$

**6.1.2. Интегралы задачи трех тел.** Складывая почленно уравнения (6.1.1), (6.1.4), (6.1.5), получим

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} + m_3 \frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = 0.$$

Отсюда после интегрирования

$$m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + m_3 \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} = \mathbf{a}. \quad (6.1.7)$$

Проинтегрируем теперь (6.1.7)

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}. \quad (6.1.8)$$

Здесь  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — произвольные постоянные интегрирования.

Предположим, что точка  $B$  является барицентром (центром масс) системы трех тел. Радиус-вектор барицентра вычисляется по формуле

$$\mathbf{r}_b = \frac{1}{m} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3), \quad (6.1.9)$$

где

$$m = m_1 + m_2 + m_3. \quad (6.1.10)$$

Соотношения (6.1.9), (6.1.10) позволяют записать интегралы (6.1.7) и (6.1.8) в более компактном виде

$$\dot{\mathbf{r}}_b = \frac{1}{m} \mathbf{a}, \quad \mathbf{r}_b = \frac{1}{m} (\mathbf{a}t + \mathbf{b}). \quad (6.1.11)$$

Полученные интегралы (6.1.11) показывают, что в инерциальной системе координат барицентр системы движется равномерно и прямолинейно.

Умножим теперь уравнения (6.1.1), (6.1.4), (6.1.5) векторно слева соответственно на  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$  и сложим их почленно:

$$m_1 \left( \mathbf{r}_1 \times \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} \right) + m_2 \left( \mathbf{r}_2 \times \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} \right) + m_3 \left( \mathbf{r}_3 \times \frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} \right) = 0.$$

Это равенство можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left[ m_1 \left( \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right) + m_2 \left( \mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right) + m_3 \left( \mathbf{r}_3 \times \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} \right) \right] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$m_1 \left( \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right) + m_2 \left( \mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right) + m_3 \left( \mathbf{r}_3 \times \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} \right) = \mathbf{C}, \quad (6.1.12)$$

$\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)$  — постоянный вектор. В левой части (6.1.12) стоит кинетический момент системы трех тел, поэтому интеграл (6.1.12) свидетельствует о сохранении кинетического момента. Векторное равенство (6.1.12) эквивалентно трем скалярным условиям

$$\begin{aligned} m_1 \left( y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt} \right) + m_2 \left( y_2 \frac{dz_2}{dt} - z_2 \frac{dy_2}{dt} \right) + m_3 \left( y_3 \frac{dz_3}{dt} - z_3 \frac{dy_3}{dt} \right) &= C_x, \\ m_1 \left( z_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dz_1}{dt} \right) + m_2 \left( z_2 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dz_2}{dt} \right) + m_3 \left( z_3 \frac{dx_3}{dt} - x_3 \frac{dz_3}{dt} \right) &= C_y, \\ m_1 \left( x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} \right) + m_2 \left( x_2 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dx_2}{dt} \right) + m_3 \left( x_3 \frac{dy_3}{dt} - y_3 \frac{dx_3}{dt} \right) &= C_z. \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

По аналогии с задачей двух тел соотношениям (6.1.12) и (6.1.13) можно дать некоторую геометрическую интерпретацию. Построим плоскость, проходящую через барицентр системы тел и нормальную вектору  $\mathbf{C}$ . Положение этой плоскости, которую называют *неизменяемой плоскостью Лапласа*, не будет меняться в пространстве со временем, так как вектор  $\mathbf{C}$  постоянен. Рассмотрим теперь движение проекций точек  $m_1, m_2, m_3$  на плоскость  $Oyz$ , тогда можно записать уравнения их секториальных скоростей относительно начала координат

$$\begin{aligned} \frac{dS_{1yz}}{dt} &= \frac{1}{2} \left( y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt} \right), \\ \frac{dS_{2yz}}{dt} &= \frac{1}{2} \left( y_2 \frac{dz_2}{dt} - z_2 \frac{dy_2}{dt} \right), \\ \frac{dS_{3yz}}{dt} &= \frac{1}{2} \left( y_3 \frac{dz_3}{dt} - z_3 \frac{dy_3}{dt} \right). \end{aligned}$$

Введем еще понятие средней секториальной скорости проекций центров масс тел на плоскость  $Oyz$

$$\frac{dS_{yz}}{dt} = \frac{1}{m} \left( m_1 \frac{dS_{1yz}}{dt} + m_2 \frac{dS_{2yz}}{dt} + m_3 \frac{dS_{3yz}}{dt} \right), \quad (6.1.14)$$

тогда первое уравнение системы (6.1.13) можно записать в виде

$$\frac{dS_{yz}}{dt} = \frac{C_x}{2m}, \quad (6.1.15)$$

т. е. средняя секториальная скорость проекций центров масс тел на плоскость  $Oyz$  есть величина постоянная. Аналогичные выкладки можно выполнить для второго и третьего соотношений (6.1.13) и показать, что проекции средней секториальной скорости на любую координатную плоскость являются величинами, постоянными по времени. Первые интегралы (6.1.13) определяют изменение площадей, которые описывают проекции радиусов-векторов центров масс  $m_1, m_2, m_3$  на координатные плоскости. Поэтому соотношения (6.1.13) называют *интегралами площадей*.

Перейдем теперь к вычислению интеграла энергии в задаче трех тел. Предварительно рассмотрим потенциал

$$U(x_1, y_1, z_1, \dots, z_3) = \frac{fm_1m_2}{r_{12}} + \frac{fm_1m_3}{r_{13}} + \frac{fm_2m_3}{r_{23}}, \quad (6.1.16)$$

тогда уравнения движения (6.1.1), (6.1.4), (6.1.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y_1} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z_1} \mathbf{k}, \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_2} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y_2} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z_2} \mathbf{k}, \\ m_3 \frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_3} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y_3} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z_3} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

Потенциал  $U$  численно равен работе, которую надо совершить, чтобы удалить тела  $m_1, m_2, m_3$  на бесконечно большие расстояния друг от друга. Действительно, пусть тела  $m_2$  и  $m_3$  находятся в фиксированных точках пространства, а тело  $m_1$  требуется удалить от них на бесконечно большое расстояние. Для этого необходимо затратить работу  $fm_1m_2/r_{12}$  на преодоление притяжения тела  $m_2$  и работу  $fm_1m_3/r_{13}$  на преодоление притяжения тела  $m_3$ . Чтобы теперь удалить тело  $m_2$  от  $m_3$  на бесконечно большое расстояние, необходимо затратить работу  $fm_2m_3/r_{23}$ . Таким образом, суммарная работа будет определяться соотношением (6.1.16).

Умножим уравнения (6.1.17) скалярно соответственно на

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_1}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz_1}{dt} \mathbf{k}, \\ \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} &= \frac{dx_2}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz_2}{dt} \mathbf{k}, \\ \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} &= \frac{dx_3}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_3}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz_3}{dt} \mathbf{k} \end{aligned}$$

и сложим их почленно, тогда получим

$$m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} + m_3 \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}_3}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \\ + \frac{\partial U}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_3} \frac{dy_3}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_3} \frac{dz_3}{dt},$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ m_1 \left( \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right)^2 + m_2 \left( \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right)^2 + m_3 \left( \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} \right)^2 \right] = \frac{dU}{dt}.$$

Интегрируя это соотношение, найдем

$$\frac{1}{2} \left[ m_1 \left( \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right)^2 + m_2 \left( \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right)^2 + m_3 \left( \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} \right)^2 \right] = U + \tilde{h},$$

или

$$\frac{1}{2} (m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + m_3 V_3^2) = U + \tilde{h}, \quad (6.1.18)$$

где

$$V_1 = \left| \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right|, \quad V_2 = \left| \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right|, \quad V_3 = \left| \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} \right|$$

— величины скоростей движения центров масс тел  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ;  $\tilde{h}$  — произвольная постоянная интегрирования. В левой части (6.1.18) стоит формула кинетической энергии системы трех тел. Величина  $-U$  определяет потенциальную энергию системы трех тел. Таким образом, соотношение (6.1.18) выражает постоянство полной энергии системы трех тел, и его называют интегралом энергии.

Можно показать, что полученные векторные первые интегралы задачи трех тел (6.1.7), (6.1.8), (6.1.12) и скалярный первый интеграл (6.1.18) легко обобщаются на произвольное число притягивающих тел и в целом определяют десять первых скалярных интегралов системы.

**6.1.3. Движение трех тел относительно их барицентра.** Наряду с инерциальной системой координат  $Oxyz$ , в которой движение трех притягивающих тел описывается уравнениями (6.1.1), (6.1.4), (6.1.5), будем рассматривать систему координат  $B\xi\eta\zeta$  с началом в барицентре, оси которой параллельны осям исходной системы координат. Новая система координат будет тоже инерциальной, так как барицентр движется в инерциальном пространстве прямолинейно и равномерно. Обозначим через  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  радиусы-векторы центров масс  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  в системе координат  $B\xi\eta\zeta$ . Тогда уравнения движения трех тел относительно их барицентра будут иметь вид уравнений (6.1.1), (6.1.4), (6.1.5), в которых радиусы-векторы  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$  заменены соответственно на  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ . Для полу-

ченной системы уравнений движения относительно барицентра можно записать первые интегралы вида (6.1.7), (6.1.8), (6.1.12), (6.1.18). При этом правые части интегралов вида (6.1.7) и (6.1.8), или, что то же самое, интегралов (6.1.11), обратятся в нуль, так как в системе координат  $B\xi\eta\zeta$  барицентр тождественно совпадает с началом системы координат.

**6.1.4. Движение относительно одного из притягивающих тел.** Уравнения (6.1.1), (6.1.4), (6.1.5) описывают движение трех притягивающих тел  $m_1, m_2, m_3$  относительно произвольной инерциальной системы координат  $Oxyz$ . Рассмотрим теперь инерциальную систему координат, начало которой совпадает с телом  $m_1$ , а оси параллельны исходной системе координат (рис. 6.1). Чтобы получить уравнения движения тел  $m_2$  и  $m_3$  относительно  $m_1$ , предварительно раз-

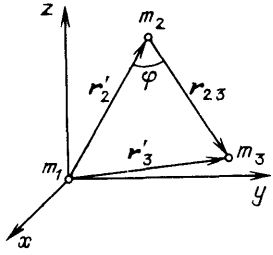


Рис. 6.1. К выводу уравнений движения относительно одного из притягивающих тел

делим обе части равенства (6.1.1) на  $m_1$ , затем (6.1.4) на  $m_2$  и (6.1.5) на  $m_3$ . Далее, вычитая первое соотношение из второго и третьего, получим

$$\frac{d^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{dt^2} = -f \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + fm_3 \left( \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{r_{13}^3} \right),$$

$$\frac{d^2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{dt^2} = -f \frac{m_1 + m_3}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) + fm_2 \left( \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r_{12}^3} \right).$$

Здесь  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  — радиусы-векторы тел  $m_1, m_2, m_3$  в исходной системе координат  $Oxyz$ . Обозначим через  $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_3 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$  радиусы-векторы тел  $m_2$  и  $m_3$  относительно  $m_1$ . Тогда  $r_{12} = r'_2, r_{13} = r'_3$  и, опуская в последующих соотношениях штрихи для упрощения записи, получим уравнения движения тел  $m_2, m_3$  относительно  $m_1$ :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -f \frac{m_1 + m_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2 + fm_3 \left( \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} \right), \quad (6.1.19)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = -f \frac{m_1 + m_3}{r_3^3} \mathbf{r}_3 + fm_2 \left( \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right). \quad (6.1.20)$$

Если требуется записать уравнения движения двух тел не относительно  $m_1$ , а относительно  $m_2$  или  $m_3$ , то в уравнениях (6.1.19), (6.1.20) следует поменять соответствующие индексы.

Обсудим теперь физический смысл слагаемых, входящих в правые части (6.1.19) и (6.1.20). Первое слагаемое в правой части уравнения (6.1.19) определяет ускорение, которое сообщается те-

ду  $m_2$  при его движении в центральном поле, создаваемом телом  $m_1$ , если предположить, что третье тело  $m_3$  отсутствует:

$$\mathbf{g}_2 = -f \frac{m_1 + m_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2. \quad (6.1.21)$$

Из-за наличия третьего тела  $m_3$ , возмущающего движение тела  $m_2$  относительно  $m_1$ , тело  $m_2$  получает возмущающее ускорение

$$\Delta \mathbf{g}_2 = f m_3 \left( \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} \right). \quad (6.1.22)$$

Это возмущающее ускорение, в свою очередь, можно разделить на два слагаемых, первое из которых

$$\Delta \mathbf{g}_2^{(1)} = f m_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{r_{23}^3} = -f m_3 \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} \quad (6.1.23)$$

есть ускорение, которое получало бы тело  $m_2$ , если бы оно было непритягиваемым, а центральное тело  $m_1$  отсутствовало. Второе слагаемое в (6.1.22), взятое с противоположным знаком,

$$\Delta \mathbf{g}_2^{(2)} = f m_3 \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} \quad (6.1.24)$$

— это ускорение, которое сообщает возмущающее тело  $m_3$  центральному телу  $m_1$  как непритягиваемому. Таким образом, возмущающее ускорение, которое получает тело  $m_2$  при движении относительно  $m_1$ , можно представить в виде разности

$$\Delta \mathbf{g}_2 = \Delta \mathbf{g}_2^{(1)} - \Delta \mathbf{g}_2^{(2)}. \quad (6.1.25)$$

Аналогичный смысл имеют составляющие ускорения тела  $m_3$  в его движении относительно центрального тела  $m_1$  при наличии возмущающего тела  $m_2$ .

## § 6.2. Круговая ограниченная задача трех тел

Предположим, что три тела, массы и обозначения которых  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , движутся под действием взаимного притяжения, определяемого законом Ньютона, причем  $m_3 \ll m_2 < m_1$ . В этом случае можно пренебречь влиянием тела  $m_3$  на движение  $m_1$  и  $m_2$ . Тогда движение тел  $m_1$  и  $m_2$  будет описываться решением задачи двух тел, рассмотренной в главе 2. Обсудим круговую ограниченную задачу трех тел. Тела  $m_1$  и  $m_2$  движутся относительно своего барицентра по круговым орбитам, находясь по противоположные стороны от него. Расстояние между ними остается постоянным.

**6.2.1. Уравнения движения тела пренебрежимо малой массы в гравитационном поле двух притягивающих тел.** Рассмотрим инерциальную прямоугольную систему координат  $B\xi\eta\zeta$  с началом в барицентре  $B$  двух притягивающих тел  $m_1$  и  $m_2$ . Плоскость  $B\xi\eta$  совпадает с плоскостью движения  $m_1$  и  $m_2$ , а ось  $B\zeta$  направлена так, чтобы движение  $m_1$  и  $m_2$  было направлено против часовой стрелки (рис. 6.2).

По типу (6.1.5) запишем векторное уравнение движения точки  $m_3$  в инерциальной системе координат  $B\xi\eta\zeta$ :

$$\frac{d^2 \rho_3}{dt^2} = -f \frac{m_1}{\rho_{31}^3} (\rho_3 - \rho_1) - f \frac{m_2}{\rho_{32}^3} (\rho_3 - \rho_2), \quad (6.2.1)$$

где  $\rho_{31} = |\rho_3 - \rho_1|$ ,  $\rho_{32} = |\rho_3 - \rho_2|$ .

На самом деле движение точки  $m_3$  удобнее рассматривать не в инерциальной, а во вращающейся системе координат  $Bxyz$ , ось  $Bx$  которой направлена все время по  $\rho_1$  — радиусу-вектору точки  $m_1$ , а ось  $Bz$  совпадает с  $B\zeta$ . Угловая скорость вращения  $Bxyz$  относительно  $B\xi\eta\zeta$  равна угловой скорости  $\omega$ , с которой тела  $m_1$  и  $m_2$  обращаются относительно их барицентра.

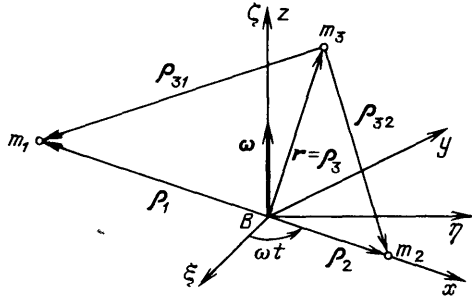


Рис. 6.2. Инерциальная и вращающаяся барицентрические системы координат

Пусть  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор точки  $m_3$  во вращающейся системе координат. Тогда  $d\mathbf{r}/dt$  — скорость, а  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  — ускорение точки  $m_3$  в этой системе координат. По теореме об ускорении точки в сложном движении можно записать

$$\frac{d^2 \rho_3}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2 \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right),$$

где  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  — переносное ускорение,  $2(\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}/dt)$  — ускорение Кориолиса. Отсюда

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \rho_3}{dt^2} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2 \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right),$$

или с учетом (6.2.1)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -f \frac{m_1}{\rho_{31}^3} (\rho_3 - \rho_1) - f \frac{m_2}{\rho_{32}^3} (\rho_3 - \rho_2) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2 \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right). \quad (6.2.2)$$



Здесь составляющие векторов заданы во вращающейся системе координат  $Bxyz$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left( \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right), \\ \rho_1 &= (x_1, 0, 0), \quad \rho_2 = (x_2, 0, 0), \quad \omega = (0, 0, \omega), \\ \rho_{31} &= |\rho_3 - \rho_1| = |\mathbf{r} - \rho_1| = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}, \\ \rho_{32} &= |\rho_3 - \rho_2| = |\mathbf{r} - \rho_2| = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Векторное уравнение (6.2.2) равносильно трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -f \frac{m_1}{\rho_{31}^3} (x - x_1) - f \frac{m_2}{\rho_{32}^3} (x - x_2) + \omega^2 x + 2\omega \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -f \frac{m_1}{\rho_{31}^3} y - f \frac{m_2}{\rho_{32}^3} y + \omega^2 y - 2\omega \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -f \frac{m_1}{\rho_{31}^3} z - f \frac{m_2}{\rho_{32}^3} z. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Во многих задачах оказывается полезным переход к канонической системе единиц [19], который связан со следующим преобразованием уравнений (6.2.3). Массы притягивающих тел  $m_1$  и  $m_2$  относят к их суммарной массе  $m_1 + m_2$ , все линейные величины — к расстоянию между точками  $m_1$  и  $m_2$ ,  $a = \rho_1 + \rho_2$ , время — к  $1/\omega$ , т. е. промежутку времени, за который отрезок прямой  $m_1 m_2$  поворачивается на угол в один радиан (в инерциальном пространстве). Проиллюстрируем переход к каноническим единицам на примере первого уравнения системы (6.2.3):

$$\begin{aligned} \frac{x''}{a} \omega^2 &= -f \frac{m_1 + m_2}{a^3} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right) \frac{a^3}{\rho_{31}^3} - \\ &\quad - f \frac{m_1 + m_2}{a^3} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_2}{a} \right) \frac{a^3}{\rho_{32}^3} + \omega^2 \frac{x}{a} + 2\omega^2 \frac{y'}{a}. \end{aligned}$$

Штрихами обозначены производные по «безразмерному» времени  $\tau = \omega t$ . Вводя обозначения  $1 - \tilde{m} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ ,  $\tilde{m} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $\tilde{x} = \frac{x}{a}$ ,  $\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{a}$ ,  $\tilde{x}_2 = \frac{x_2}{a}$ ,  $\tilde{\rho}_{31} = \frac{\rho_{31}}{a}$ ,  $\tilde{\rho}_{32} = \frac{\rho_{32}}{a}$  и сокращая на  $\omega^2$ , получим

$$\tilde{x}'' = -f \frac{m_1 + m_2}{\omega^2 a^3} \frac{1 - \tilde{m}}{\tilde{\rho}_{31}^3} (\tilde{x} - \tilde{x}_1) - f \frac{m_1 + m_2}{\omega^2 a^3} \frac{\tilde{m}}{\tilde{\rho}_{32}^3} (\tilde{x} - \tilde{x}_2) + \tilde{x} + 2\tilde{y}'. \quad (6.2.4)$$

Поскольку координаты  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  отсчитываются от барицентра системы двух притягивающих тел, то должны выполняться равенства

$$\tilde{x}_1 = -\tilde{m}, \quad \tilde{x}_2 = 1 - \tilde{m}. \quad (6.2.5)$$

Из задачи двух тел известно (см. п. 2.1.2), что притягивающее тело с массой  $m_2$  движется относительно центрального тела с массой  $m_1$  точно так, как двигалось бы непритягивающее тело с массой  $m_2$  относительно центрального тела с массой  $m_1 + m_2$ . Тогда можно воспользоваться соотношением (2.5.10), чтобы записать

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Но согласно (2.1.5)

$$\mu = f \cdot (m_1 + m_2),$$

а период обращения

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Отсюда

$$f \frac{(m_1 + m_2)}{\omega^2 a^3} = \frac{\mu}{\omega^2 a^3} = \frac{\mu T^2}{4\pi^2 a^3} = 1,$$

и уравнение (6.2.4) существенно упрощается.

Итак, при использовании канонических единиц уравнения движения точки  $m_3$  в пространственной круговой ограниченной задаче трех тел имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'' &= -\frac{1-\tilde{m}}{\tilde{\rho}_{31}^3} (\tilde{x} - \tilde{x}_1) - \frac{\tilde{m}}{\tilde{\rho}_{32}^3} (\tilde{x} - \tilde{x}_2) + \tilde{x} + 2\tilde{y}', \\ \tilde{y}'' &= -\frac{1-\tilde{m}}{\tilde{\rho}_{31}^3} \tilde{y} - \frac{\tilde{m}}{\tilde{\rho}_{32}^3} \tilde{y} + \tilde{y} - 2\tilde{x}', \\ \tilde{z}'' &= -\frac{1-\tilde{m}}{\tilde{\rho}_{31}^3} \tilde{z} - \frac{\tilde{m}}{\tilde{\rho}_{32}^3} \tilde{z}. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Здесь

$$\tilde{\rho}_{31} = \sqrt{(\tilde{x} - \tilde{x}_1)^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}, \quad \tilde{\rho}_{32} = \sqrt{(\tilde{x} - \tilde{x}_2)^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}. \quad (6.2.7)$$

Если положить в уравнениях (6.2.6)  $\tilde{z} \equiv 0$ , то получим уравнения движения точки  $m_3$  в плоской круговой ограниченной задаче трех тел.

С учетом перехода к канонической системе единиц вместо вращающейся системы координат  $Bxuz$  следует рассматривать вращающуюся систему координат  $B\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ .

**6.2.2. Интеграл Якоби.** Рассмотрим функцию

$$J = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + f \frac{m_1}{\rho_{31}} + f \frac{m_2}{\rho_{32}}. \quad (6.2.8)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что с помощью функции  $J$  запись системы (6.2.3) упрощается:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \frac{dy}{dt} + \frac{\partial J}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega \frac{dx}{dt} + \frac{\partial J}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial J}{\partial z}. \quad (6.2.9)$$

Умножим первое уравнение (6.2.9) на  $2dx/dt$ , второе на  $2dy/dt$ , третье на  $2dz/dt$  и сложим полученные произведения. Тогда

$$2 \left( \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} \right) = 2 \left( \frac{\partial J}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial J}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial J}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right)$$

и

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = 2 \frac{dJ}{dt}.$$

Если

$$V = \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2} \quad (6.2.10)$$

— скорость точки  $m_3$  во вращающейся системе координат, то

$$\frac{d}{dt} (V^2) = 2 \frac{dJ}{dt}$$

и, интегрируя, получим первый интеграл системы (6.2.9), который называют *интегралом Якоби*:

$$V^2 = 2J - C. \quad (6.2.11)$$

Здесь  $C$  — произвольная постоянная интегрирования.

Подставим теперь (6.2.8) и (6.2.10) в (6.2.11), чтобы получить интеграл Якоби, записанный через координаты точки  $m_3$  и их производные во вращающейся системе  $Bxyz$ :

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = \omega^2 (x^2 + y^2) + 2f \left( \frac{m_1}{\rho_{31}} + \frac{m_2}{\rho_{32}} \right) - C. \quad (6.2.12)$$

Интеграл Якоби является единственным интегралом, который удается получить в круговой ограниченной задаче трех тел.

Произвольную постоянную  $C$  можно определить, если в некоторый момент времени  $t$  известны скорость точки  $m_3$  и ее положение во вращающейся системе координат. После того как величина постоянной  $C$  стала известной, интеграл Якоби (6.2.12) позволяет вычислить величину скорости точки  $m_3$  по заданному ее положению в любой момент времени.

Если воспользоваться формулами перехода от инерциальной системы координат  $B\xi\eta\zeta$  к вращающейся системе координат  $Bxyz$

$$x = \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t, \quad y = -\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t, \quad z = \zeta$$

и их производными

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(\frac{d\xi}{dt} + \omega\eta\right) \cos \omega t - \left(\omega\xi - \frac{d\eta}{dt}\right) \sin \omega t, \\ \frac{dy}{dt} &= -\left(\frac{d\xi}{dt} + \omega\eta\right) \sin \omega t - \left(\omega\xi - \frac{d\eta}{dt}\right) \cos \omega t, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{d\xi}{dt},\end{aligned}$$

то можно записать интеграл Якоби через координаты точки  $m_3$  в инерциальной системе отсчета  $B\xi\eta\xi$ :

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 - 2\omega\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\eta\right) = 2f\left(\frac{m_1}{\rho_{31}} + \frac{m_2}{\rho_{32}}\right) - C. \quad (6.2.13)$$

**6.2.3. Плоская задача.** Будем полагать, что движение непритягивающей материальной точки  $m_3$  происходит в той же плоскости, в которой совершают движение два притягивающих тела  $m_1$  и  $m_2$ . Тогда  $\xi = d\xi/dt = 0$ , и интеграл Якоби в форме (6.2.13) для плоской круговой ограниченной задачи трех тел принимает вид

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - 2\omega\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\eta\right) - 2f\left(\frac{m_1}{\rho_{31}} + \frac{m_2}{\rho_{32}}\right) = -C. \quad (6.2.14)$$

Установим физический смысл соотношения (6.2.14). С этой целью поделим обе части (6.2.14) на 2. Теперь два первых слагаемых

$$\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} V^2$$

(где  $V$  — абсолютная скорость точки  $m_3$ ) определяют кинетическую энергию единицы массы  $m_3$ . Слагаемое

$$-f\left(\frac{m_1}{\rho_{31}} + \frac{m_2}{\rho_{32}}\right)$$

равно работе, которую надо затратить на единицу массы  $m_3$ , чтобы удалить ее в бесконечность, преодолевая притяжение тел  $m_1$  и  $m_2$ . Следовательно, это слагаемое определяет потенциальную энергию единицы массы  $m_3$ , а

$$E = \frac{1}{2} V^2 - f\left(\frac{m_1}{\rho_{31}} + \frac{m_2}{\rho_{32}}\right)$$

— полная энергия единицы массы  $m_3$  (удельная энергия). Наконец, сомножитель

$$\xi\frac{d\eta}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\eta = M_b$$

определяет момент количества движения (кинетический момент) единицы массы  $m_3$  относительно начала координат — точки  $B$ . Тогда интеграл Якоби (6.2.14) можно записать в виде

$$E - \omega M_b = -\frac{C}{2}. \quad (6.2.15)$$

В отличие от ограниченной задачи двух тел, где постоянны энергия непритягиваемого тела и его момент количества движения, в круговой ограниченной задаче трех тел оказывается постоянной некоторая функция этих величин, определяемая соотношением (6.2.15).

### § 6.3. Точки либрации

Предположим, что в некоторый момент времени тело бесконечно малой массы  $m_3$  находится в плоскости  $B\tilde{x}\tilde{y}$  движения притягивающих тел  $m_1$  и  $m_2$  и имеет нулевую скорость относительно вращающейся системы координат. Возникает вопрос: при каких условиях  $m_3$  будет пребывать в покое относительно вращающейся плоскости  $B\tilde{x}\tilde{y}$  неограниченно долго? Как было установлено, для этого  $m_3$  должно находиться в одной из специальным образом выбранных точек вращающейся плоскости  $B\tilde{x}\tilde{y}$ . Такие точки вращающейся плоскости, в которых тело бесконечно малой массы может находиться в состоянии равновесия по отношению к двум другим, притягивающим телам, называют *точками либрации* или *точками относительного равновесия*.

Точки либрации тел Солнечной системы представляют большой интерес для космологии и прикладных задач механики космического полета. В них могут скапливаться так называемые «малые тела». Исследование которых, как полагают, поможет существенно продвинуться вперед в решении проблемы эволюции Солнечной системы. Имеются технические предложения об использовании точек либрации для размещения связанных спутников, организации межпланетных сообщений и решения ряда других прикладных задач [51].

**6.3.1. Поверхности нулевой относительной скорости.** Используя уравнения движения в канонических единицах (6.2.6), можно записать интеграл Якоби в этих единицах:

$$\tilde{V}^2 = 2\mathcal{J} - \tilde{C}, \quad (6.3.1)$$

или

$$(\tilde{x}')^2 + (\tilde{y}')^2 + (\tilde{z}')^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \frac{2(1-\tilde{m})}{\tilde{\rho}_{31}} + \frac{2\tilde{m}}{\tilde{\rho}_{32}} - \tilde{C}, \quad (6.3.1a)$$

где  $\tilde{V} = V/(a\omega)$ ,  $\mathcal{J} = J/(a\omega)^2$ ,  $\tilde{C} = C/(a\omega)^2$ .

Для определения поверхности нулевой относительной скорости положим  $\tilde{V} = 0$ , тогда получим

$$2\mathcal{J} = \tilde{C},$$

или

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \frac{2(1-\tilde{m})}{\tilde{\rho}_{31}} + \frac{2\tilde{m}}{\tilde{\rho}_{32}} = \tilde{C}. \quad (6.3.2)$$

При заданной по начальным условиям постоянной  $\tilde{C}$  соотношение (6.3.2) определяет границу области, в которой может находиться точка  $m_3$ . Действительно, условие  $\tilde{V}^2 \geq 0$  выполняется в области, где

$$2\mathcal{J} \geq \tilde{C}.$$

Соотношение (6.3.2) называют уравнением *поверхностей Хилла* по имени американского астронома Дж. В. Хилла, который в своих исследованиях движения Луны (1877 г.) впервые обратил внимание на существование областей пространства, куда не может попасть тело бесконечно малой массы, находящееся в гравитационном поле двух притягивающих тел. В плоской задаче существуют соответственно *линии Хилла*.

Обсудим некоторые свойства поверхностей и линий Хилла [45]. В уравнение (6.3.2) входят лишь квадраты координат  $\tilde{y}$  и  $\tilde{z}$ . Следовательно, поверхности, определяемые этими уравнениями, симметричны относительно координатных плоскостей  $B\tilde{x}\tilde{y}$  и  $B\tilde{x}\tilde{z}$ . Если выполнено дополнительное условие  $\tilde{m} = 1/2$  (т. е. массы притягивающих тел одинаковы  $m_1 = m_2$ ), симметрия существует и по отношению координатной плоскости  $B\tilde{y}\tilde{z}$ . Поверхности, отвечающие общему случаю  $\tilde{m} \neq 1/2$ , можно рассматривать в качестве деформированных поверхностей, построенных для частного случая  $\tilde{m} = 1/2$ . Из уравнения (6.3.2) видно также, что прямая, параллельная оси  $B\tilde{z}$ , пересекает поверхности нулевой относительной скорости в двух действительных точках или ни в одной.

Все поверхности (6.3.2) заключены внутри круговых цилиндрических поверхностей, ось которых совпадает с  $B\tilde{z}$ , а радиус равен  $\sqrt{\tilde{C}}$ :

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \tilde{C}.$$

К этой цилиндрической поверхности асимптотически приближаются при  $\tilde{z} \rightarrow \infty$  поверхности (6.3.2). Учитывая перечисленные свойства поверхностей (6.3.2) и рассматривая форму кривых, по которым поверхности пересекаются с координатными плоскостями, можно исследовать их пространственную форму в общем случае.

Положим сначала в (6.3.2)  $\tilde{z} = 0$  и рассмотрим возможные линии пересечения этих поверхностей с координатной плоскостью  $B\tilde{x}\tilde{y}$ . Линия пересечения определяется уравнением

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \frac{2(1-\tilde{m})}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{x}_1)^2 + \tilde{y}^2}} + \frac{2\tilde{m}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{x}_2)^2 + \tilde{y}^2}} = \tilde{C}. \quad (6.3.3)$$

Исследуем форму кривых (6.3.3) при больших значениях  $\tilde{C}$  (т. е.  $\tilde{C} \gg 1$ ). Для больших значений  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ , удовлетворяющих урав-

нению (6.3.3), сумма двух последних слагаемых мала. Обозначим эту малую величину через  $\varepsilon_1$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{2(1-\tilde{m})}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{x}_1)^2+\tilde{y}^2}} + \frac{2\tilde{m}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{x}_2)^2+\tilde{y}^2}}. \quad (6.3.4)$$

Тогда (6.3.3) принимает вид

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \tilde{C} - \varepsilon_1.$$

Это уравнение кривой, близкой к окружности большого радиуса  $\sqrt{\tilde{C}}$  и целиком лежащей внутри указанной окружности.

При больших значениях  $\tilde{C}$  уравнение (6.3.3) может быть также удовлетворено координатами точек, лежащих вблизи притягивающих тел  $m_1$  и  $m_2$ . Действительно, для таких точек оказываются малыми либо соотношение  $\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{x}_1)^2+\tilde{y}^2}$  (для точек в окрестности  $m_1$ ), либо соотношение  $\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{x}_2)^2+\tilde{y}^2}$  (для точек в окрестности  $m_2$ ). При этом первые два слагаемых (6.3.3) имеют порядок 1, т. е.  $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \ll \tilde{C}$ . Отсюда можно записать

$$\frac{1-\tilde{m}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{x}_1)^2+\tilde{y}^2}} + \frac{\tilde{m}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{x}_2)^2+\tilde{y}^2}} = \frac{\tilde{C}}{2} - \varepsilon_2, \quad (6.3.5)$$

где  $\varepsilon_2 = (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)/2$ . Соотношению (6.3.5) удовлетворяют замкнутые кривые, близкие к окружностям радиусов  $2(1-\tilde{m})/\tilde{C}$  (для точек в окрестности  $m_1$ ) и  $2\tilde{m}/\tilde{C}$  (для точек в окрестности  $m_2$ ) и целиком расположенные вне указанных окружностей.

Если уменьшать величину  $\tilde{C}$ , внешняя замкнутая кривая сжимается. Кривые, окружающие  $m_1$  и  $m_2$ , расширяются и, как показали расчеты, доходят до соприкосновения друг с другом (в особой точке поверхности Хилла), а затем соединяются между собой, образуя профиль несимметричной гантели, тяготеющей к большему по массе притягивающему телу  $m_1$  (точка  $1-\tilde{m}$  на рис. 6.3, а, б, в). Гантель имеет симметричную форму только при  $\tilde{m} = 1/2$ , когда  $m_1 = m_2$ . Дальнейшая эволюция формы кривых при уменьшении величины  $\tilde{C}$  показана на рис. 6.3, г, д, е и будет обсуждаться несколько позже. Значения постоянной  $\tilde{C}$ , соответствующие построенным кривым, удовлетворяют неравенствам

$$\tilde{C}_1 > \tilde{C}_2 > \tilde{C}_3 > \tilde{C}_4 > \tilde{C}_5 > \tilde{C}_6.$$

Исследуем теперь кривые, образованные пересечением поверхностей (6.3.2) с координатной плоскостью  $V\tilde{x}\tilde{z}$ . Полагая  $\tilde{y} = 0$ , получим

$$\tilde{x}^2 + \frac{2(1-\tilde{m})}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{x}_1)^2+\tilde{z}^2}} + \frac{2\tilde{m}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{x}_2)^2+\tilde{z}^2}} = \tilde{C}. \quad (6.3.6)$$

Рассмотрим снова большие значения  $\tilde{C}$ . Видно, что уравнению (6.3.6) удовлетворяют кривые, близкие к прямым  $\tilde{x} = \pm\sqrt{\tilde{C}}$  и рас-

положенные ближе к началу координат, чем указанные прямые. Уравнению (6.3.6) при больших  $\tilde{C}$  будут также удовлетворять замкнутые кривые, расположенные вокруг притягивающих тел и близкие к окружностям радиусов  $2(1-\tilde{m})/\tilde{C}$  (для точек в окрестности

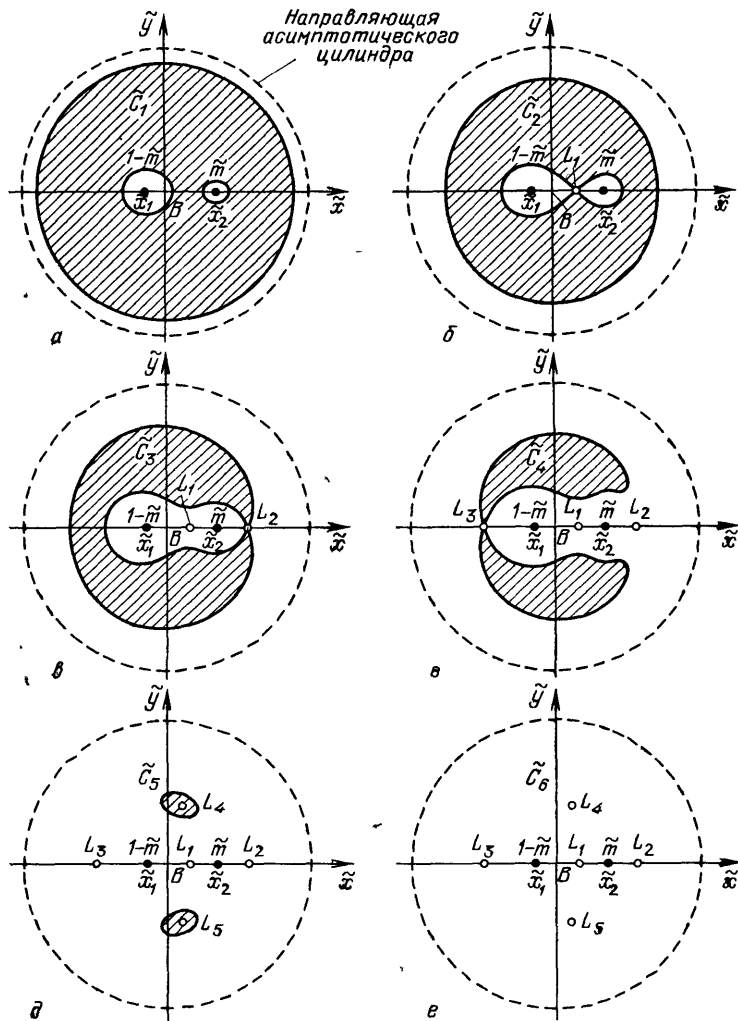


Рис. 6.3. Кривые, образованные пересечением поверхностей нулевой относительной скорости с координатной плоскостью  $B\tilde{x}\tilde{y}$

$\tilde{m}_1$ ) и  $2\tilde{m}/\tilde{C}$  (для точек в окрестности  $m_2$ ) и лежащие вне указанных окружностей. При уменьшении величины  $\tilde{C}$  внешние кривые стягиваются к началу координат, а замкнутые кривые вокруг при-



тягивающих тел увеличиваются в размере. После их соприкосновения образуется кривая типа гантели (рис. 6.4, а, б, в). Дальнейшее изменение формы кривых (6.3.6) при уменьшении величины  $\mathcal{C}$

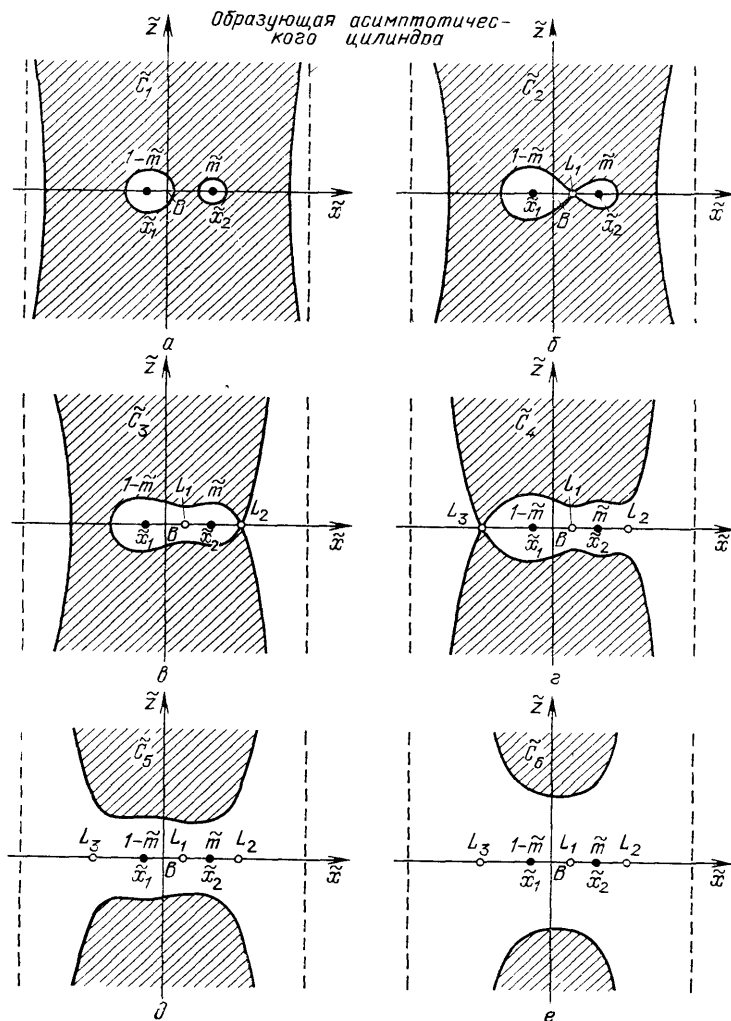


Рис. 6.4. Кривые, образованные пересечением поверхностей нулевой относительной скорости с координатной плоскостью  $V\bar{x}\bar{z}$

показано на рис. 6.4, г, д, е. Значения  $\mathcal{C}$  соответствуют рис. 6.3.

Наконец, рассмотрим кривые пересечения поверхностей нулевой относительной скорости (6.3.2) с координатной плоскостью  $V\bar{y}\bar{z}$ .

Полагая в (6.3.2)  $\tilde{x} = 0$ , получим

$$\tilde{y}^2 + \frac{2(1-\tilde{m})}{\sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}} + \frac{2\tilde{m}}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}} = \tilde{C}, \quad (6.3.7)$$

При больших значениях  $\tilde{C}$  уравнению (6.3.7) удовлетворяют кривые, близкие к прямым  $\tilde{y} = \pm\sqrt{\tilde{C}}$  и расположенные ближе к началу координат. Уравнению (6.3.7) будет также удовлетворять замкнутая кривая в окрестности начала координат, целиком расположенная вне окружности радиуса  $\sqrt{[2(1-\tilde{m})/\tilde{C}]^2 - \tilde{x}_1^2}$  с центром в начале координат. Качественную картину кривых пересечения поверхностей нулевой относительной скорости с координатной плоскостью  $B\tilde{y}\tilde{z}$  дает рис. 6.5.

Сопоставляя результаты анализа форм кривых, по которым пересекаются поверхности нулевой относительной скорости с координатными плоскостями, можно установить форму этих поверхностей в трехмерном пространстве для различных величин постоянной  $\tilde{C}$ . Если постоянная  $\tilde{C}$  велика, поверхности нулевой относительной скорости (поверхности Хилла) состоят из двух замкнутых поверхностей, близких к сферам с центрами в  $m_1$  и  $m_2$  (на рисунках точки  $1-\tilde{m}$  и  $\tilde{m}$  соответственно), а также из бесконечного цилиндрида большого радиуса, который неограниченно приближается к внешнему асимптотическому цилиндру. При меньших значениях  $\tilde{C}$  сферодальные поверхности расширяются и соприкасаются в точке  $L_1$  (рис. 6.3, б, 6.4, б, 6.5, б), расположенной на оси  $B\tilde{x}$ , а затем они сливаются в одну поверхность типа гантели, тяготеющей к большому телу  $m_1$ . При еще меньших значениях  $\tilde{C}$  сначала правая граница «гантели» касается цилиндрида в точке  $L_2$ , а затем и левая граница касается цилиндрида в точке  $L_3$  (рис. 6.3, в, г, 6.4, в, г, 6.5, в, г). Обе эти точки расположены на оси  $B\tilde{x}$ . На рис. 6.3, д, 6.4, д, 6.5, д для постоянной  $\tilde{C}_5 < \tilde{C}_6$  показано промежуточное состояние эволюции поверхностей Хилла, когда верхняя и нижняя полости соединены узкими перетяжками вокруг точек  $L_4$  и  $L_5$ , лежащих в плоскости  $B\tilde{x}\tilde{y}$  и симметричных относительно оси  $B\tilde{x}$ . При достаточно малых  $\tilde{C}$  поверхности Хилла уже не пересекают плоскость  $B\tilde{x}\tilde{y}$  и распадаются на две бесконечные полости, которые при  $\tilde{C} \rightarrow 0$  неограниченно удаляются друг от друга и в пределе исчезают.

После того как осуществлено разбиение пространства поверхностями нулевой относительной скорости, необходимо установить области, в которых возможно движение тела бесконечно малой массы  $m_3$ . Поскольку тело  $m_3$  не может пересечь поверхность нулевой относительной скорости, оно будет оставаться в той части пространства, где находилось в начальный момент времени.

Согласно соотношению (6.3.1а)

$$\hat{V}^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \frac{2(1-\tilde{m})}{\tilde{\rho}_{31}} + \frac{2\tilde{m}}{\tilde{\rho}_{32}} - \tilde{C}. \quad (6.3.8)$$

Пусть постоянная  $\tilde{C}$  настолько велика, что сфероидальные поверхности вокруг  $m_1$  и  $m_2$ , а также цилиндрическая поверхность разделены. Координаты  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$  можно выбрать такими большими, чтобы правая часть (6.3.8) была положительна при любой величине

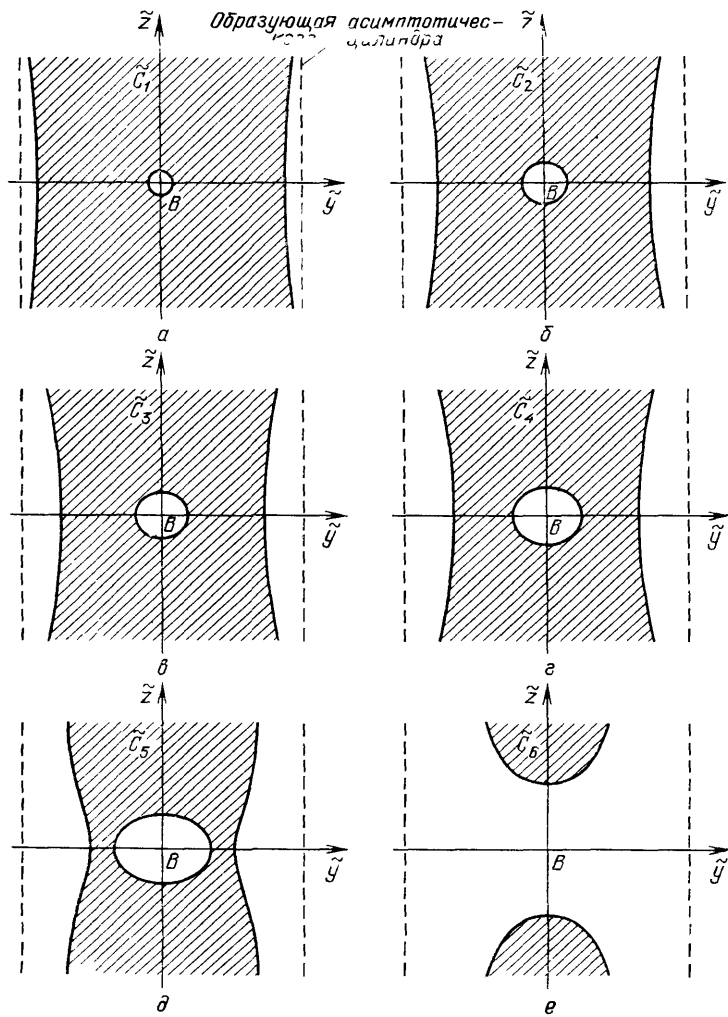


Рис. 6.5. Кривые, образованные пересечением поверхностей нулевой относительной скорости с координатной плоскостью  $B\tilde{y}\tilde{z}$

не  $\tilde{C}$ . Отсюда  $\tilde{v}^2 > 0$ , следовательно, возможно движение бесконечно малого по массе тела  $m_3$  вне области, ограниченной цилиндрической поверхностью. Если же рассматривать точки вблизи притягивающего тела  $m_1$  или  $m_2$ , то расстояния  $\tilde{\rho}_{31}$  и  $\tilde{\rho}_{32}$  могут быть

выбраны такими малыми, что правая часть (6.3.8) будет положительна при любом  $C$ . Отсюда следует возможность движения тела  $m_3$  внутри замкнутых сферических поверхностей, причем оно не может покинуть эти области, так как не может пересечь поверхности нулевой относительной скорости. На рис. 6.3—6.5 для различных значений  $C$  штриховкой выделены области внутри асимптотического цилиндра, в которых не может находиться тело  $m_3$  [52].

**6.3.2. Двойные точки поверхностей нулевой относительной скорости.** Проведенный анализ поверхностей нулевой относительной скорости показал, что все двойные точки, т. е. точки касания поверхностей, которые появляются при уменьшении величины постоянной  $C$ , располагаются в плоскости  $B\tilde{x}\tilde{y}$ . На оси  $B\tilde{x}$  находятся три двойные точки. Как уже отмечалось, первая точка  $L_1$  (рис. 6.3) отвечает соприкосновению двух внутренних овалов в плоскости  $B\tilde{x}\tilde{y}$ , расположенных вокруг притягивающих тел. Две другие точки,  $L_2$  и  $L_3$ , появляются при соприкосновении каждого из внутренних овалов с внешним. Еще две двойные точки,  $L_4$  и  $L_5$ , появляются, когда поверхности нулевой относительной скорости исчезают с плоскости  $B\tilde{x}\tilde{y}$ . Эти две точки, как будет показано в п. 6.3.3, образуют равносторонние треугольники с притягивающими телами.

Из аналитической геометрии известно, что в двойных точках поверхности обращаются в нуль частные производные функции, описывающей эту поверхность. В рассматриваемой задаче поверхность описывается функцией

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \frac{2(1-\tilde{m})}{V(\tilde{x}-\tilde{x}_1)^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} + \frac{2\tilde{m}}{V(\tilde{x}-\tilde{x}_2)^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{C},$$

или

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 2\tilde{J} - \tilde{C}.$$

Отсюда видно, что должны выполняться условия

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{z}} = 0. \quad (6.3.9)$$

Вместе с тем согласно уравнениям движения (6.2.6) и (6.2.9) имеем

$$\tilde{x}'' - 2\tilde{y}' = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{x}}, \quad \tilde{y}'' + 2\tilde{x}' = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{y}}, \quad \tilde{z}'' = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{z}}, \quad (6.3.10)$$

но в точках поверхности нулевой относительной скорости

$$\tilde{x}' = \tilde{y}' = \tilde{z}' = 0, \quad (6.3.11)$$

поэтому в двойных точках должны выполняться равенства

$$\tilde{x}'' = \tilde{y}'' = \tilde{z}'' = 0. \quad (6.3.12)$$

Следовательно, когда тело бесконечно малой массы  $m_3$  находится в одной из пяти двойных точек  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$ , равнодействующе-

щая всех приложенных к нему сил равна нулю. Предположим, что тело бесконечно малой массы поместили в одну из указанных точек с нулевой относительной скоростью. Тогда оно будет оставаться там неограниченно долго, если не будет возмущаться силами, внешними по отношению к рассматриваемой системе трех тел. В соответствии с определением *двойные точки поверхностей нулевой относительной скорости являются точками либрации*.

Точки либрации  $L_1, L_2, L_3$ , расположенные на оси  $V\tilde{x}$ , называются *прямолинейными*, а точки либрации  $L_4, L_5$ , отстоящие от оси  $V\tilde{x}$  в плоскости  $V\tilde{x}\tilde{y}$ , называются *треугольными*.

Найдем положение прямоугольных точек либрации. Их координаты определяются условием

$$\left. \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{y}=\tilde{z}=0} = 0,$$

или

$$\tilde{x} - \frac{(1-\tilde{m})(\tilde{x}-\tilde{x}_1)}{|\tilde{x}-\tilde{x}_1|^3} - \frac{\tilde{m}(\tilde{x}-\tilde{x}_2)}{|\tilde{x}-\tilde{x}_2|^3} = 0. \quad (6.3.13)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x} - \frac{(1-\tilde{m})(\tilde{x}-\tilde{x}_1)}{|\tilde{x}-\tilde{x}_1|^3} - \frac{\tilde{m}(\tilde{x}-\tilde{x}_2)}{|\tilde{x}-\tilde{x}_2|^3}, \quad (6.3.14)$$

которая конечна и непрерывна при всех значениях аргумента  $\tilde{x}$ , кроме точек  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  и  $\pm\infty$ . В этих точках она имеет разрыв второго рода (обращается в  $\pm\infty$ ). Проследим за изменением знака  $\varphi(\tilde{x})$  в диапазоне  $-\infty < \tilde{x} < +\infty$ :

$$\varphi(\tilde{x}) \begin{cases} < 0 & > 0 & < 0 & > 0 & < 0 & > 0 \\ \left. \begin{array}{l} \tilde{x} \\ \left| \begin{array}{l} -\infty \\ \tilde{x}_1 - \varepsilon \\ \tilde{x}_1 + \varepsilon \\ \tilde{x}_2 - \varepsilon \\ \tilde{x}_2 + \varepsilon \\ +\infty \end{array} \right. \end{array} \right\} \end{cases}$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  — малая величина. Функция  $\varphi(\tilde{x})$  проходит через нуль в точках  $\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*$  (рис. 6.6). Обсудим корни функции  $\varphi(\tilde{x})$  в порядке их возрастания. Согласно [11, 43, 45, 58] символом  $L_3$  обозначают точку либрации, расположенную левее большего притягивающего тела  $m_1$ . Ее координата  $\tilde{x}_3^*$  удовлетворяет неравенствам

$$-\infty < \tilde{x}_3^* < \tilde{x}_1,$$

где  $\tilde{x}_1 = -\tilde{m}$  с учетом (6.2.5). Через  $L_1$  обозначают точку либрации, расположенную между притягивающими телами  $m_1$  и  $m_2$ . Ее координата  $\tilde{x}_1^*$  удовлетворяет условиям

$$\tilde{x}_1 < \tilde{x}_1^* < \tilde{x}_2,$$

где  $\tilde{x}_2 = 1 - \tilde{m}$  с учетом (6.2.5). Точку либрации, расположенную правее меньшего притягивающего тела  $m_2$ , обозначают  $L_2$ . Коор-

дината этой точки  $\tilde{x}_2^*$  удовлетворяет неравенствам

$$\tilde{x}_2 < \tilde{x}_2^* < +\infty.$$

**6.3.3. Вычисление координат точек либрации.** Приведем алгоритм вычисления координат прямолинейных точек либрации, расположенных на оси  $B\tilde{x}$  вращающейся системы отсчета [45]. С помощью соотношения (6.3.13)

нетрудно показать, что расстояние от точки либрации  $L_3$  до большего притягивающего тела  $m_1$  не превосходит 1 (т. е. меньше расстояния между телами  $m_1$  и  $m_2$ ). Можно также доказать, что и расстояние от точки либрации  $L_2$  до меньшего притягивающего тела  $m_2$  не превышает 1. Расстояние от точки либрации  $L_1$  до любого из притягивающих тел  $m_1$  и  $m_2$  меньше 1, так как эта точка расположена между ними.

Рассмотрим сначала точку либрации  $L_3$ . Обозначим через  $1 - \rho$  (где  $0 < \rho < 1$ ) расстояние от притягивающего тела  $m_1$  (точка  $1 - \tilde{m}$  на рис. 6.6) до корня  $\tilde{x}_3^*$  уравнения (6.3.13), т. е.

$$1 - \rho = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_3^*.$$

Тогда

$$\tilde{x}_3^* - \tilde{x}_1 = -1 + \rho, \quad \tilde{x}_3^* - \tilde{x}_2 = -2 + \rho.$$

После подстановки этих соотношений в (6.3.13) получим

$$-\tilde{m} - 1 + \rho - \frac{(1 - \tilde{m})(-1 + \rho)}{|1 - \rho|^3} - \frac{\tilde{m}(-2 + \rho)}{|2 - \rho|^3} = 0,$$

или

$$-\tilde{m} - 1 + \rho + \frac{1 - \tilde{m}}{(1 - \rho)^2} + \frac{\tilde{m}}{(2 - \rho)^2} = 0.$$

Отсюда уравнение для  $\rho$ :

$$\rho^5 - (7 + \tilde{m})\rho^4 + (19 + 6\tilde{m})\rho^3 - (24 + 13\tilde{m})\rho^2 + (12 + 14\tilde{m})\rho - 7\tilde{m} = 0. \quad (6.3.15)$$

Функция

$$F(\rho) = \rho^5 - (7 + \tilde{m})\rho^4 + (19 + 6\tilde{m})\rho^3 - (24 + 13\tilde{m})\rho^2 + (12 + 14\tilde{m})\rho - 7\tilde{m}$$

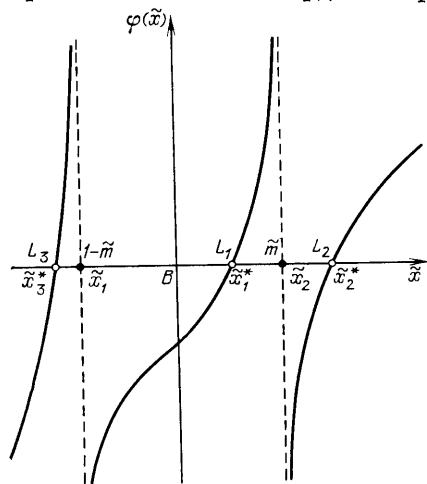


Рис. 6.6. К определению координат точек либрации, расположенных на оси  $B\tilde{x}$

имеет разные знаки при  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$ :

$$F(0) = -7\tilde{m} < 0, \quad F(1) = 1 - \tilde{m} > 0.$$

Поэтому единственный положительный корень уравнения (6.3.15) расположен в диапазоне  $0 < \rho < 1$ . При  $\tilde{m} = 0$  уравнение (6.3.15) принимает вид

$$\rho^5 - 7\rho^4 + 19\rho^3 - 24\rho^2 + 12\rho = 0$$

и имеет единственный вещественный корень  $\rho = 0$ . Если  $\tilde{m} \neq 0$ , то единственный положительный корень уравнения (6.3.15) будет зависеть от параметра  $\tilde{m}$ , причем этот корень стремится к нулю вместе с  $\tilde{m}$ . Отсюда видно, что корень уравнения (6.3.15) можно искать в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням малого параметра  $\tilde{m}$ :

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tilde{m}^k = c_1 \tilde{m} + c_2 \tilde{m}^2 + c_3 \tilde{m}^3 + \dots \quad (6.3.16)$$

Подставим (6.3.16) в (6.3.15) и приравняем нулю коэффициенты при различных степенях  $\tilde{m}$ , тогда

$$c_1 = \frac{7}{12}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{23 \cdot 7^2}{12^4}, \dots$$

и

$$\rho = \frac{7}{12} \tilde{m} + \frac{23 \cdot 7^2}{12^4} \tilde{m}^3 + \dots \quad (6.3.17)$$

Но

$$x_3^* = -1 - \tilde{m} + \rho,$$

отсюда после подстановки (6.3.17)

$$\tilde{x}_3^* = -1 - \frac{5}{12} \tilde{m} + \frac{23 \cdot 7^2}{12^4} \tilde{m}^3 + \dots \quad (6.3.18)$$

Рассмотрим теперь точку либрации  $L_1$ , расположенную между притягивающими телами. Обозначим расстояние от этой точки до притягивающего тела  $\tilde{m}$  через  $\rho$ . Затем найдем

$$\tilde{x}_1^* - \tilde{x}_2 = -\rho, \quad \tilde{x}_1^* - \tilde{x}_1 = 1 - \rho, \quad \tilde{x}_1^* = 1 - \tilde{m} - \rho$$

и после подстановки в (6.3.13) получим

$$1 - \tilde{m} - \rho - \frac{(1 - \tilde{m})(1 - \rho)}{|1 - \rho|^3} - \frac{\tilde{m}(-\rho)}{|-\rho|^3} = 0,$$

или

$$1 - \tilde{m} - \rho - \frac{1 - \tilde{m}}{(1 - \rho)^2} + \frac{\tilde{m}}{\rho^2} = 0.$$

Отсюда следует уравнение для  $\rho$ :

$$\rho^5 - (3 - \tilde{m})\rho^4 + (3 - 2\tilde{m})\rho^3 - \tilde{m}\rho^2 + 2\tilde{m}\rho - \tilde{m} = 0. \quad (6.3.19)$$

При  $\tilde{m} = 0$  получим из (6.3.19) уравнение

$$\rho^3(\rho^2 - 3\rho + 3) = 0,$$

которое имеет тройной корень  $\rho = 0$  и два комплексных корня. Для  $\tilde{m} \neq 0$ , но достаточно малого, три корня уравнения (6.3.19) можно записать в виде рядов по степеням  $\tilde{m}^{1/3}$ , исчезающих вместе с этим параметром. Один из корней, который получается при действительном значении  $\tilde{m}^{1/3}$ , будет действительным, а два других — комплексными. Действительный корень представляется рядом

$$\rho = c_1 \tilde{m}^{1/3} + c_2 \tilde{m}^{2/3} + c_3 \tilde{m}^{3/3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tilde{m}^{k/3}. \quad (6.3.20)$$

Подставляя (6.3.20) в (6.3.19) и приравнявая нулю коэффициенты при соответствующих степенях  $\tilde{m}^{1/3}$ , вычислим

$$c_1 = \frac{3^{2/3}}{3}, \quad c_2 = -\frac{3^{1/3}}{9}, \quad c_3 = -\frac{1}{27}, \dots$$

и

$$\rho = \left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9} \left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{3/3} + \dots \quad (6.3.21)$$

Отсюда координата точки либрации

$$\tilde{x}_1^* = 1 - \tilde{m} - \rho = 1 - \left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{2/3} - \frac{26}{9} \left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{3/3} + \dots \quad (6.3.22)$$

Наконец, вычислим координату точки либрации  $L_2$ , расположенной правее притягивающего тела  $\tilde{m}$ . Обозначим через  $\rho$  расстояние от точки  $L_2$  до притягивающего тела  $\tilde{m}$ . В этом случае

$$\tilde{x}_2^* - x_2 = \rho, \quad \tilde{x}_2^* - \tilde{x}_1 = 1 + \rho, \quad \tilde{x}_2^* = 1 - \tilde{m} + \rho$$

и после подстановки в (6.3.13) найдем, избавляясь от знаменателей,

$$\rho^5 + (3 - \tilde{m})\rho^4 + (3 - 2\tilde{m})\rho^3 - \tilde{m}\rho^2 - 2\tilde{m}\rho - \tilde{m} = 0. \quad (6.3.23)$$

При  $\tilde{m} = 0$  получим уравнение

$$\rho^3(\rho^2 + 3\rho + 3) = 0,$$

которое имеет тройной корень  $\rho = 0$  и два комплексных корня. Поэтому для  $\tilde{m} \neq 0$  уравнение (6.3.23) имеет один действительный корень, стремящийся к нулю при  $\tilde{m} \rightarrow 0$ . Указанный корень можно представить рядом

$$\rho = c_1 \tilde{m}^{1/3} + c_2 \tilde{m}^{2/3} + c_3 \tilde{m}^{3/3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tilde{m}^{k/3}. \quad (6.3.24)$$

Подставим (6.3.24) в (6.3.23) и, приравнявая нулю коэффициенты соответствующих степеней  $\tilde{m}^{1/3}$ , вычислим

$$c_1 = \frac{3^{2/3}}{3}, \quad c_2 = \frac{3^{1/3}}{9}, \quad c_3 = -\frac{1}{27}, \dots$$



Тогда

$$\rho = \left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9}\left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{3/3} + \dots \quad (6.3.25)$$

и координата точки либрации  $L_2$

$$\tilde{x}_2^* = 1 - \tilde{m} + \rho = 1 + \left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{2/3} - \frac{28}{9}\left(\frac{\tilde{m}}{3}\right)^{3/3} + \dots \quad (6.3.26)$$

Формулы (6.3.18), (6.3.22) и (6.3.26) определяют координаты точек либрации, расположенных на оси  $B\tilde{x}$  вращающейся системы координат. Эти координаты зависят от соотношения масс меньшего и большего притягивающих тел, т. е. от  $\tilde{m} = m_2/(m_1 + m_2)$ .

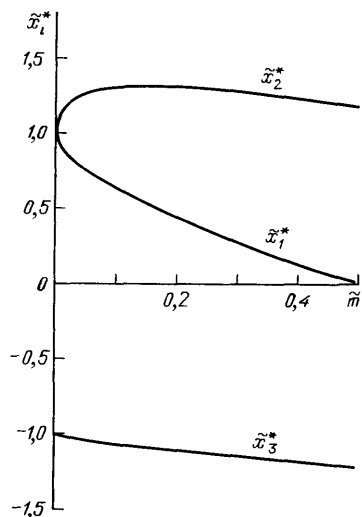


Рис. 6.7. Зависимость координаты прямолинейных точек либрации от величины относительной массы притягивающих тел

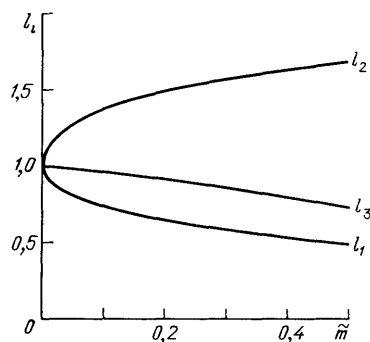


Рис. 6.8. Расстояние от большего притягивающего тела до точек либрации

Когда  $\tilde{m} \rightarrow 0$ , точки либрации  $L_1$  и  $L_2$  перемещаются к своему предельному положению, совпадающему с притягивающим телом меньшей массы, а точка либрации  $L_3$  приближается к единичному расстоянию от большего по массе притягивающего тела. На рис. 6.7 показаны результаты численного решения уравнения (6.3.13) для значений  $0 \leq \tilde{m} \leq 1/2$  [43], а на рис. 6.8 построено расстояние от большего притягивающего тела до точек либрации в зависимости от величины  $\tilde{m}$ .

В табл. 6.1 приведено расстояние точек либрации от большего притягивающего тела для некоторых тел Солнечной системы. Это расстояние отнесено к среднему расстоянию между соответствующими

щей парой  $m_1$  и  $m_2$ . Заметим, что для всех приведенных пар небесных тел точки либрации  $L_1$  и  $L_2$  расположены на существенно большем расстоянии от  $m_2$ , чем естественные спутники этих тел. Так, для пары Солнце — Земля расстояние точек либрации  $L_1$  и  $L_2$  от Земли примерно в четыре раза превосходит расстояние между Землей и Луной [43].

Чтобы найти координаты треугольных точек либрации, т. е. двойных точек поверхностей нулевой относительной скорости, не

Таблица 61

Расстояние точек либрации от большего притягивающего тела для некоторых тел Солнечной системы [43]

Притягивающие тела		Отношение массы Солнца к массе тела $m_1/m_2$	Расстояние точки либрации <sup>1)</sup>		
$m_1$	$m_2$		$L_1$	$L_2$	$L_3$
Солнце	Меркурий	6023650	0,996214	1,003795	0,9999999
Солнце	Венера	408523,5	0,990684	1,009373	0,99999858
Солнце	Земля	332946,0	0,99003	1,010037	0,99999825
Солнце	Земля + Луна	328900,5	0,989989	1,010078	0,99999822
Солнце	Марс	3098710	0,995246	1,004769	0,99999981
Солнце	Юпитер	1047,355	0,93332	1,069784	0,999444
Солнце	Сатурн	3498,5	0,955039	1,04635	0,999833
Солнце	Уран	22869	0,975773	1,024624	0,999974
Солнце	Нептун	19314	0,974193	1,026258	0,999969
Солнце	Плутон	3000000	0,990619	1,00944	0,9999986
Земля	Луна	81,30068 <sup>2)</sup>	0,849065	1,167833	0,992912

<sup>1)</sup> Отнесено к среднему расстоянию между  $m_1$  и  $m_2$

<sup>2)</sup> Отношение массы Земли к массе Луны.

лежащих на оси  $B\tilde{x}$ , вернемся к рассмотрению уравнений, которые определяют координаты двойных точек в плоскости  $B\tilde{x}\tilde{y}$  (где  $\tilde{z} = 0$ ):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} = \tilde{x} - \frac{(1-\tilde{m})(\tilde{x}-\tilde{x}_1)}{[(\tilde{x}-\tilde{x}_1)^2 + \tilde{y}^2]^{3/2}} - \frac{\tilde{m}(\tilde{x}-\tilde{x}_2)}{[(\tilde{x}-\tilde{x}_2)^2 + \tilde{y}^2]^{3/2}} = 0, \quad (6.3.27)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} = \tilde{y} - \frac{(1-\tilde{m})\tilde{y}}{[(\tilde{x}-\tilde{x}_1)^2 + \tilde{y}^2]^{3/2}} - \frac{\tilde{m}\tilde{y}}{[(\tilde{x}-\tilde{x}_2)^2 + \tilde{y}^2]^{3/2}} = 0.$$

Здесь  $\tilde{y} \neq 0$ , поэтому можно сократить второе уравнение (6.3.27) на  $\tilde{y}$ , тогда

$$1 - \frac{1-\tilde{m}}{[(\tilde{x}-\tilde{x}_1)^2 + \tilde{y}^2]^{3/2}} - \frac{\tilde{m}}{[(\tilde{x}-\tilde{x}_2)^2 + \tilde{y}^2]^{3/2}} = 0. \quad (6.3.28)$$

Умножим (6.3.28) отдельно на  $\tilde{x} - \tilde{x}_2$  и на  $\tilde{x} - \tilde{x}_1$ , а затем вычтем каждое такое произведение из первого уравнения (6.3.27). В ре-

зультате получим

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 - \frac{(1-\tilde{m})(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)}{\tilde{\rho}_{31}^{3/2}} &= 0, \\ \tilde{x}_1 - \frac{\tilde{m}(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)}{\tilde{\rho}_{32}^{3/2}} &= 0. \end{aligned}$$

где  $\tilde{\rho}_{31} = \sqrt{(\tilde{x} - \tilde{x}_1)^2 + \tilde{y}^2}$ ,  $\tilde{\rho}_{32} = \sqrt{(\tilde{x} - \tilde{x}_2)^2 + \tilde{y}^2}$ . Но согласно (6.2.5)  $\tilde{x}_1 = -\tilde{m}$ ,  $\tilde{x}_2 = 1 - \tilde{m}$ ,  $\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 = 1$ , поэтому окончательно имеем систему уравнений

$$1 - \frac{1}{\tilde{\rho}_{31}^{3/2}} = 0, \quad 1 - \frac{1}{\tilde{\rho}_{32}^{3/2}} = 0. \quad (6.3.29)$$

Единственное действительное решение системы (6.3.29)

$$\tilde{\rho}_{31} = \tilde{\rho}_{32} = 1 \quad (6.3.30)$$

показывает, что точки либрации, не лежащие на оси  $B\tilde{x}$ , образуют равносторонние треугольники с притягивающими телами  $m_1$  и  $m_2$ , независимо от их соотношения, т. е. от величины  $\tilde{m} = m_2/(m_1 + m_2)$ .

Треугольную точку либрации, расположенную выше оси  $B\tilde{x}$ , обозначают через  $L_4$ . Ее абсцисса  $\tilde{x}_4^*$  вычисляется как полусумма координат притягивающих тел, а ордината  $\tilde{y}_4^*$  является высотой равностороннего треугольника со стороной, равной единице:

$$\tilde{x}_4^* = \frac{1-2\tilde{m}}{2}, \quad \tilde{y}_4^* = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6.3.31)$$

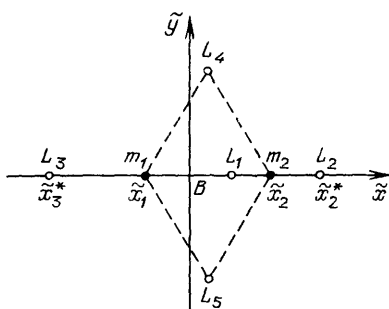


Рис. 6.9. Схема расположения точек либрации

Треугольная точка либрации  $L_5$  расположена симметрично с  $L_4$  по другую сторону от оси  $B\tilde{x}$ . Ее координаты

$$\tilde{x}_5^* = \frac{1-2\tilde{m}}{2}, \quad \tilde{y}_5^* = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6.3.32)$$

Схема расположения всех пяти точек либрации круговой ограниченной задачи трех тел приведена на рис. 6.9.

### § 6.4. Анализ устойчивости точек либрации

Для практического использования точек либрации существенным является вопрос об их устойчивости: будет ли космический аппарат, выведенный в близкую окрестность точки либрации с почти нулевой относительной скоростью, оставаться там неограниченно

но долго? Исследование устойчивости точек либрации в рамках круговой ограниченной задачи трех тел показало, что прямолинейные точки либрации неустойчивы, а треугольные точки либрации устойчивы в первом приближении, если относительная масса меньше притягивающего тела  $\tilde{m} = m_2/(m_1 + m_2)$  достаточно мала (см., например, [19, 45]). Ниже приведены доказательства обоих утверждений.

**6.4.1. Неустойчивость прямолинейных точек либрации.** Рассмотрим уравнения движения тела бесконечно малой массы в форме (6.3.10):

$$\tilde{x}'' - 2\tilde{y}' = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{x}}, \quad \tilde{y}'' + 2\tilde{x}' = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{y}}, \quad \tilde{z}'' = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{z}}.$$

Обозначим через  $\Delta \tilde{x}$ ,  $\Delta \tilde{y}$ ,  $\Delta \tilde{z}$  и  $\Delta \tilde{x}'$ ,  $\Delta \tilde{y}'$ ,  $\Delta \tilde{z}'$  соответственно малые возмущения нормированных координат  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  и нормированных составляющих скорости  $\tilde{x}'$ ,  $\tilde{y}'$ ,  $\tilde{z}'$  в окрестности прямолинейной точки либрации  $L_k$ , имеющей координаты  $(\tilde{x}_k^*, 0, 0)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Тогда можно записать линеаризованные уравнения возмущенного движения в близкой окрестности прямолинейной точки либрации:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x}'' - 2\Delta \tilde{y}' &= \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x}^2} \right|_{L_k} \Delta \tilde{x} + \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right|_{L_k} \Delta \tilde{y} + \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}} \right|_{L_k} \Delta \tilde{z}, \\ \Delta \tilde{y}'' + 2\Delta \tilde{x}' &= \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right|_{L_k} \Delta \tilde{x} + \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{L_k} \Delta \tilde{y} + \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} \right|_{L_k} \Delta \tilde{z}, \\ \Delta \tilde{z}'' &= \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}} \right|_{L_k} \Delta \tilde{x} + \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} \right|_{L_k} \Delta \tilde{y} + \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{z}^2} \right|_{L_k} \Delta \tilde{z}. \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

Учитывая, что

$$\tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2} + \frac{1 - \tilde{m}}{\sqrt{(\tilde{x} - \tilde{x}_1)^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}} + \frac{\tilde{m}}{\sqrt{(\tilde{x} - \tilde{x}_2)^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}},$$

вычислим частные производные в прямолинейных точках либрации

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x}^2} \right|_{L_k} &= 1 + \frac{2(1 - \tilde{m})}{|\tilde{x}_k^* - \tilde{x}_1|^3} + \frac{2\tilde{m}}{|\tilde{x}_k^* - \tilde{x}_2|^3}, \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right|_{L_k} = \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}} \right|_{L_k} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{L_k} &= 1 - \frac{1 - \tilde{m}}{|\tilde{x}_k^* - \tilde{x}_1|^3} - \frac{\tilde{m}}{|\tilde{x}_k^* - \tilde{x}_2|^3}, \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} \right|_{L_k} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{z}^2} \right|_{L_k} &= -\frac{1 - \tilde{m}}{|\tilde{x}_k^* - \tilde{x}_1|^3} - \frac{\tilde{m}}{|\tilde{x}_k^* - \tilde{x}_2|^3} \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Согласно (6.2.5)  $\tilde{x}_1 = -\tilde{m}$  и  $\tilde{x}_2 = 1 - \tilde{m}$ ; поэтому линеаризованные уравнения возмущенного движения в близкой окрестности прямо-

линейной точки либрации имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{x}'' - 2\Delta\tilde{y}' &= \Delta\tilde{x} + \frac{2(1-\tilde{m})}{|\tilde{x}_k^* + \tilde{m}|^3} \Delta\tilde{x} + \frac{2\tilde{m}}{|\tilde{x}_k + \tilde{m} - 1|^3} \Delta\tilde{x}, \\ \Delta\tilde{y}'' + 2\Delta\tilde{x}' &= \Delta\tilde{y} - \frac{1-\tilde{m}}{|\tilde{x}_k^* + \tilde{m}|^3} \Delta\tilde{y} - \frac{\tilde{m}}{|\tilde{x}_k^* + \tilde{m} - 1|^3} \Delta\tilde{y}, \\ \Delta\tilde{z}'' &= -\frac{1-\tilde{m}}{|\tilde{x}_k^* + \tilde{m}|^3} \Delta\tilde{z} - \frac{\tilde{m}}{|\tilde{x}_k^* + \tilde{m} - 1|^3} \Delta\tilde{z}.\end{aligned}\quad (6.4.2)$$

Для сокращения записи обычно вводят обозначения

$$a_k = \frac{1-\tilde{m}}{|\tilde{x}_k^* + \tilde{m}|^3} + \frac{\tilde{m}}{|\tilde{x}_k^* + \tilde{m} - 1|^3} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (6.4.3)$$

и тогда

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{x}'' - 2\Delta\tilde{y}' - (1 + 2a_k)\Delta\tilde{x} &= 0, \\ \Delta\tilde{y}'' + 2\Delta\tilde{x}' - (1 - a_k)\Delta\tilde{y} &= 0, \\ \Delta\tilde{z}'' + a_k\Delta\tilde{z} &= 0\end{aligned}\quad (6.4.4)$$

( $k = 1, 2, 3$ ).

Видно, что система линеаризованных уравнений возмущенного движения в окрестности прямолинейной точки либрации распалась на две подсистемы: первые два уравнения содержат только переменные  $\Delta\tilde{x}$  и  $\Delta\tilde{y}$ , а третье уравнение содержит переменную  $\Delta\tilde{z}$ . Запишем характеристическое уравнение для первой подсистемы

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 - (1 + 2a_k) & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 - (1 - a_k) \end{vmatrix} = \lambda^4 + (2 - a_k)\lambda^2 + (1 - a_k)(1 + 2a_k) = 0 \quad (6.4.5)$$

( $k = 1, 2, 3$ ).

Знак дискриминанта

$$\Delta_k = \frac{(2 - a_k)^2}{4} - (1 - a_k)(1 + 2a_k) = \frac{a_k}{4}(9a_k - 8) \quad (6.4.6)$$

( $k = 1, 2, 3$ )

биквадратного уравнения (6.4.5) определяется знаком сомножителя  $(9a_k - 8)$ , поскольку  $a_k > 0$ . Покажем, что  $a_k > 1$ , откуда будет следовать, что  $\Delta_k > 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ). С этой целью рассмотрим каждую из прямолинейных точек либрации. Точка  $L_1$  расположена между притягивающими телами  $m_1$  и  $m_2$ , значит, ее относительные расстояния до них меньше 1:  $|\tilde{x}_1^* + \tilde{m}| < 1$  и  $|\tilde{x}_1^* + \tilde{m} - 1| < 1$ . Но тогда по формуле (6.4.3) видно, что для точки  $L_1$  выполняется неравенство  $a_1 > 1$ .

Рассмотрим теперь точку либрации  $L_2$ . Ее расстояние до притягивающего тела меньшей массы вычисляется по формуле

$$\rho = \tilde{x}_2^* + \tilde{m} - 1 \quad (\rho < 1),$$

откуда

$$\tilde{x}_2^* + \tilde{m} = \rho + 1.$$

Подставляя эти соотношения в (6.4.3), получим

$$a_2 = \frac{1 - \tilde{m}}{(\rho + 1)^3} + \frac{\tilde{m}}{\rho^3}.$$

Затем выразим  $\tilde{m}$  из уравнения (6.3.23)

$$\tilde{m} = \frac{\rho^3(\rho^2 + 3\rho + 3)}{\rho^4 + 2\rho^3 + \rho^2 + 2\rho + 1} \quad (6.4.7)$$

и вычислим разность

$$a_2 - 1 = \frac{1 - \tilde{m}}{(\rho + 1)^3} + \frac{\tilde{m}}{\rho^3} - 1 = \frac{\tilde{m}(3\rho^2 + 3\rho + 1) - \rho^4(\rho^2 + 3\rho + 3)}{\rho^3(\rho + 1)^3},$$

или с учетом (6.4.7)

$$\begin{aligned} a_2 - 1 &= \frac{(\rho^2 + 3\rho + 3)(3\rho^2 + 3\rho + 1) - \rho(\rho^2 + 3\rho + 3)(\rho^4 + 2\rho^3 + \rho^2 + 2\rho + 1)}{(\rho + 1)^3(\rho^4 + 2\rho^3 + \rho^2 + 2\rho + 1)} = \\ &= -\frac{(\rho^2 + 3\rho + 3)(\rho^5 + 2\rho^4 + \rho^3 - \rho^2 - 2\rho - 1)}{(\rho + 1)^3(\rho^4 + 2\rho^3 + \rho^2 + 2\rho + 1)} = \frac{(\rho^2 + 3\rho + 3)(1 - \rho^3)}{(\rho + 1)(\rho^4 + 2\rho^3 + \rho^2 + 2\rho + 1)} > 0, \end{aligned}$$

так как  $\rho < 1$ . Отсюда следует, что  $a_2 > 1$  [58].

Для упрощения доказательства условия  $a_3 > 1$  обозначим через  $l_3$  расстояние между точкой либрации  $L_3$  и бóльшим притягивающим телом. Тогда расстояние от точки  $L_3$  до меньшего притягивающего тела будет  $l_3 + 1$  (см. рис. 6.9) и можно записать

$$a_3 = \frac{1 - \tilde{m}}{l_3^3} + \frac{\tilde{m}}{(l_3 + 1)^3} \quad (l_3 < 1). \quad (6.4.8)$$

Теперь величина  $l_3$  будет удовлетворять уравнению, которое получится из (6.3.15) при подстановке  $1 - l_3$  вместо  $\rho$ :

$$l_3^5 + (2 + \tilde{m})l_3^4 + (1 + 2\tilde{m})l_3^3 - (1 - \tilde{m})l_3^2 - 2(1 - \tilde{m})l_3 - 1 + \tilde{m} = 0.$$

Отсюда

$$\tilde{m} = \frac{(l_3 + 1)^2(1 - l_3^3)}{l_3^4 + 2l_3^3 + l_3^2 + 2l_3 + 1}. \quad (6.4.9)$$

Как и в предыдущем случае, вычислим разность

$$a_3 - 1 = \frac{1 - \tilde{m}}{l_3^3} + \frac{\tilde{m}}{(l_3 + 1)^3} - 1 = \frac{(l_3 + 1)^3(1 - l_3^3) - \tilde{m}(3l_3^2 + 3l_3 + 1)}{l_3^3(l_3 + 1)^3},$$

или с учетом (6.4.9)

$$a_3 - 1 = \frac{(1 - l_3^3) [(l_3 + 1)(l_3^4 + 2l_3^3 + l_3^2 + 2l_3 + 1) - (3l_3^2 + 3l_3 + 1)]}{l_3^3(l_3 + 1)(l_3^4 + 2l_3^3 + l_3^2 + 2l_3 + 1)} = \\ = \frac{(l_3^2 + 3l_3 + 3)(1 - l_3^3)}{(l_3 + 1)(l_3^4 + 2l_3^3 + l_3^2 + 2l_3 + 1)} > 0,$$

так как  $l_3 < 1$ . Отсюда имеем  $a_3 > 1$ . Итак, показано, что для прямолинейных точек либрации выполняется условие  $a_k > 1$ , поэтому дискриминант  $\Delta_k > 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Если рассматривать (6.4.5) как квадратное уравнение относительно  $\lambda^2$ , то окажется, что оно имеет два действительных корня: положительный и отрицательный. Следовательно, характеристическое уравнение (6.4.5) для первой подсистемы имеет два действительных корня, равных по величине и противоположных по знаку, и два чисто мнимых корня.

Перейдем к анализу второй подсистемы (6.4.4), содержащей пространственную переменную  $\Delta z$ . Ее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (6.4.10)$$

имеет пару чисто мнимых корней

$$\lambda = \pm i\sqrt{a_k}, \quad (6.4.11)$$

поскольку по доказанному  $a_k > 1 > 0$ .

Таким образом, установлено, что характеристическое уравнение (6.4.5) линеаризованной системы возмущенного движения в окрестности прямолинейных точек либрации имеет один действительный положительный корень, один действительный отрицательный корень и два чисто мнимых корня. Поскольку один из действительных корней положителен, прямолинейные точки либрации  $L_1, L_2, L_3$  круговой ограниченной задачи трех тел неустойчивы по Ляпунову [42].

Неустойчивость прямолинейных точек либрации означает, что КА, выведенный в любую из этих точек с небольшими ошибками по координатам или по составляющим скорости, со временем неизбежно удалится от этих точек.

**6.4.2. Условие устойчивости треугольных точек либрации.** Запишем линеаризованные уравнения возмущенного движения в малой окрестности треугольных точек либрации  $L_4$  и  $L_5$ , координаты которых

$$\tilde{x}_4^* = \frac{1 - 2\tilde{m}}{2}, \quad \tilde{y}_4^* = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tilde{z}_4^* = 0, \\ \tilde{x}_5^* = \frac{1 - 2\tilde{m}}{2}, \quad \tilde{y}_5^* = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tilde{z}_5^* = 0.$$

С этой целью вычислим необходимые производные в точках  $L_4$  и  $L_5$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{L_4} &= \frac{3}{4}, & \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{L_4} &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\tilde{m}), & \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}} \Big|_{L_4} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{y}^2} \Big|_{L_4} &= \frac{9}{4}, & \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} \Big|_{L_4} &= 0, & \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{z}^2} \Big|_{L_4} &= -1, \\ \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{L_5} &= \frac{3}{4}, & \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{L_5} &= -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\tilde{m}), & \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}} \Big|_{L_5} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{y}^2} \Big|_{L_5} &= \frac{9}{4}, & \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} \Big|_{L_5} &= 0, & \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \tilde{z}^2} \Big|_{L_5} &= -1. \end{aligned}$$

После подстановки их в (6.4.1) получим линейризованные уравнения возмущенного движения в окрестности треугольной точки либрации

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x}'' - 2\Delta \tilde{y}' - \frac{3}{4} \Delta \tilde{x} - (-1)^k \frac{3\sqrt{3}}{4} (1-2\tilde{m}) \Delta \tilde{y} &= 0, \\ \Delta \tilde{y}'' + 2\Delta \tilde{x}' - \frac{9}{4} \Delta \tilde{y} - (-1)^k \frac{3\sqrt{3}}{4} (1-2\tilde{m}) \Delta \tilde{x} &= 0, \quad (6.4.12) \\ \Delta \tilde{z}'' + \Delta \tilde{z} &= 0 \quad (k = 4, 5). \end{aligned}$$

Видно, что и для треугольных точек либрации система уравнений возмущенного движения (6.4.12) распадается на две подсистемы, для переменных  $\Delta \tilde{x}$ ,  $\Delta \tilde{y}$  и для пространственной переменной  $\Delta \tilde{z}$ . Характеристическое уравнение первой подсистемы

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda^2 - \frac{3}{4} & -2\lambda - (-1)^k \frac{3\sqrt{3}}{4} (1-2\tilde{m}) \\ 2\lambda - (-1)^k \frac{3\sqrt{3}}{4} (1-2\tilde{m}) & \lambda^2 - \frac{9}{4} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4} \tilde{m} (1-\tilde{m}) = 0 \quad (6.4.13) \end{aligned}$$

является биквадратным. Рассматривая его как квадратное относительно  $\lambda^2$ , найдем дискриминант

$$\Delta = 1 - 27\tilde{m}(1-\tilde{m}) \quad (6.4.14)$$

и условие его положительности

$$27\tilde{m}(1-\tilde{m}) < 1. \quad (6.4.15)$$

При выполнении неравенства (6.4.15) квадратное уравнение относительно  $\lambda^2$  имеет два действительных отрицательных корня, а исходное биквадратное уравнение относительно  $\lambda$  — четыре чисто мнимых корня.



В случае

$$2\tilde{m}(1 - \tilde{m}) > 1 \quad (6.4.16)$$

квадратное уравнение относительно  $\lambda^2$  имеет два комплексно сопряженных корня, а исходное биквадратное уравнение относительно  $\lambda$  — две пары комплексно сопряженных корней. Из них два корня заведомо будут с положительными вещественными частями. Следовательно, неравенство (6.4.16) является условием неустойчивости треугольных точек либрации.

Характеристическое уравнение второй подсистемы для пространственной переменной  $\Delta\tilde{z}$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

имеет два чисто мнимых корня  $\pm i$ , которые не могут изменить условия устойчивости треугольных точек либрации (6.4.15).

Итак, если произведение относительных масс притягивающих тел удовлетворяет условию

$$\tilde{m}(1 - \tilde{m}) < \frac{1}{27}, \quad (6.4.17)$$

то треугольные точки либрации устойчивы в первом приближении (характеристическое уравнение имеет шесть различных чисто мнимых корней). Полностью вопрос об устойчивости треугольных точек либрации может быть решен только с привлечением нелинейных слагаемых в уравнениях возмущенного движения, так как при наличии чисто мнимых корней характеристического уравнения рассмотрение только линеаризованной системы не позволяет сделать строгого вывода относительно устойчивости исходной (нелинейной) системы [42].

При строгом рассмотрении вопроса об устойчивости треугольных точек либрации плоской круговой ограниченной задачи трех тел доказана их устойчивость для всех значений относительной массы  $\tilde{m}$ , удовлетворяющих условию (6.4.17), или

$$0 < \tilde{m} < \frac{9 - \sqrt{69}}{18} \approx 0,0385208, \quad (6.4.18)$$

кроме двух значений,

$$\tilde{m}^* = \frac{45 - \sqrt{1833}}{90} \approx 0,0242938,$$

$$\tilde{m}^{**} = \frac{15 - \sqrt{213}}{30} \approx 0,0135160,$$

при которых имеет место неустойчивость. В пространственной задаче неустойчивость, когда  $\tilde{m} = \tilde{m}^*$  или  $\tilde{m} = \tilde{m}^{**}$ , остается, а при остальных значениях  $\tilde{m}$  из диапазона (6.4.18) доказана устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [43].

Устойчивость треугольных точек либрации означает, что КА, выведенный в близкую окрестность точки  $L_4$  или точки  $L_5$  с небольшими ошибками по скорости, должен оставаться на малом расстоянии от соответствующей точки достаточно долго. Однако доказательство устойчивости получено в рамках модельной задачи трех тел. В реальных условиях необходимо учитывать наиболее существенные возмущения от других небесных тел. Для удержания аппарата вблизи треугольной точки либрации необходимо осуществлять коррекцию его движения.

### § 6.5. Упрощенная постановка задачи трех тел

Задача движения КА в гравитационном поле двух небесных тел является достаточно сложной и ее обычно исследуют численными методами. В ряде случаев оказывается допустимым упрощение этой задачи путем разделения пространства на две области, в каждой из которых учитывается притяжение только одного небесного тела. Тогда внутри каждой области пространства движение КА будет описываться известными интегралами задачи двух тел. На границе перехода из одной области в другую необходимо соответствующим образом пересчитать вектор скорости и радиус-вектор с учетом замены центрального тела.

Разделение пространства на две области можно осуществлять на основе различных допущений, которые определяют границу. В задачах небесной механики, как правило, одно небесное тело имеет массу существенно большую, чем второе. Например, Земля и Луна, Солнце и Земля или любая другая планета. Поэтому область, где предполагается движение КА по коническому сечению, в фокусе которого находится меньшее притягивающее тело, занимает только небольшую часть пространства вблизи этого тела. Во всем оставшемся пространстве предполагается движение КА по коническому сечению, в фокусе которого находится большее притягивающее тело.

Рассмотрим некоторые принципы разделения пространства на две области.

**6.5.1. Сфера действия.** Пусть, как и прежде,  $m_1$  — масса и обозначение большего притягивающего тела,  $m_2$  — масса и обозначение меньшего притягивающего тела, а  $m_3$  — масса и обозначение КА. Их взаимное расположение определяется радиусами-векторами  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$ , которые соединяют  $m_1$  соответственно с  $m_2$  и  $m_3$  (см. рис. 6.1).

Сначала рассмотрим движение КА относительно большего притягивающего тела  $m_1$ . С этой целью воспользуемся уравнением (6.1.20):

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = -f \frac{m_1 + m_3}{r_3^3} \mathbf{r}_3 + f m_2 \left( \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right),$$

или

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = \mathbf{g}_1 + \Delta \mathbf{g}_1, \quad (6.5.1)$$

где

$$\mathbf{g}_1 = -f \frac{m_1 + m_3}{r_3^3} \mathbf{r}_3 \quad (6.5.2)$$

— ускорение, которое получает КА при движении в центральном поле тела  $m_1$ ,

$$\Delta \mathbf{g}_1 = f m_2 \left( \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) \quad (6.5.3)$$

— *возмущающее ускорение*, которое получает КА из-за наличия притягивающего тела  $m_2$ .

Теперь рассмотрим движение КА относительно меньшего притягивающего тела  $m_2$ . По аналогии с (6.5.1) можно записать

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{23}}{dt^2} = \mathbf{g}_2 + \Delta \mathbf{g}_2, \quad (6.5.4)$$

где

$$\mathbf{g}_2 = -f \frac{m_2 + m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} \quad (6.5.5)$$

— ускорение, которое получает КА при движении в центральном поле тела  $m_2$ ,

$$\Delta \mathbf{g}_2 = f m_1 \left( \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} - \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} \right) \quad (6.5.6)$$

— *возмущающее ускорение*, которое получает КА из-за наличия тела  $m_1$ .

*Областью действия*, или *сферой действия*, меньшего тела  $m_2$  относительно большего тела  $m_1$  называют область пространства, в которой выполняется условие

$$\frac{|\Delta \mathbf{g}_2|}{|\mathbf{g}_2|} < \frac{|\Delta \mathbf{g}_1|}{|\mathbf{g}_1|}. \quad (6.5.7)$$

Заметим, что при введении этого понятия под словом «сфера» сначала имеем в виду не геометрическое место точек, одинаково удаленных от центра, а область преимущественного влияния меньшего тела на движение КА, хотя ниже будет показано, что граница этой области действительно близка к сфере.

Внутри сферы действия меньшее тело рассматривают в качестве центрального, а большее тело как возмущающее. Вне сферы действия за центральное принимают большее тело, а за возмущающее — меньшее. В ряде задач небесной механики оказывается возможным пренебречь в первом приближении влиянием на траекто-

рию КА большего тела внутри сферы действия и меньшего тела вне этой сферы. Тогда внутри сферы действия движение КА будет происходить в центральном поле, создаваемом меньшим телом, а вне сферы действия — в центральном поле, создаваемом бóльшим телом.

Установим теперь границу области (сферы) действия меньшего тела относительно большего. На границе области действия должно выполняться условие

$$\frac{|\Delta g_2|}{|g_2|} = \frac{|\Delta g_1|}{|g_1|} \quad (6.5.8)$$

или

$$\frac{m_1 \left| \frac{r_2}{r_3^2} - \frac{r_3}{r_2^2} \right|}{\frac{m_2 + m_3}{r_{23}^2}} = \frac{m_2 \left| \frac{r_2 - r_3}{r_{32}^3} - \frac{r_2}{r_2^3} \right|}{\frac{m_1 + m_3}{r_3^2}}. \quad (6.5.9)$$

Отсюда

$$\frac{m_2(m_2 + m_3)}{m_1(m_1 + m_3)} r_3^2 \left| -\frac{r_{23}}{r_2^3} - \frac{r_2}{r_2^3} \right| = r_{23}^2 \left| \frac{r_2}{r_2^3} - \frac{r_3}{r_3^3} \right|, \quad (6.5.10)$$

так как

$$-r_{23} = r_2 - r_3, \quad r_{23} = r_{32}.$$

Чтобы избавиться от векторов, возведем обе части (6.5.10) в квадрат, а затем упростим полученное соотношение с учетом очевидных равенств

$$\begin{aligned} r_2 \cdot r_{23} &= -r_2 r_{23} \cos \varphi, \\ r_2 \cdot r_3 &= r_2 \cdot (r_2 + r_{23}) = r_2^2 - r_2 r_{23} \cos \varphi, \\ r_3^2 &= r_2^2 + r_{23}^2 - 2r_2 r_{23} \cos \varphi, \end{aligned}$$

где  $\varphi = \angle m_1 m_2 m_3$  (см. рис. 6.4). Тогда получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 \left( \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_3} \right)^2 r_3^4 \left( \frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_{23}^4} - \frac{2 \cos \varphi}{r_2^2 r_{23}^2} \right) &= \\ = r_{23}^4 \left[ \frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_3^4} - \frac{2(r_2 - r_{23} \cos \varphi)}{r_2^2 r_3^2} \right]. \quad (6.5.11) \end{aligned}$$

Для сокращения записи обозначим

$$\frac{r_{23}}{r_2} = \rho$$

— отношение расстояния между КА и меньшим притягивающим телом к расстоянию между меньшим и бóльшим притягивающими телами. Тогда

$$\left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi.$$

С учетом этих обозначений уравнение (6.5.11) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \left(\frac{m_2+m_3}{m_1+m_2}\right)^2 (1+\rho^2-2\rho\cos\varphi)^2 \left(1+\frac{1}{\rho^4}-\frac{2\cos\varphi}{\rho^2}\right) = \\ = \rho^4 \left[1 + \frac{1}{(1+\rho^2-2\rho\cos\varphi)^2} - \frac{2(1-\rho\cos\varphi)}{(1+\rho^2-2\rho\cos\varphi)^{3/2}}\right], \end{aligned}$$

откуда

$$\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \left(\frac{m_2+m_3}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{\rho^8 [1+(1+\rho^2-2\rho\cos\varphi)^2-2(1-\rho\cos\varphi)\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos\varphi}]}{(1+\rho^2-2\rho\cos\varphi)^4 (1+\rho^4-2\rho^2\cos\varphi)}. \quad (6.5.12)$$

Соотношение (6.5.12) в неявной форме задает плоскую кривую с помощью нормированного полярного радиуса  $\rho$  и полярного угла  $\varphi$ . Эта кривая образована пересечением плоскости, проходящей через точки  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , с границей области действия меньшего притягивающего тела. Таким образом, область действия ограничена в пространстве поверхностью, полученной путем вращения плоской кривой (6.5.12) относительно оси, которая соединяет  $m_1$  и  $m_2$ .

Точное уравнение (6.5.12) можно упростить, если учесть малость отношения  $m_2/m_1$  и вытекающую отсюда малость величины  $\rho$ . В результате найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^4 = \rho^8 \left\{2 + 2(\rho^2 - 2\rho\cos\varphi) + (\rho^2 - 2\rho\cos\varphi)^2 - 2(1 - \rho\cos\varphi) \times \right. \\ \times \left[1 + \frac{1}{2}(\rho^2 - 2\rho\cos\varphi) - \frac{1}{8}(\rho^2 - 2\rho\cos\varphi)^2 \dots\right] \left[1 - 4(\rho^2 - 2\rho\cos\varphi) + \right. \\ \left. + 10(\rho^2 - 2\rho\cos\varphi)^2 - \dots\right] \left[1 - (\rho^4 - 2\rho^2\cos\varphi) + (\rho^4 - 2\rho^2\cos\varphi)^2 - \dots\right], \end{aligned}$$

или, сохраняя в скобках только слагаемые до  $\rho^2$  включительно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^4 \approx \rho^8 \left[2 + 2\rho^2 - 4\rho\cos\varphi + 4\rho^2\cos^2\varphi - (2 - 2\rho\cos\varphi) \left(1 + \frac{\rho^2}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \rho\cos\varphi - \frac{\rho^2\cos^2\varphi}{2}\right)\right] (1 - 4\rho^2 + 8\rho\cos\varphi + 40\rho^2\cos^2\varphi) (1 + 2\rho^2\cos\varphi), \\ \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^4 = \rho^{10} (1 + 3\cos^2\varphi). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\rho = \frac{\tilde{m}^{2/5}}{\sqrt[10]{1+3\cos^2\varphi}} \quad \text{и} \quad r_{23} = r_2 \frac{\tilde{m}^{2/5}}{\sqrt[10]{1+3\cos^2\varphi}}. \quad (6.5.13)$$

Соотношение (6.5.13) можно рассматривать как приближенное уравнение границы области действия меньшего небесного тела  $m_2$  относительно большего  $m_1$  (рис. 6.10). Поверхность вращения

(6.5.13) мало отличается от сферы. Действительно, отношение максимального радиуса  $r_{23}^{\max}$  (при  $\varphi = 90^\circ$ ) к минимальному радиусу  $r_{23}^{\min}$  (при  $\varphi = 0^\circ$ ) составляет

$$\frac{r_{23}^{\max}}{r_{23}^{\min}} = \sqrt[5]{2} \approx 1,15.$$

Малая ось направлена по прямой  $m_1 m_2$ , а большая ей перпендикулярна.

Дальнейшее упрощение состоит в том, что за область действия принимают часть пространства, ограниченную сферой максимального радиуса  $r_{23}^{\max}$  с центром в точке  $m_2$ . Тогда вместо (6.5.13) имеем приближенную формулу для вычисления радиуса сферы действия меньшего небесного тела относительно большего:

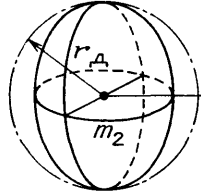


Рис. 6.10. Сфера действия меньшего небесного тела  $m_2$  относительно большего тела  $m_1$

$$r_d \approx r_{23}^{\max} = r_2 \tilde{m}^{2/5}, \quad (6.5.14)$$

где  $\tilde{m} = m_2/m_1$  — относительная масса меньшего тела.

Как уже отмечалось, внутри сферы действия радиуса  $r_d$  можно в первом приближении не учитывать влияния большего небесного тела на траекторию движения КА.

**6.5.2. Сфера притяжения.** Продолжим обсуждение движения КА массой  $m_3$  в гравитационном поле двух небесных тел, массы которых  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_2 \ll m_1$ ). Совокупность точек пространства, в котором меньшее небесное тело  $m_2$  притягивает КА сильнее, чем большее тело  $m_1$ , называют *областью притяжения* или *сферой притяжения* меньшего тела относительно большего. Здесь по поводу понятия «сфера» справедливо замечание, сделанное для сферы действия.

Граница области притяжения определяется условием

$$|g_1| = |g_2|, \quad (6.5.15)$$

где  $g_1$  — гравитационное ускорение, сообщаемое КА большим небесным телом, а  $g_2$  — гравитационное ускорение, сообщаемое КА меньшим телом. Используя формулы (6.5.2) и (6.5.5), получим для произвольной точки границы области притяжения (рис. 6.10)

$$\frac{m_1 + m_3}{r_3^2} = \frac{m_2 + m_3}{r_{23}^2},$$

откуда

$$\frac{r_{23}}{r_3} = \sqrt{\frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_3}}. \quad (6.5.16)$$

С учетом исходных предположений  $m_3 \ll m_2 < m_1$  можно принять, предполагая  $m_3 \rightarrow 0$ ,

$$\frac{r_{23}}{r_3} = \sqrt{\tilde{m}}. \quad (6.5.17)$$

где  $\tilde{m} = m_2/m_1$ . Следовательно, на границе области притяжения отношение расстояний КА до тел  $m_2$  и  $m_1$  есть величина постоянная.

Рассмотрим плоскость, проходящую через центры масс тел  $m_1, m_2, m_3$ . Для граничных точек области притяжения будет справедливо соотношение (6.5.17). Однако известно, что геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух заданных точек равно постоянному числу, отличному от единицы, представляет собой окружность, центр которой лежит на продолжении отрезка

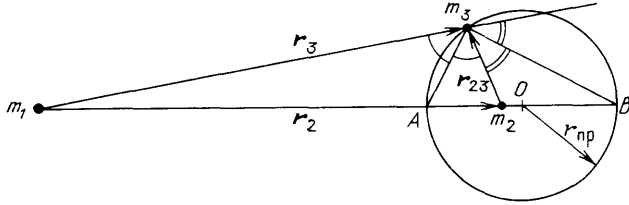


Рис. 6.11. Сфера притяжения меньшего небесного тела  $m_2$  относительно большего тела  $m_1$

$m_1 m_2$  (рис. 6.11). Поэтому область притяжения меньшего тела относительно большего ограничена сферой, полученной в результате вращения указанной окружности вокруг линии, соединяющей  $m_1$  и  $m_2$ .

Определим положение центра и величину радиуса  $r_{пр}$  сферы притяжения. Для точек  $A$  и  $B$  на границе сферы притяжения (см. рис. 6.11) можно записать

$$\frac{m_2 A}{m_1 A} = \frac{m_2 B}{m_1 B} = \sqrt{\tilde{m}}, \quad (6.5.18)$$

или

$$\frac{r_{пр} - x}{r_2 - (r_{пр} - x)} = \frac{r_{пр} + x}{r_2 + (r_{пр} + x)} = \sqrt{\tilde{m}}, \quad (6.5.19)$$

где  $x = m_2 O$  — величина смещения центра сферы притяжения относительно  $m_2$ . Отсюда радиус сферы притяжения

$$r_{пр} = r_2 \frac{\sqrt{\tilde{m}}}{1 - \tilde{m}} \quad (6.5.20)$$

и смещение центра сферы притяжения относительно меньшего небесного тела  $m_2$

$$x = r_2 \frac{\tilde{m}}{1 - \tilde{m}}. \quad (6.5.21)$$

Внутри сферы притяжения справедливо условие

$$|g_2| > |g_1|,$$

т. е. меньшее тело притягивает КА сильнее, чем большее, а вне сферы притяжения выполняется неравенство

$$|g_2| < |g_1|.$$

**6.5.3. Сфера влияния.** Наряду с использованием понятий сферы действия и сферы притяжения для приближенных расчетов траекторий движения КА в гравитационном поле двух небесных тел, существуют и другие принципы разделения пространства на области преимущественного воздействия каждого из двух небесных тел. Например, введенное в работе [32] понятие *сферы влияния* меньшего небесного тела относительно большего основано на использовании интеграла Якоби в круговой ограниченной задаче трех тел. Из условия минимизации ошибки приближенного расчета постоянной интеграла Якоби получена формула для вычисления радиуса сферы влияния

$$r_{\text{вл}} = 1,15r_2 \sqrt[3]{m}. \quad (6.5.22)$$

Использование в приближенных расчетах сферы влияния вместо сферы действия должно привести в среднем к уменьшению ошибки расчета постоянной интеграла Якоби и, как следствие, уменьшению ошибок расчета других параметров орбиты КА.

Радиусы сфер действия, притяжения и влияния для некоторых пар небесных тел приведены в гл. 7.



Исследование космического пространства, начатое 4 октября 1957 года запуском в Советском Союзе первого искусственного спутника Земли, в последующие 25 лет ознаменовалось новыми крупными успехами. Были практически решены важнейшие задачи механики космического полета, в том числе связанные с достижением Луны и планет Солнечной системы. Так, в ночь с 13 на 14 сентября 1959 года советская космическая ракета достигла поверхности Луны. Впервые летательный аппарат, запущенный с Земли, оказался на поверхности другого небесного тела. В последующих полетах к Луне автоматических аппаратов была сфотографирована ее обратная сторона, получена панорама лунной поверхности, проведен анализ лунного грунта и доставлены образцы пород на Землю. Впервые нога человека ступила на поверхность Луны 20 июля 1969 года, когда Армстронг и Олдрин прилетели туда в космическом корабле «Аполлон-11».

Автоматические межпланетные станции и аппараты типа «Марс», «Венера», «Викинг», «Вояджер» и др. позволили получить уникальную информацию о планетах Солнечной системы и их естественных спутниках.

Полеты к Луне и планетам потребовали решения ряда сложных научных и технических проблем. Было необходимо создать не только новые летательные аппараты, но и совершенные методы расчета и управления для столь протяженных траекторий перелета. Большая работа была выполнена по уточнению теории движения некоторых небесных тел и их гравитационных полей. Наиболее детально задача полета к Луне и планетам исследована в работах [22, 23, 29, 35, 38, 55].

### § 7.1. Условия полета к Луне

Луна является естественным спутником Земли, на движение которого оказывают возмущающее воздействие Солнце и планеты. Поэтому с течением времени меняются положение плоскости орбиты Луны и элементы ее орбиты. Барицентр системы Земля — Луна расположен на расстоянии около 4660 км от центра Земли, т. е. ниже земной поверхности. Поэтому для задач механики космического полета в первом приближении можно не учитывать различие

между движением Луны относительно барицентра и наблюдаемым ее движением относительно Земли.

**7.1.1. Параметры орбиты Луны [1], [9].** Плоскость орбиты Луны наклонена к плоскости эклиптики (т. е. плоскости гелиоцентрической орбиты барицентра системы Земля — Луна) на угол  $i_l$ , величина которого меняется в диапазоне  $4^{\circ}59'—5^{\circ}19'$  с периодом 173 сут. Линия узлов лунной орбиты вращается в плоскости эклиптики навстречу движению Луны (по часовой стрелке, если смотреть с северного полюса) с периодом 18,61 года. Поскольку средний угол между плоскостями земного экватора и эклиптики составляет  $23^{\circ}27'$ , то угол между плоскостями земного экватора и лунной орбиты меняется в диапазоне  $18^{\circ}18'—28^{\circ}36'$ . Следовательно, компланарный перелет в плоскости орбиты Луны возможен всегда, если широта точки старта, расположенной на поверхности Земли, удовлетворяет условию  $|\varphi_0| \leq 18^{\circ}18'$ . Если широта точки старта находится в диапазоне  $18^{\circ}18' \leq |\varphi_0| \leq 28^{\circ}36'$ , то компланарный перелет возможен в ограниченные интервалы времени каждые 18,61 года. В случае  $|\varphi_0| > 28^{\circ}36'$  компланарный перелет в плоскости лунной орбиты невозможен.

Угол наклона плоскости экватора Луны к плоскости ее орбиты меняется от  $6^{\circ}31'$  до  $6^{\circ}51'$ . Геоцентрическая орбита Луны близка к круговой, ее средний эксцентриситет  $e = 0,05490$ . Среднее расстояние от Земли до Луны  $38\,4401 \pm 1$  км, минимальное расстояние 356 400 км, максимальное расстояние 406 700 км. Средняя скорость геоцентрического движения Луны 1,023 км/с.

*Звездным, или сидерическим, лунным месяцем* называют промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Луны через плоскость одного и того же круга широты (большого круга небесной сферы, проходящего через светило и полюсы эклиптики). Сидерический месяц составляет 27 сут 7 ч 43 мин 11,47 с, или 27,321661 средних солнечных суток (длительностью 24 ч). Период обращения Луны вокруг собственной оси равен сидерическому месяцу, поэтому Луна обращена к Земле всегда одной стороной. Вместе с тем имеют место небольшие «покачивания» (*либрация*) Луны относительно среднего положения. Различают *оптическую* (геометрическую) и *физическую* либрации. Оптическая либрация является зрительным эффектом вследствие относительного перемещения земного наблюдателя и Луны. Эта либрация обусловлена неравномерностью обращения Луны вокруг Земли, несовпадением плоскостей лунной орбиты и ее экватора, а также суточным перемещением земного наблюдателя. Физическая либрация Луны является отклонением ее реального вращения вокруг центра масс от вращения соответствующего сферического тела. Эта либрация связана с близостью формы Луны к трехосному эллипсоиду, наибольшая ось которого ориентирована вдоль среднего направления на Землю. Вследствие притяжения Земли создается пара сил, приложенная к Луне и качающая ее вокруг центра масс на угол поряд-

ка 2'. По своей сути физическая либрация Луны аналогична нутации Земли. Благодаря оптической и физической либрациям можно наблюдать до 60 % всей поверхности Луны.

В зависимости от взаимного расположения Земли, Луны и Солнца с земной поверхности можно видеть определенную часть освещенного диска Луны, или различные *фазы Луны*. Фаза новолуния имеет место, когда Луна находится между Солнцем и Землей, т. е. к Земле обращена темная часть Луны. Когда Земля находится между Солнцем и Луной, имеет место фаза полнолуния, т. е. с Земли виден полный освещенный диск Луны. *Синодическим* месяцем называют промежуток времени между двумя последовательными новолуниями. Средний синодический месяц составляет 29 сут 12 ч 44 мин 2,78 с, или 29,530588 средних суток. Он может меняться от 29,25 сут до 29,83 сут, т. е. на 13 ч вследствие эллиптичности лунной орбиты.

**7.1.2. Поле притяжения Луны.** В первом приближении фигуру Луны можно рассматривать как однородный шар радиусом  $r_{\text{л}} = 1738$  км и плотностью  $\rho_{\text{л}} = 3,343$  г/см<sup>3</sup>. Произведение постоянной притяжения на массу Луны  $\mu_{\text{л}} = 4902,72$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>. Ускорение силы тяжести на поверхности Луны  $g_{\text{л}} = 1,622$  м/с<sup>2</sup>.

В результате проведенного анализа движения близких искусственных спутников Луны (ИСЛ) было установлено, что в ряде областей Луны поле притяжения имеет значительные локальные отклонения от средней величины, причем эти отклонения существенно превосходят аномалии земного поля притяжения. Локальные отклонения были объяснены наличием *масконов* (от английского mass concentration), т. е. участков со значительно увеличенной плотностью лунной породы. По некоторым гипотезам, масконы — это большие скопления железо-никелевых пород в форме диска размером 50—200 км с глубиной залегания 25—125 км. При пролете маскона высота орбиты ИСЛ может снижаться на несколько десятков метров, а скорость при этом возрастает.

Установленные аномалии поля притяжения Луны усложняют задачу его математического описания, особенно для расчета низких орбит спутников с высотой порядка нескольких десятков километров, которые возможны из-за отсутствия атмосферы. В работе [2] рассматриваются три основные возможности математического описания гравитационного потенциала Луны:

- 1) разложение в ряд по сферическим функциям;
- 2) моделирование фигуры Луны конечным числом точечных масс, распределенных на эллипсоиде;
- 3) сочетание разложения в ряд с малым числом членов, который описывает регулярную составляющую поля притяжения, с совокупностью некоторого числа масконов для учета локальных возмущений.

Первый способ обладает всеми преимуществами компактного аналитического представления поля притяжения, однако для полу-

чения удовлетворительной аппроксимации поля вблизи масконов необходимо учитывать большое число членов ряда. Это приводит к увеличению затрат машинного времени на расчет траектории ИСЛ. Кроме того, всякое уточнение отдельных деталей поля требует пересмотра всех коэффициентов ряда.

Второй способ позволяет легко корректировать каждую точечную массу по мере накопления измерительной информации. При численном интегрировании уравнений движения такая модель обладает некоторым преимуществом относительно разложения в ряд по сферическим функциям. Недостатком модели является сингулярность потенциала вблизи каждой точечной массы. Кроме того, при создании аналитической теории движения ИСЛ точечное представление потенциала не дает преимуществ, а соответствующее разложение оказывается сложнее общепринятого.

Наиболее эффективным представляется третий способ, который позволяет учесть регулярную составляющую потенциала небольшим числом членов ряда, а возмущающие факторы описать ограниченным числом наиболее крупных масконов, представленных в виде точечных масс.

**7.1.3. Сферы действия, притяжения и влияния Луны.** Зная соотношение масс Луны и Земли

$$\tilde{m} = \frac{m_{\text{Л}}}{m_{\text{З}}} = \frac{1}{81,301}$$

и среднее расстояние между ними

$$r_{\text{ср}} = 384\,400 \text{ км},$$

можно вычислить по формуле (6.5.14) радиус сферы действия Луны

$$r_{\text{д}} = 66\,180 \text{ км}.$$

Далее по формулам (6.5.20), (6.5.21) определим радиус сферы притяжения Луны относительно Земли

$$r_{\text{пр}} = 43\,160 \text{ км},$$

а также расстояние между центрами Луны и сферы притяжения

$$x = 4790 \text{ км},$$

которое в 2,75 раз больше радиуса Луны. Центр сферы притяжения находится на продолжении прямой Земля — Луна, т. е. за Луной.

Наконец, по формуле (6.5.22) найдем радиус сферы влияния Луны

$$r_{\text{вл}} = 102\,040 \text{ км}.$$

**7.1.4. Точный расчет траектории полета к Луне.** Будем рассматривать траектории, которые совершают не более одного оборота относительно Земли в невращающейся геоцентрической системе коор-

динат. Вдоль такой траектории основными силами, действующими на КА, являются силы притяжения Земли и Луны как материальных точек. Второстепенными факторами оказываются притяжение Солнца, нецентральность гравитационного поля Земли и притяжение планет. Если пренебречь притяжением планет, то получающаяся при этом ошибка не превышает 1 км по координатам и 1 с по времени для траектории протяженностью порядка расстояния Земля — Луна [23].

Будем моделировать фигуру Земли эллипсоидом вращения. С помощью формул (1.3.20), (1.3.22), (1.3.25) можно записать, учитывая только вторую зональную гармонику, коэффициент которой на три порядка превосходит остальные коэффициенты разложения,

$$U_3 = \frac{\mu_3}{r} \left[ 1 + \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) \right]. \quad (7.1.1)$$

Здесь  $\mu_3$  — произведение постоянной притяжения на массу Земли (гравитационный параметр Земли),

$$J_2 = \frac{2C - (A + B)}{2MR_0^2}$$

— коэффициент второй зональной гармоники,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$  — осевые моменты инерции и масса Земли,  $R_0$  — экваториальный радиус Земли,  $r$  — геоцентрический радиус КА.

Масса Луны на два порядка меньше массы Земли и соответствующий коэффициент второй зональной гармоники Луны почти на два порядка меньше. Поэтому можно пренебречь влиянием нецентральности поля притяжения Луны на траекторию КА и описывать потенциал поля притяжения Луны формулой

$$U_L = \frac{\mu_L}{\rho}. \quad (7.1.2)$$

Здесь  $\mu_L$  — произведение постоянной притяжения на массу Луны (гравитационный параметр Луны),  $\rho$  — селеноцентрический радиус КА.

Для времен полета КА до 10 сут и приведенных ранее точностей можно при расчете геоцентрического движения Луны пренебречь влиянием несферичности Земли, возмущениями от планет, силами светового давления и электромагнитными силами. Однако следует учитывать возмущение геоцентрического движения Луны Солнцем.

Введем инерциальную прямоугольную систему координат  $O_3xyz$  с началом в центре масс Земли, осью  $O_3x$ , направленной в точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$ , осью  $O_3z$ , направленной по оси вращения Земли, и осью  $O_3y$ , дополняющей систему координат до правой (рис. 7.1). По аналогии с (6.1.20) запишем векторное уравнение

пассивного движения КА в этой системе координат:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \text{grad } U_3 + \mu_L \left( \frac{\mathbf{r}_L - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_L}{r_L^3} \right) + \mu_C \left( \frac{\mathbf{r}_C - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_C}{r_C^3} \right). \quad (7.1.3)$$

Здесь  $\mu_L$ ,  $\mu_C$  — гравитационные параметры Луны и Солнца;  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_L$ ,  $\mathbf{r}_C$  — радиусы-векторы КА, Луны и Солнца. Геоцентрические координаты Луны и Солнца можно определить с помощью Астрономического ежегодника или численным интегрированием уравнений

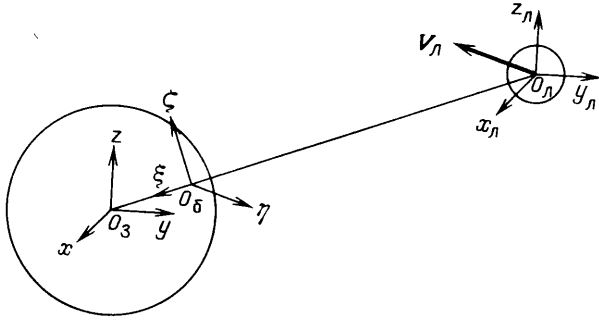


Рис. 7.1. Геоцентрическая, селеноцентрическая и барицентрическая системы координат

задачи трех тел (Земля, Луна, Солнце) в геоцентрической системе координат

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_L}{dt^2} = -\frac{\mu_3 + \mu_L}{r_L^3} \mathbf{r}_L + \mu_C \left( \frac{\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_L}{|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_L|^3} - \frac{\mathbf{r}_C}{r_C^3} \right), \quad (7.1.4)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = -\frac{\mu_C + \mu_3}{r_C^3} \mathbf{r}_C + \mu_L \left( \frac{\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_C}{|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_C|^3} - \frac{\mathbf{r}_L}{r_L^3} \right). \quad (7.1.5)$$

Подобно (7.1.3) запишем векторное уравнение пассивного движения КА в селеноцентрической системе координат  $O_L x_L y_L z_L$ , оси которой параллельны осям  $O_3 x y z$  (рис. 7.1):

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\frac{\mu_L}{\rho^3} \boldsymbol{\rho} + \mu_3 \left( \frac{\mathbf{r}_L}{r_L^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) + \mu_C \left( \frac{\mathbf{r}_C - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_L}{|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_L|^3} \right). \quad (7.1.6)$$

Здесь  $\boldsymbol{\rho}$  — селеноцентрический радиус-вектор КА. Геоцентрические и селеноцентрические радиусы-векторы связаны соотношениями

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_L, \quad \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_L}{dt}. \quad (7.1.7)$$

Если рассматривается активный участок полета, т. е. участок разгона или торможения с помощью ракетного двигателя, то в правые части уравнений (7.1.3) и (7.1.6) следует добавить ускорение от тяги двигателя  $\mathbf{P}/m$ , где  $\mathbf{P}$  — вектор тяги,  $m$  — масса КА. Обыч-

но активные участки расположены в начале и в конце траектории перелета, т. е. вблизи Земли и Луны. При расчете движения на активном участке вблизи Земли можно пренебречь возмущающим воздействием Луны и Солнца, а при расчете активного участка вблизи Луны — возмущающим воздействием Земли и Солнца.

Уравнения (7.1.3) и (7.1.6), описывающие соответственно геоцентрические и селеноцентрические пассивные траектории, преобразуются в уравнения ограниченной круговой задачи трех тел, если пренебречь нецентральностью поля Земли и возмущениями от Солнца, а орбиту Луны принять круговой. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu_3}{r^3}\mathbf{r} + \mu_{\text{Л}}\left(\frac{\mathbf{r}_{\text{Л}} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_{\text{Л}} - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}^3}\right) \quad (7.1.8)$$

и

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\frac{\mu_{\text{Л}}}{\rho^3}\boldsymbol{\rho} + \mu_3\left(\frac{\mathbf{r}_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right). \quad (7.1.9)$$

В некоторых случаях движение КА удобно рассматривать во вращающейся барицентрической системе координат  $O_6\xi\eta\zeta$ , начало которой совпадает с барицентром системы Земля — Луна, ось  $O_6\xi$  направлена к центру масс Земли, ось  $O_6\eta$  противоположна вектору орбитальной скорости Луны, а ось  $O_6\zeta$  дополняет систему координат до правой (рис. 7.1). По аналогии с (6.2.9) можно записать уравнения ограниченной круговой задачи трех тел для Земли, Луны и КА:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 2\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial J}{\partial \xi}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -2\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial J}{\partial \eta}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\partial J}{\partial \zeta}, \quad (7.1.10)$$

где

$$J = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{\mu_3}{r} + \frac{\mu_{\text{Л}}}{\rho} \quad (7.1.11)$$

— интеграл Якоби;  $r$ ,  $\rho$  — расстояние КА соответственно от Земли и от Луны. В качестве единицы длины принято среднее расстояние между Землей и Луной  $r_{\text{ср}} \approx 384\,400$  км. За единицу времени принята величина  $T_{\text{Л}}/2\pi$ , где  $T_{\text{Л}} = 27,321661$  сут — сидерический месяц. Напомним, что в этих единицах измерения с учетом третьего закона Кеплера имеем

$$\mu_3 + \mu_{\text{Л}} = 1. \quad (7.1.12)$$

Полученные уравнения движения можно интегрировать численно при заданных начальных условиях. Для активного участка шаг интегрирования составляет 1—2 с, а на пассивном участке не должен превышать 60 с, если требуемая точность вычисления координат равна 10 см [23].

**7.1.5. Приближенный расчет траектории полета к Луне.** В ряде случаев оказывается допустимым существенное упрощение задачи вычисления траектории полета к Луне. Это упрощение связано с

заменой истинной траектории коническим сечением, геоцентрическим вне сферы действия (или сферы влияния) Луны и селеноцентрическим внутри сферы действия (влияния) Луны. Тем самым пренебрегают возмущениями от нецентральности поля притяжения Земли, а также пренебрегают возмущениями от Луны и Солнца на участке полета вне сферы действия Луны. Внутри сферы действия Луны пренебрегают возмущениями от Земли и Солнца. Как показано в работе [22], такой подход допустим при расчете *траекторий сближения*, которые начинаются у Земли и на первом же витке геоцентрического движения входят в сферу действия Луны с существенно гиперболической селеноцентрической скоростью. Метод решения, связанный с представлением траектории перелета в виде соединенных на границе сферы действия Луны гео- и селеноцентрических конических сечений, когда учитывают только основные гравитационные ускорения на каждом участке и пренебрегают всякими возмущениями, принято называть *методом игнорирования возмущений* [23, 29].

На геоцентрическом участке по заданным начальным радиус-вектору  $\mathbf{r}_0$  и вектору скорости  $\mathbf{V}_0$  можно полностью определить все элементы орбиты, а затем параметры движения КА в любой точке траектории. На входе в сферу действия Луны пересчитывают радиус-вектор и вектор скорости КА из геоцентрической в селеноцентрическую систему координат по формулам (7.1.7).

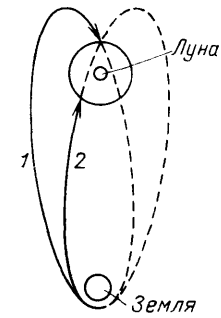


Рис. 7.2. Нависная (1) и настильная (2) траектории полета к Луне

В соответствии со знаком радиальной составляющей геоцентрической скорости  $V_r^{гц}$  на входе в сферу действия Луны различают *нависную* эллиптическую траекторию со входом на нисходящей ветви ( $V_r^{гц} < 0$ ) и *настильную* эллиптическую траекторию со входом на восходящей ветви ( $V_r^{гц} > 0$ ). Обе траектории показаны на рис. 7.2.

Для гиперболической и параболической геоцентрических траекторий вход в сферу действия Луны возможен только на восходящей ветви.

Внутри сферы действия Луны орбита также определяется заданными начальными условиями в точке входа. Если КА покидает сферу действия Луны, то в точке выхода следует выполнить обратный переход от селеноцентрического к геоцентрическому движению. Геоцентрические параметры в точке выхода будут полностью определять траекторию вне сферы действия Луны. Эта геоцентрическая траектория в общем случае может быть эллиптической, гиперболической или параболической.

Дальнейшее упрощение связано с пренебрежением не только возмущениями, но и размерами сферы действия Луны по сравнению с расстоянием Земля — Луна. Такой подход называют *методом то-*



*чечной сферы действия.* Суть его состоит в том, что рассматривают только два геоцентрических конических сечения, которые моделируют траекторию пролета мимо Луны, имеющую излом в точке соединения (точке «встречи» с Луной). Излом обусловлен тем, что по предположению в указанной точке происходит мгновенное изменение входного в сферу действия Луны вектора геоцентрической скорости на выходной из сферы действия Луны вектор геоцентрической скорости.

Метод точечной сферы действия существенно облегчает исследование множества траекторий, так как рассматриваются только векторы скорости в точках входа в сферу действия Луны и выхода из нее. При этом пренебрегают различием радиусов-векторов этих точек, т. е. совмещают их. Сведение задачи к анализу многообразия скоростей позволяет довольно просто построить векторы скорости в некоторых интересных случаях, а затем использовать их, например, для выбора минимальных потребных скоростей и др.

Метод точечной сферы действия удобен для приближенного расчета траекторий сближения КА с Луной, которые начинаются и кончаются вблизи Земли (*облетные траектории*). Он удобен также для расчета межпланетных траекторий, проходящих вблизи Луны с целью использования ее гравитационного поля для изменения вектора скорости КА (так называемый *пертурбационный маневр*).

## § 7.2. Полет в плоскости орбиты Луны

При рассмотрении плоской задачи перелета предполагается, что траектория КА совпадает с плоскостью геоцентрической орбиты Луны. Это упрощает анализ и позволяет выявить некоторые качественные особенности траектории, которые потом удастся распространить и на пространственный перелет.

**7.2.1. Задача попадания в Луну.** Оценим минимальную скорость, которую следует сообщить КА на круговой орбите ИСЗ высотой 200 км, чтобы он достигнул Луны. Рассмотрим сначала возможность использования в этих целях точки либрации  $L_1$ , расположенной на расстоянии  $\sim 58\,000$  км от центра масс Луны по отрезку прямой, который соединяет центры масс Луны и Земли. Для достижения точки  $L_1$  КА должен иметь во вращающейся барицентрической системе координат начальную скорость  $V^{(1)} = 10,849$  км/с, величина которой определяется с помощью интеграла Якоби. Возникает вопрос: можно ли сообщить КА скорость чуть больше  $V^{(1)}$ , чтобы он достиг на восходящей ветви траектории точки либрации  $L_1$ , пролетел с малой скоростью окрестность этой точки, а затем долетел до Луны? Численное интегрирование траекторий движения в рамках задачи трех тел показало, что в случае, когда вектор скорости  $V^{(1)}$  направлен по касательной к круговой орбите ИСЗ (т. е. геоцентрическая скорость максимальна), КА на первом витке возвращается к Земле, не долетев до точки либрации  $L_1$  около

30 000 км. За пять витков апогейное расстояние почти не увеличивается. Было установлено также, что при любом другом направлении вектора начальной скорости  $V^{(1)}$  траектория не достигает на первом витке точки либрации  $L_1$  [22]. Таким образом, с начальной барицентрической скоростью  $V^{(1)}$  КА на первом витке не долетает до точки либрации  $L_1$ . Следовательно, эта скорость мала для достижения на первом витке Луны с пролетом в окрестности точки либрации  $L_1$ . Даже при увеличенной начальной скорости, обеспечивающей достижение апогея на уровне точки либрации  $L_1$ , КА не будет иметь в окрестности этой точки малой скорости относительно

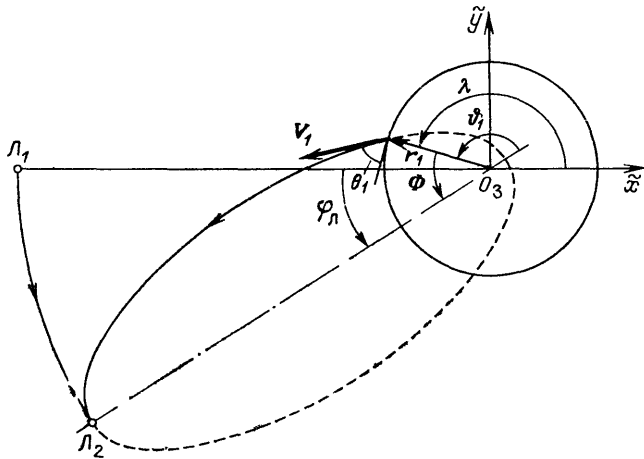


Рис. 7.3. Траектория попадания в Луну без учета ее притяжения

вращающейся барицентрической системы координат. Последнее объясняется большой разностью геоцентрических секториальных скоростей КА в апогее траектории и самой точки либрации  $L_1$ , расположенной на отрезке прямой Земля — Луна.

Численные расчеты позволили установить, что в невращающейся геоцентрической системе координат траектория перелета Земля — Луна очень близка к эллипсу с фокусом в центре Земли. Отсюда следует возможность вычисления приближенной величины минимальной начальной скорости, обеспечивающей достижение Луны, полностью пренебрегая притяжением Луны.

Введем новую невращающуюся геоцентрическую систему координат  $O_z \tilde{x} \tilde{y}$ . Ось  $O_z \tilde{x}$  направлена по продолжению прямой Луна — Земля в начальный момент времени, ось  $O_z \tilde{y}$  — против вектора орбитальной скорости Луны в начальный момент времени (рис. 7.3). Пусть задан радиус-вектор  $r_1$  начального положения КА и начальный угол наклона траектории к местному горизонту  $\theta_1$ . Тогда минимальная начальная скорость  $V_1$  будет определяться из условия

равенства апогея  $r_a$  траектории перелета величине расстояния до Луны  $r_L$ . Воспользовавшись формулой (3.1.24), которая позволяет вычислить высоту апоцентра при заданных начальных условиях, и учитывая равенство  $r_a = r_L$ , получим

$$r_L = \frac{r_1 v_1 \cos^2 \theta_1}{1 - \sqrt{1 - (2 - v_1) v_1 \cos^2 \theta_1}}, \quad (7.2.1)$$

где

$$v_1 = \frac{r_1 V_1^2}{\mu_3}. \quad (7.2.2)$$

Отсюда

$$v_1 = \frac{2 \left(1 - \frac{r_1}{r_L}\right)}{1 - \frac{r_1^2}{r_L^2} \cos^2 \theta_1} \quad \text{и} \quad V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_3 \left(1 - \frac{r_1}{r_L}\right)}{r_1 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_L^2} \cos^2 \theta_1\right)}}. \quad (7.2.3)$$

Величина  $V_1$  зависит от начального угла наклона траектории  $\theta_1$ . При  $\theta_1 = \pi/2$  (вертикальный старт) скорость оказывается наименьшей  $V_1 = 10,9200$  км/с, а при  $\theta_1 = 0^\circ$  (горизонтальный старт) — наибольшей  $V_1 = 10,9216$  км/с. Правда, разница между наибольшей и наименьшей величинами скорости составляет всего 1,6 м/с. Полученная величина минимальной скорости из условия достижения «непритягивающей» Луны в апогее траектории на  $\sim 70$  м/с превышает величину скорости, которая необходима для полета к точке либрации  $L_1$  с учетом притяжения Земли и Луны.

Хотя использованная модель достаточно груба (не учитывается притяжение Луны), найденная оценка минимальной начальной скорости практически не отличается от установленной численным интегрированием величины минимальной начальной скорости для попадания в центр Луны. Это еще раз подтверждает, что начальные условия для траектории попадания действительно можно вычислять, полностью пренебрегая влиянием Луны.

Заметим, что начальные скорости для достижения Луны близки к параболической скорости  $V_{\text{пар}}(r_1) = \sqrt{2\mu_3/r_1}$ . Поэтому часто вместо начальной скорости  $V_1$  рассматривают разницу между этой скоростью и местной параболической скоростью:  $\Delta V = V_1 - V_{\text{пар}}(r_1)$ . Тогда условие  $\Delta V < 0$  означает, что траектория перелета является эллиптической, в случае  $\Delta V = 0$  — параболической, а при  $\Delta V > 0$  — гиперболической.

Определение траектории достижения Луны в первом приближении включает следующую последовательность расчетов. Задавшись начальным углом наклона траектории  $\theta_1$ , можно по формуле (7.2.3) вычислить начальную скорость  $V_1$ . Затем по формуле (3.1.25) определяется угловая дальность траектории перелета при сближении

с Луной на восходящей ветви

$$\Phi = \operatorname{arctg} \frac{v_1 \operatorname{tg} \theta_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1 - v_1} \quad (0 < \Phi \leq \pi) \quad (7.2.4)$$

и истинная аномалия начальной точки траектории перелета

$$\phi_1 = \pi - \Phi. \quad (7.2.5)$$

Зная  $\phi_1$ , вычислим из соотношения (2.5.6) эксцентрискую аномалию начальной точки  $E_1$ . Поскольку встреча с Луной происходит в апогее траектории перелета, истинная аномалия точки встречи  $\phi_2 = \pi$  и эксцентриская аномалия  $E_2 = \pi$ .

С помощью соотношений (3.1.22), (3.1.23) вычислим параметр

$$p = r_1 v_1 \cos^2 \theta_1 \quad (7.2.6)$$

и эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 - (2 - v_1) v_1 \cos^2 \theta_1}, \quad (7.2.7)$$

а затем большую полуось

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (7.2.8)$$

траектории перелета. Время перелета определяется по формуле (2.5.8) с учетом  $E_2 = \pi$ :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_3}} (\pi - E_1 + e \sin E_1). \quad (7.2.9)$$

Теперь можно найти угловое движение Луны по орбите за время перелета КА

$$\varphi_{\text{л}} = \omega_{\text{л}} \Delta t, \quad (7.2.10)$$

где  $\omega_{\text{л}}$  — средняя угловая скорость орбитального движения Луны, а также угол  $\lambda$  между осью  $O_3x$  и начальным радиусом-вектором  $\mathbf{r}_1$  (рис. 7.3)

$$\lambda = \varphi_{\text{л}} + \phi_1. \quad (7.2.11)$$

Тем самым завершается построение геометрии траектории перелета. Заметим, что угол  $\varphi_{\text{л}}$  по существу определяет положение упрежденной точки встречи.

На рис. 7.4 показано время достижения орбиты Луны на восходящей ветви траектории в зависимости от разницы между начальной и местной параболической скоростью  $\Delta V$ . При  $\Delta V > 0$  величина начального угла наклона траектории  $\theta_1$  несущественно влияет на время перелета. Высота начальной орбиты также слабо сказывается на времени перелета. Например, в случае изменения высоты начальной орбиты от 200 км до 1000 км время перелета уменьшается только на 7 мин.

Если определение начальных параметров траектории попадания в Луну можно осуществлять, не учитывая ее притяжения, то

при анализе допустимых ошибок начальных параметров необходимо учитывать притяжение. Оценка влияния реального разброса начальных параметров на траекторию перелета показала, что задача

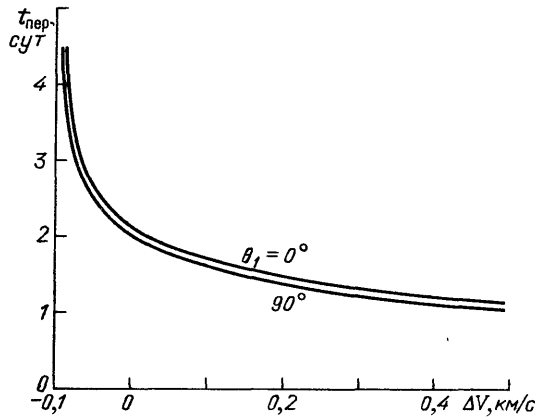


Рис. 7.4. Время полета до орбиты Луны при сближении на восходящей ветви траектории

попадания в Луну может быть решена без дополнительной коррекции траектории [22].

**7.2.2. Облет Луны с пологим возвращением в атмосферу Земли.** Предварительно обсудим общую задачу облета Луны в плоскости ее орбиты с возвращением к Земле. Для упрощения классификации будем рассматривать в качестве номинальных траекторий возвращения, проходящие через центр Земли. Поэтому после выхода из сферы действия Луны постоянная интеграла площадей в геоцентрическом движении должна равняться нулю.

Для анализа возможных траекторий облета Луны воспользуемся планом скоростей [22]. Пусть  $\mathbf{V}_2$  — вектор геоцентрической скорости КА на входе в сферу действия Луны и  $\alpha_2$  — угол вектора  $\mathbf{V}_2$  с прямой Земля — Луна ( $\alpha_2 > 0$  при положительной начальной геоцентрической секториальной скорости, как показано на рис. 7.5). Тогда можно перейти к селеноцентрической скорости в точке входа  $\mathbf{V}'_2 = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_L$  (штрихом условимся обозначать ниже селеноцентрические параметры движения). В соответствии с селеноцентрическим интегралом энергии, на выходе из сферы действия Луны величина скорости останется неизменной. Отсюда видно, что геометрическое место концов векторов селеноцентрических скоростей выхода есть окружность радиуса  $|\mathbf{V}'_2|$  с центром в точке  $O'$ .

Будем пренебрегать малым углом между геоцентрическим радиусом-вектором в точке выхода из сферы действия Луны и направлением Земля — Луна, что упрощает рассмотрение задачи, но вместе с тем не нарушает ее физической сущности. Тогда возможны две

траектории, проходящие через центр Земли, векторы геоцентрической скорости которых на выходе из сферы действия Луны направлены параллельно линии  $O_L O_3$ , т. е. к центру Земли. Одна из них отвечает восходящей ветви геоцентрической траектории после выхода из сферы действия Луны и имеет геоцентрическую скорость в

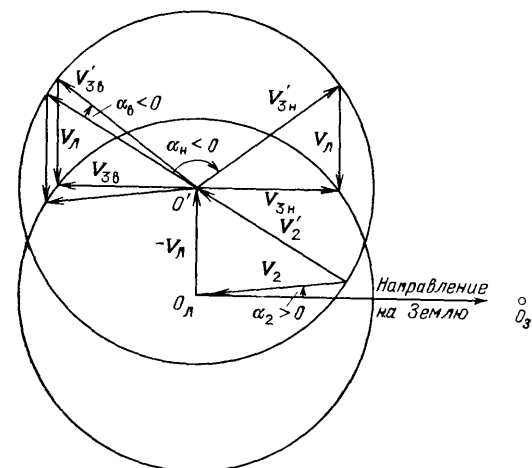


Рис. 7.5. Векторный план скоростей для траектории облета Луны с возвращением к центру Земли (при положительной начальной секториальной скорости)

точке выхода  $V_{3в}$ , а другая — нисходящей ветви и имеет скорость  $V_{3н}$ . Заметим, что восходящая траектория с возвращением к Земле возможна только в том случае, когда  $V_{3в} < V_{\text{пар}}(r_3)$ , т. е. геоцентрическая скорость в точке выхода меньше местной параболической скорости. Построенные на рис. 7.5 углы  $\alpha_в$  и  $\alpha_н$  определяют соответствующие повороты векторов выходной селеноцентрической скорости  $V'_{3в}$  и  $V'_{3н}$  относительно входной селеноцентрической скорости  $V_2$ . Видно, что  $\alpha_в < 0$  и  $\alpha_н < 0$ , т. е. облет Луны совершается по часовой стрелке с пересечением продолжения прямой Земля — Луна за невидимой стороной Луны.

Обозначим полученные траектории облета  $C_в^в$  и  $C_н^в$ . Здесь верхний индекс «в» характеризует восходящую ветвь геоцентрической траектории при входе в сферу действия Луны, а нижний индекс «в» или «н» — соответственно восходящую или нисходящую ветвь геоцентрической траектории после выхода из сферы действия Луны. Поскольку  $|\alpha_н| \gg |\alpha_в|$ , траектория  $C_н^в$  имеет существенно меньшую величину переселения, чем траектория  $C_в^в$ . Обе траектории показаны на рис. 7.6 в геоцентрической инерциальной системе координат  $O_3xy$  и во вращающейся системе координат  $O\xi\eta$ , начало которой совпадает с серединой отрезка прямой Земля — Луна, ось  $O\xi$  направлена к Земле, а ось  $O\eta$  — против орбитальной скорости Луны. Точка  $L_2$  на рис. 7.6 и последующих аналогичных рисунках определяет положение Луны в инерциальной системе координат в момент наибольшего сближения с ней КА.

Если начальная геоцентрическая секториальная скорость отрицательна (рис. 7.7), угол  $\alpha_н < 0$ , как и прежде, т. е.  $\alpha_2 < 0$ . Следовательно, облет Луны происходит по часовой стрелке, причем реализуется траектория типа  $C_н^в$  (рис. 7.8, а). Из плана скоростей, построенного на рис. 7.7, видно, что второй угол поворота вектора

скорости за время полета в сфере действия Луны  $\alpha_B > 0$ , и движение вблизи Луны происходит против часовой стрелки. При этом траектория КА пересекает линию Земля — Луна со стороны видимой части Луны, т. е. облет по существу не реализуется. Также

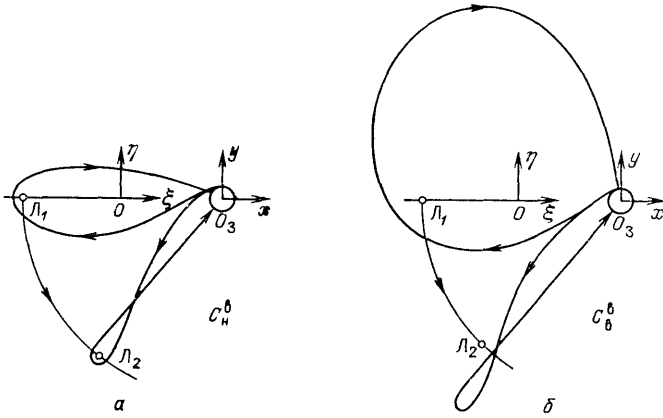


Рис. 7.6. Схемы областных траекторий с возвращением к центру Земли при положительной начальной секториальной скорости: а — вход в сферу действия Луны на восходящей ветви, выход на нисходящей; б — вход в сферу действия Луны на восходящей ветви, выход на восходящей

траектории можно называть *долетными*: они входят в сферу действия Луны, но не пересекают продолжения прямой Земля — Луна за невидимой стороной Луны. Класс долетных траекторий обозначим буквой *D*. В рассматриваемом случае долетная траектория входит в сферу действия Луны на восходящей ветви и выходит из нее также на восходящей ветви. Это — траектория класса  $D_B^B$  (рис. 7.8, б).

Рассмотрим теперь сближение с Луной на нисходящей ветви геоцентрической траектории. Планы скоростей для таких траекторий можно получить путем симметричного отображения относительно вертикальной прямой  $O_{II}O'$  рис 7.5 и 7.7. В случае положительной начальной секториальной скорости возможны долетные траектории классов  $D_B^H$  и  $D_H^H$  (рис. 7.9). При отрицательной начальной секториальной скорости возможна долетная траектория класса  $D_B^H$  и облетная траектория класса  $C_H^H$  (рис. 7.10).

Заметим, что при близком пролете Луны ветви геоцентрической траектории на входе в сферу ее действия и на выходе из сферы действия оказываются противоположными. Это — траектории класса  $C_H^B$ , когда вход происходит на восходящей ветви, а после выхода реализуется нисходящая ветвь, и класса *D* когда вход происходит на нисходящей ветви, а после выхода реализуется восходящая ветвь. При далеком пролете Луны ветви геоцентрической траекто-

рии до входа в сферу ее действия и после выхода из сферы действия не меняются. Это — траектории классов  $C_B^B, C_H^H, D_B^B, D_H^H$ . Полулученная система номинальных облетных и долетных траекторий при движении в плоскости Луны является полной [22].

Численное моделирование в рамках ограниченной задачи трех тел с учетом размеров Земли и Луны подтвердило существование

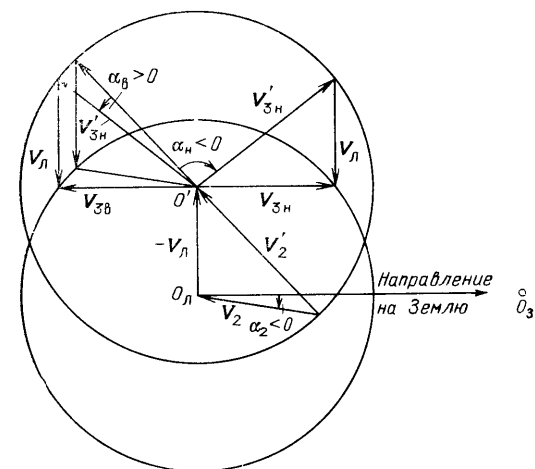


Рис. 7.7. Векторный план скоростей для траектории облета Луны с возвращением к центру Земли (при отрицательной начальной секториальной скорости)

всех классов траекторий, установленных с помощью метода точечных сфер действия. При достаточно больших начальных скоростях существуют только самые «быстрые» траектории класса  $C_H^B$  с временем полета 5–10 суток. По мере уменьшения начальной скорости до параболической появляются траектории класса  $C_B^B$  в случае положительной начальной секториальной скорости. Когда начальная скорость становится меньше параболической, оказываются возможными траектории классов  $D_H^H$  и  $D_B^B$  (при положительной начальной секториальной скорости) и траектории класса  $C_H^H$  (при отрицательной начальной секториальной скорости). Последними появляются траектории классов  $D_B^H$  и  $D_B^B$  при отрицательной начальной секториальной скорости. Заметим, что траектории класса  $D_B^H$  с временем полета 15–20 суток являются самыми «медленными».

По мере дальнейшего убывания начальной скорости происходит попарное сближение, затем слияние и исчезновение траекторий классов  $C_H^B$  и  $C_B^B, D_B^H$  и  $D_H^H$  (при положительной начальной секториальной скорости),  $C_H^H$  и  $C_H^B$  (при отрицательной начальной секториальной скорости). Последними исчезают траектории классов  $D_B^B$  и  $D_B^H$  при отрицательной начальной секториальной скорости.

Численный анализ чувствительности облетных и долетных траекторий к ошибкам начальных параметров движения показал, что влияние начальных ошибок тем больше, чем ближе проходит траектория к поверхности Луны. С увеличением наименьшего расстояния траектории от поверхности Луны требования по точности быстро снижаются.



Чтобы обеспечить пологий вход в атмосферу Земли, геоцентрическая траектория после выхода из сферы действия Луны должна иметь радиус перигея  $r_p$ , практически равный высоте условной границы атмосферы  $r_{ат}$ .

В этом случае можно также воспользоваться планом скоростей, чтобы найти все классы реализуемых траекторий. Оказалось, что

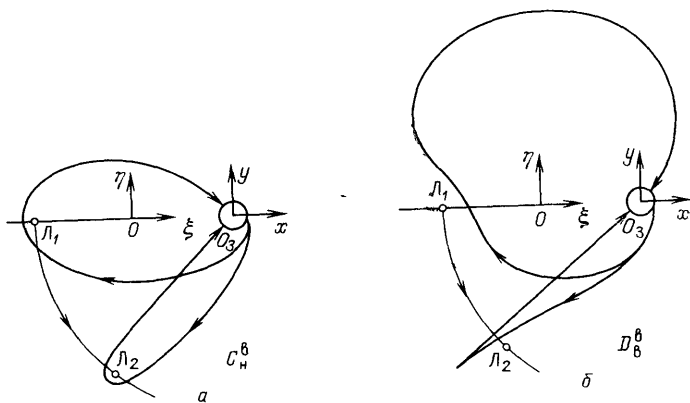


Рис. 7.8. Схемы облетной и долетной траекторий с возвращением к центру Земли при отрицательной начальной секториальной скорости: *a* — вход в сферу действия Луны на восходящей ветви, выход на нисходящей; *b* — вход в сферу действия Луны на восходящей ветви, выход на восходящей

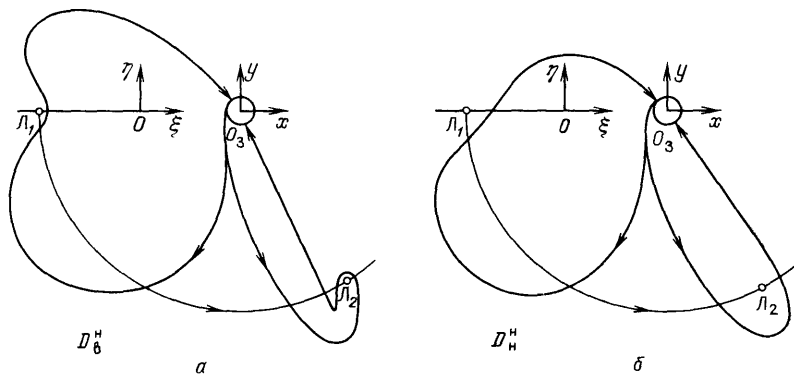


Рис. 7.9. Схемы долетных траекторий с возвращением к центру Земли при положительной начальной секториальной скорости: *a* — вход в сферу действия Луны на нисходящей ветви, выход на восходящей; *b* — вход в сферу действия Луны на нисходящей ветви, выход на нисходящей

в рамках одного класса облетных (или долетных) траекторий вход в атмосферу Земли может происходить по направлению ее вращения (положительная конечная секториальная скорость) или против вращения (отрицательная конечная секториальная скорость).

При положительной конечной секториальной скорости возможны облетные траектории классов  $C_{\text{н}}^{\text{в}}$  и  $C_{\text{н}}^{\text{н}}$ , а также долетные траектории классов  $D_{\text{в}}^{\text{н}}$  и  $D_{\text{в}}^{\text{в}}$ , все с пологим входом в атмосферу Земли. При отрицательной конечной секториальной скорости возможны

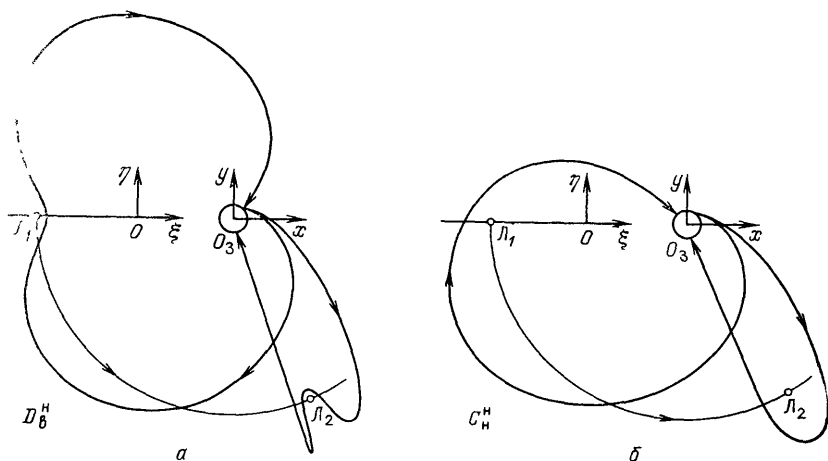


Рис. 7.10. Схемы долетной и облетной траекторий с возвращением к центру Земли при отрицательной начальной секториальной скорости: *a* — вход в сферу действия Луны на нисходящей ветви, выход на восходящей; *b* — вход в сферу действия Луны на нисходящей ветви, выход на нисходящей

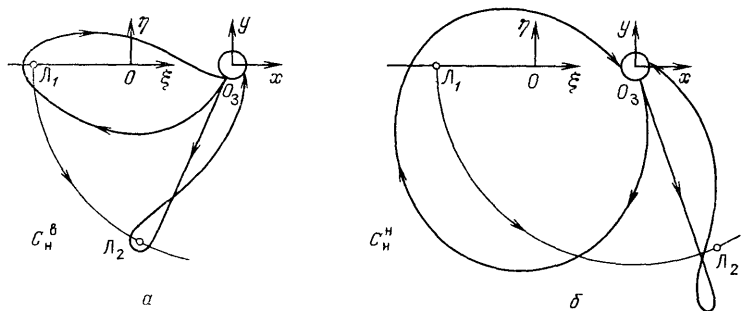


Рис. 7.11. Схемы облетных траекторий с пологим входом в атмосферу Земли при положительной конечной секториальной скорости: *a* — вход в сферу действия Луны на восходящей ветви, выход на нисходящей; *b* — вход в сферу действия Луны на нисходящей ветви, выход на нисходящей

облетные траектории классов  $C_{\text{в}}^{\text{в}}$  и  $C_{\text{н}}^{\text{в}}$ , а также долетные траектории классов  $D_{\text{в}}^{\text{н}}$  и  $D_{\text{н}}^{\text{н}}$ . На рис. 7.11 в качестве примеров построены траектории классов  $C_{\text{н}}^{\text{в}}$  и  $C_{\text{н}}^{\text{н}}$  с нулевой начальной и положительной конечной секториальной скоростью, а на рис. 7.12 — траектории

классов  $C_B^B$  и  $C_H^B$  также с нулевой начальной, но с отрицательной конечной секториальной скоростью.

**7.2.3. Разгон (торможение) с использованием поля притяжения Луны.** При близком облете Луны можно за счет пертурбационного (возмущающего) эффекта изменить параметры геоцентрической траектории КА.

Обсудим подробнее схему гравитационного маневра в поле притяжения Луны, имея в виду, что такой маневр вблизи любой планеты качественно ничем не отличается от рассматриваемого.

Селеноцентрическая скорость при входе в сферу действия Луны

$$V_{2\infty} = V_2 - V_{л2} \quad (7.2.12)$$

является по существу гиперболическим избытком скорости, поскольку любая траектория при перелете КА от Земли к Луне оказывается в сфере действия Луны гиперболической. Здесь  $V_2$  — геоцентрическая скорость КА в точке входа,  $V_{л2}$  — орбитальная скорость Луны в этот момент времени. Вектор  $V_{2\infty}$  направлен почти по входной

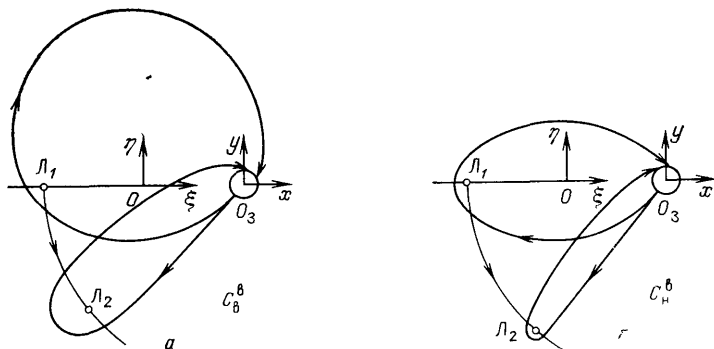


Рис. 7.12. Схемы облетных траекторий с пологим входом в атмосферу Земли при отрицательной конечной секториальной скорости:  $a$  — вход в сферу действия Луны на восходящей ветви, выход на восходящей;  $b$  — вход в сферу действия Луны на нисходящей ветви, выход на нисходящей

асимптоте гиперболической траектории (рис. 7.13). После пролета вблизи Луны КА на выходе из сферы действия будет иметь селеноцентрическую скорость  $V_{3\infty}$ , направление которой почти совпадает с выходной асимптотой гиперболической траектории, причем  $V_{3\infty} = V_{2\infty} = V_{\infty}$ . Полный угол поворота вектора скорости за время движения КА в сфере действия Луны вычислим с использованием формулы (2.4.34)

$$\vartheta_{\text{полн}} = 2 \arcsin \frac{1}{1 + \frac{r_{\text{п}} V_{\infty}^2}{\mu_{\text{л}}}}, \quad (7.2.13)$$

где  $r_{\pi}$  — радиус периселения,  $\mu_{\text{л}}$  — произведение постоянной притяжения на массу Луны.

Геоцентрическая скорость КА на выходе из сферы действия Луны вычисляется по формуле

$$V_3 = V_{\text{лз}} + V_{3\infty}. \quad (7.2.14)$$

Здесь  $V_{\text{лз}}$  — скорость Луны в момент выхода КА из ее сферы действия. С помощью соотношений (7.2.12) и (7.2.14) можно найти приращение геоцентрической скорости, которое получает КА за счет гравитационного разгона в поле притяжения Луны

$$\Delta V = V_3 - V_2,$$

или

$$\Delta V = V_{3\infty} - V_{2\infty} + V_{\text{лз}} - V_{\text{л2}}. \quad (7.2.15)$$

Предварительно рассмотрим модельную задачу, предполагая, что можно обеспечить любой требуемый вектор  $V_{2\infty}$  на входе в сферу действия Луны, направление которого позволяет получить нужную величину радиуса периселения  $r_{\pi}$ . При этом будем пренебрегать составляющей  $V_{\text{лз}}$  —  $V_{\text{л2}}$  приращения скорости КА, порождаемой

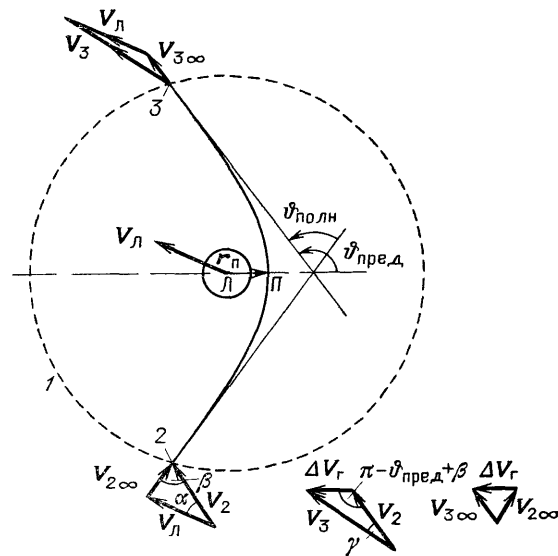


Рис 7.13 Схема гравитационного маневра при облете Луны: 1 — граница сферы действия, 2 — точка входа; 3 — точка выхода

орбитальным движением Луны за время полета КА в ее сфере действия. С учетом соотношения (7.2.13) и симметрии гиперболической траектории вычислим модуль разности векторов гиперболического избытка скорости КА в точках выхода и входа на сфере действия Луны:

$$\Delta V_r = 2V_{\infty} \sin \frac{\varphi_{\text{полн}}}{2} = \frac{2V_{\infty}}{1 + \frac{\mu_{\text{л}}}{r_{\pi} V_{\infty}^2}}. \quad (7.2.16)$$

Отсюда видно, что для увеличения  $\Delta V_r$  радиус периселения (а в общем случае — перицентра) следует выбирать по возможности меньшим, учитывая в то же время безопасность выполнения маневра. С увеличением гравитационного параметра  $\mu$  величина  $\Delta V_r$  также

возрастает. Остановимся подробнее на зависимости  $\Delta V_r$  от  $V_\infty$ . Согласно (7.2.16), при  $V_\infty \rightarrow 0$  и  $V_\infty \rightarrow \infty$  имеем  $\Delta V_r \rightarrow 0$ . Следовательно, должен существовать максимум зависимости  $\Delta V_r(V_\infty)$ . Продифференцируем (7.2.16) по  $V_\infty$

$$\frac{d\Delta V_r}{dV_\infty} = \frac{2 \left( 1 - \frac{r_\Pi V_\infty^2}{\mu_\Pi} \right)}{\left( 1 + \frac{r_\Pi V_\infty^2}{\mu_\Pi} \right)^2}$$

и, полагая  $d\Delta V_r/dV_\infty = 0$ , найдем оптимальную величину  $V_\infty^{\text{опт}}$ , при которой достигается максимум  $\Delta V_r$ :

$$V_\infty^{\text{опт}} = \sqrt{\frac{\mu_\Pi}{r_\Pi}} = V_{\text{кр}}(r_\Pi). \quad (7.2.17)$$

Подставляя теперь (7.2.17) в (7.2.16), получим

$$\max \Delta V_r = V_{\text{кр}}(r_\Pi). \quad (7.2.18)$$

Таким образом, в рассмотренной модельной задаче максимальное приращение скорости за счет гравитационного маневра реализуется в случае, когда гиперболический избыток скорости равен круговой скорости в периселении (перигентре) траектории. При этом величина максимального приращения скорости также равна круговой скорости в периселении [38]. В этом случае векторный треугольник скоростей  $V_{2\infty}$ ,  $V_{3\infty}$ ,  $\Delta V_r$  является равносторонним, а полный угол поворота вектора скорости КА в сфере действия Луны  $\phi_{\text{полн}} = \pi/3$ .

Предположим в качестве примера, что высота периселения пролетной гиперболической траектории КА от поверхности Луны составляет 100 км. Круговая скорость на этой высоте  $V_{\text{кр}} = 1650$  м/с. Тогда согласно (7.2.18) максимальное возможное приращение скорости КА за счет гравитационного маневра в сфере действия Луны равно указанной величине.

Оценим теперь погрешность модельной задачи из-за пренебрежения изменением вектора скорости орбитального движения Луны  $\Delta V_\Pi = V_{\Pi 3} - V_{\Pi 2}$  за время  $t_{23} = t_3 - t_2$  полета КА в сфере ее действия. Принимая орбиту Луны круговой, получим

$$\Delta V_\Pi = 2V_\Pi \sin \frac{\omega_\Pi t_{23}}{2},$$

где  $\omega_\Pi$  — угловая скорость орбитального движения Луны. Для представляющих практический интерес траекторий имеем  $t_{23} \approx 1$  сут, тогда  $\omega_\Pi t_{23} \approx 13^\circ$  и  $\Delta V_\Pi \approx 0,23 V_\Pi$ . Величина  $V_\Pi \approx 1$  км/с, следовательно,  $\Delta V_\Pi \approx 230$  м/с. Это составляет около 13 % от максимального возможного приращения скорости КА. Вариация  $\Delta V_\Pi$  в зависимости от  $V_{2\infty}$  может составить лишь часть от указанной величины.

Если учесть также, что согласно (7.2.15) приращения скорости  $\Delta V_r = V_{3\infty} - V_{2\infty}$  и  $\Delta V_l = V_{л3} - V_{л2}$  складывается векторно, то станет очевидным допустимость постановки рассмотренной модельной задачи.

Отнесем величины скоростей  $\Delta V_r$  и  $V_\infty$  к  $V_{кр}(r_n)$ , т. е. введем нормированные скорости

$$\Delta \tilde{V} = \frac{\Delta V_r}{V_{кр}(r_n)}, \quad \tilde{V}_\infty = \frac{V_\infty}{V_{кр}(r_n)},$$

тогда формулы (7.2.13) и (7.2.16) принимают вид

$$\theta_{полн} = 2 \arcsin \frac{1}{1 + \tilde{V}_\infty^2}, \quad (7.2.19)$$

$$\Delta \tilde{V} = \frac{2\tilde{V}_\infty}{1 + \tilde{V}_\infty^2}. \quad (7.2.20)$$

Полученные зависимости  $\theta_{полн}(\tilde{V}_\infty)$  и  $\Delta \tilde{V}(\tilde{V}_\infty)$  уже не связаны с конкретными характеристиками поля притяжения ( $\mu$ ) и траектории ( $r_n$ ), а поэтому являются универсальными. Они построены на рис. 7.14 для представляющего практический интерес диапазона изменения  $\tilde{V}_\infty$  и позволяют оценить величину приращения скорости, а также полный угол поворота вектора  $V_\infty$  при гравитационном маневре в поле притяжения любого небесного тела.

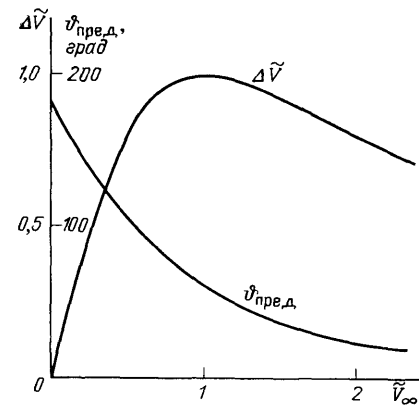


Рис. 7.14. Приращение скорости и полный угол поворота вектора скорости при гравитационном маневре

При оценке максимального пертурбационного приращения скорости предполагалось, что вектор гиперболического избытка скорости  $V_{2\infty}$  и точка входа в сферу действия Луны могут быть выбраны надлежащим образом. На самом деле они определяются временем старта с орбиты ИСЗ и траекторией перелета к Луне. Кроме того,

во многих задачах важно не максимальное пертурбационное приращение скорости КА, а получение требуемого вектора геоцентрической скорости КА на выходе из сферы действия Луны. Исследуем связь векторов геоцентрической скорости КА на входе в сферу действия Луны ( $V_2$ ) и на выходе из нее ( $V_3$ ).

Как и в предыдущей модельной задаче, будем пренебрегать разностью  $V_{л3} - V_{л2}$  векторов орбитальной скорости Луны за время полета КА в сфере ее действия. Тогда вектор  $V_{2\infty}$  согласно (7.2.12)

будет представлять собой разность между вектором  $V_2$  геоцентрической скорости КА в момент входа в сферу действия Луны и вектором  $V_L$  орбитальной скорости Луны.

Из векторного треугольника  $V_2, V_L, V_{2\infty}$  (рис. 7.13) вычислим величину нормированного гиперболического избытка скорости для селеноцентрической траектории:

$$\tilde{V}_{2\infty} = \sqrt{\tilde{V}_L^2 + \tilde{V}_2^2 - 2\tilde{V}_L\tilde{V}_2 \cos \alpha}, \quad (7.2.21)$$

где  $\tilde{V}_{2\infty} = V_{2\infty}/V_{кр}(r_n)$ ,  $\tilde{V}_L = V_L/V_{кр}(r_n)$ ,  $\tilde{V}_2 = V_2/V_{кр}(r_n)$ . Далее найдем

$$\beta = \arccos \frac{\tilde{V}_2^2 - \tilde{V}_L^2 + \tilde{V}_{2\infty}^2}{2\tilde{V}_2\tilde{V}_{2\infty}} \quad (7.2.22)$$

— угол между векторами  $V_{2\infty}$  и  $V_2$ , а также

$$\theta_{\text{пред}} = \arccos \left( -\frac{1}{1 + \tilde{V}_{2\infty}^2} \right) \quad (7.2.23)$$

— предельный угол гиперболической траектории. Теперь из векторного треугольника  $V_2, V_3, \Delta V_r$  (рис. 7.13) можно определить величину нормированной геоцентрической скорости КА при выходе из сферы действия Луны

$$\tilde{V}_3 = \sqrt{\tilde{V}_2^2 + \Delta\tilde{V}_r^2 + 2\tilde{V}_2\Delta\tilde{V}_r \cos(\theta_{\text{пред}} - \beta)} \quad (7.2.24)$$

и

$$\gamma = \arccos \frac{\tilde{V}_2^2 + \tilde{V}_3^2 - \Delta\tilde{V}_r^2}{2\tilde{V}_2\tilde{V}_3} \quad (7.2.25)$$

— угол между векторами  $V_2$  и  $V_3$ . Наконец, получим угол между векторами  $V_3$  и  $V_L$

$$\delta = |\gamma - \alpha|. \quad (7.2.26)$$

На рис. 7.15 построены нормированные геоцентрические скорости  $\tilde{V}_3$  при вылете КА из сферы действия Луны после гравитационного разгона. Видно, что максимальные величины  $\tilde{V}_3$  достигаются при  $\alpha = 80^\circ - 100^\circ$ , т. е. когда вектор геоцентрической скорости КА на входе в сферу действия почти перпендикулярен вектору орбитальной скорости Луны. Величины максимума зависимости  $\tilde{V}_3(\alpha)$  увеличиваются с увеличением нормированной скорости входа  $\tilde{V}_2$ . Расчеты показали, что при оптимальных значениях угла  $\alpha$  величина нормированного приращения скорости в процессе гравитационного разгона  $\Delta\tilde{V}_r = 0,95 - 1,0$  в зависимости от  $\tilde{V}_2$ , а угол  $\delta$  между векторами геоцентрической скорости КА при вылете из сферы действия и орбитальной скорости Луны близок к  $40^\circ$ .

Рассмотренные модельные задачи позволяют понять невыгоднейшие условия гравитационного маневра и оценить пределы возможного приращения скорости при таком маневре. Как уже

отмечалось, при полете КА от Земли к Луне величины геоцентрической скорости на входе в сферу действия  $V_2$  и угла  $\alpha$  определяются начальными условиями отправления от Земли.

Из результатов численного интегрирования траекторий движения следует, что при величинах скорости отлета от Земли  $V_1$ , близких к минимальным, можно получить  $\Delta V \approx 1,5$  км/с [23]. Эта величина хорошо согласуется с оценкой, полученной для модельной

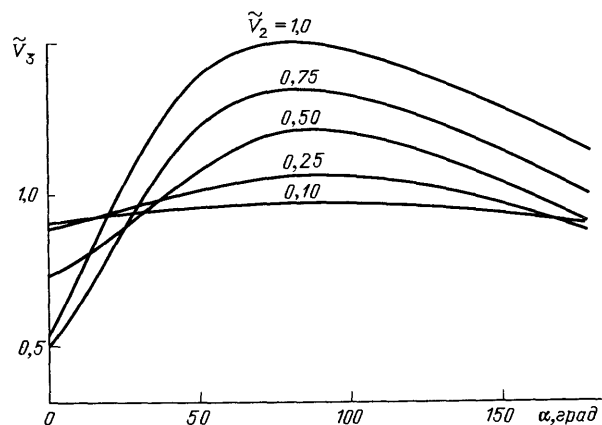


Рис. 7.15. Скорость вылета из сферы действия Луны после гравитационного разгона

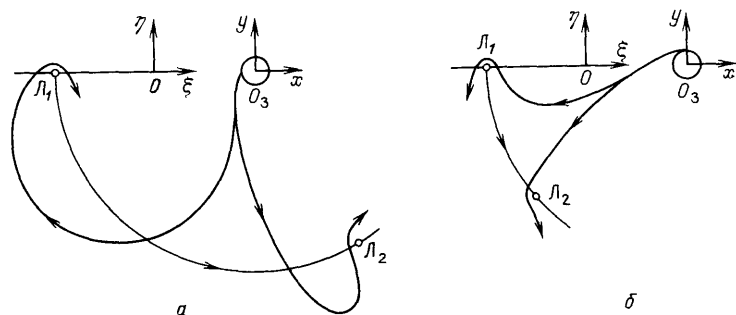


Рис. 7.16. Схемы траекторий максимального гравитационного разгона с помощью Луны: а — облет Луны по часовой стрелке; б — облет Луны против часовой стрелки

задачи ( $\Delta \tilde{V}_r^{\max} \approx 1$ ). Схема гравитационного маневра с использованием Луны показана на рис. 7.16.

После оптимального гравитационного разгона в сфере действия Луны КА имеет гиперболическую геоцентрическую скорость. Поэтому он неограниченно удаляется от Земли. С учетом орбитального движения Луны в течение месяца можно обеспечить приращение



скорости КА в любом направлении (в плоскости орбиты Луны) за счет выбора соответствующей даты отправления от Земли. Следовательно, гравитационный разгон в поле притяжения Луны можно использовать, например, для полета к планетам, поскольку плоскость орбиты Луны составляет небольшие углы с плоскостями орбит планет.

Вместе с тем необходимо отметить, что использование гравитационного поля Луны для дополнительного разгона КА представляет скорее теоретический, чем практический интерес. Действительно, максимальное возможное приращение скорости КА составляет около 1,5 км/с. Такую же разницу в скорости КА на расстоянии орбиты Луны можно получить, если повысить на несколько десятков метров в секунду его начальную скорость при старте с околоземной орбиты. По-видимому, такое увеличение скорости более оправдано, чем реализация близкого облета Луны [38].

### § 7.3. Пространственная траектория к Луне

Если широта точки старта  $|\varphi_0| > 28^\circ 36'$ , то нельзя реализовать компланарный перелет в плоскости орбиты Луны. При запуске с территории Советского Союза траектория перелета к Луне оказывается существенно пространственной. Возможны две различные схемы перелета: с непрерывным выведением и с использованием промежуточной околоземной орбиты. Первая схема применялась на раннем этапе исследования Луны, поскольку она предъявляет умеренные требования к конструктивным решениям и системе управления. Все ракетные ступени работают непрерывно, обеспечивая управляемый разгон до околопараболической скорости. Однако схема непрерывного выведения, как правило, приводит к увеличению потребных энергетических затрат для достижения Луны вследствие неблагоприятных реализуемых баллистических решений.

Вторая схема позволяет исключить ряд ошибок, которые накапливаются при выходе на промежуточную околоземную орбиту, и обеспечить благоприятные баллистические условия перелета, приблизив их к оптимальным. Но эта схема требует применения специальной орбитальной ступени и возможности управляемого старта с околоземной орбиты. В настоящее время вторая схема является общепринятой.

При старте с поверхности Земли возможна северная траектория перелета, когда пассивный участок проходит главным образом над северным полушарием, и южная траектория перелета, когда пассивный участок проходит над южным полушарием. В случае старта с территории Советского Союза обычно предпочтительнее оказывается северная траектория перелета, так как она обеспечивает лучшие условия для слежения.

Заметим, что деление траекторий на облетные и долетные теряет смысл для пространственных траекторий сближения КА с Луной

и последующим возвращением к Земле. Обычно такие пространственные траектории называют *облетными*. Облет Луны может происходить только в направлении, противоположном ее орбитальному движению. Действительно, геоцентрическая скорость Луны близка к местной круговой, а геоцентрическая скорость КА в апогее сильно вытянутой эллиптической орбиты оказывается существенно меньше. Поэтому КА не может «догнать» Луну.

**7.3.1. Траектория с непрерывным выведением.** Обсудим некоторые особенности построения пространственной траектории перелета к Луне по схеме непрерывного выведения [23]. Как уже отмечалось, угол  $i_{\text{л}}$  между плоскостями экватора и орбиты Луны меняется с периодом  $\sim 18,6$  лет от  $18^{\circ}18'$  до  $28^{\circ}36'$ . При расчете траектории перелета длительностью в несколько суток можно принять  $i_{\text{л}}$  постоянным. Если  $\varphi_1 > 0$  — широта точки старта, расположенной в Северном полушарии, то за счет суточного вращения Земли угол  $\Psi$  между радиусом-вектором точки старта  $\mathbf{r}_1$  и плоскостью орбиты Луны может меняться в диапазоне

$$\Psi_{\text{min}} \leq \Psi \leq \Psi_{\text{max}}, \quad (7.3.1)$$

где

$$\Psi_{\text{min}} = \varphi_1 - i_{\text{л}}, \quad \Psi_{\text{max}} = \varphi_1 + i_{\text{л}}. \quad (7.3.2)$$

Предположим, что в начальной точке  $M_1$  на высоте  $H_1$  КА имеет скорость  $V_1$ , направленную под углом  $\theta_1$  к местному горизонту (протяженность активного участка ракеты-носителя пока не учитывается). Если  $\theta_1 = 0$ , то начальная точка является перигеем, причем большая полуось траектории пассивного участка будет коллинеарна начальному радиусу-вектору  $\mathbf{r}_1$ . Минимальный угол между  $\mathbf{r}_1$  (или большой полуосью в рассматриваемом случае) и плоскостью орбиты Луны составляет  $\Psi_{\text{min}}$ . Как показывают расчеты [22], для сильно вытянутых эллиптических траекторий угол между большой полуосью и радиусом, равным расстоянию до Луны ( $r = r_{\text{л}}$ ), не превышает  $15^{\circ}$ . Поскольку в случае старта с территории Советского Союза  $\Psi_{\text{min}} > 18^{\circ}$ , то понятно, что при эллиптических начальных скоростях и  $\theta_1 = 0$  траектория КА будет пересекать плоскость орбиты Луны с недолетом, раньше того момента, когда текущий радиус станет равным расстоянию до Луны (рис. 7.17). Чтобы «поднять» восходящую ветвь траектории относительно плоскости движения Луны, необходимо увеличить начальный угол  $\theta_1$  или скорость  $V_1$ . Отсюда видно, что потребные энергетические затраты на пространственную траекторию перелета к Луне больше затрат на траекторию компланарного перелета в плоскости лунной орбиты.

При начальных параметрах движения  $H_1$ ,  $V_1$ ,  $\theta_1$  и положении точки старта, когда ее геоцентрический угол с плоскостью орбиты Луны равен минимальному ( $\Psi_{\text{min}}$ ), можно путем изменения азимута запуска построить всю совокупность получающихся траекторий. Эта совокупность траекторий образует некоторую поверхность, симметричную относительно начального радиуса-вектора  $\mathbf{r}_1$  и пересе-

кающуюся с плоскостью орбиты Луны по линии  $l$  (рис. 7.17). Если начальные условия не обеспечивают достижения Луны (без учета ее притяжения), то линия  $l$  целиком оказывается внутри орбиты Луны.

Предположим теперь, что величины  $V_1$  и  $\theta_1$  выбраны так (высота  $H_1$  фиксирована), что линия  $l$  касается орбиты Луны в точке  $M_2$ ,

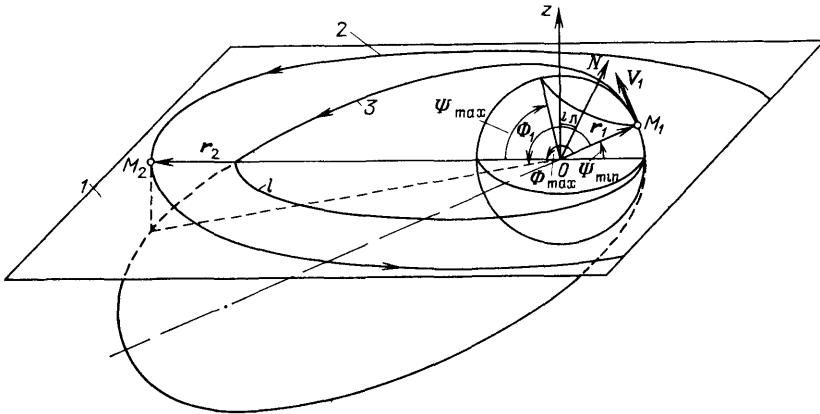


Рис. 7.17 Пространственная траектория перелета с горизонтальной начальной скоростью: 1 — плоскость орбиты Луны; 2 — орбита Луны; 3 — траектория КА

а угловая дальность перелета при  $r = r_2$  есть  $\Phi = \Phi_{\max} = \pi - \Psi_{\min}$ . В точке  $M_2$  траектория КА пересекает орбиту Луны, и сближение с Луной становится возможным, если в момент старта КА из точки  $M_1$  Луна отстоит от  $M_2$  на расстоянии, которое она проходит за время полета КА. Следовательно,  $M_2$  должна быть упрежденной точкой прицеливания.

По мере увеличения  $V_1$  и  $\theta_1$  на орбите Луны появляется *интервал достижимости* с серединой в точке  $M_2$ . Когда геоцентрический угол интервала достижимости станет равным  $13,2^\circ$ , т. е. суточному угловому перемещению Луны по орбите, появится возможность достигнуть Луны в любой сидерический месяц. Правда, запуск должен быть произведен в течение одних, заранее установленных суток. Если продолжать увеличивать  $V_1$  и  $\theta_1$ , то появится возможность уменьшить угловую дальность перелета до величины  $\Phi = \pi - \Psi_{\max}$ . При этом интервал достижимости станет равным  $2\pi$  и появится возможность запуска к Луне в любые сутки месяца.

При запуске с территории Советского Союза допустимые азимуты ограничены соображениями безопасного падения отработавших ускорителей ракеты-носителя. Отсюда — ограничение допустимых наклонов, и возникает задача построения траекторий перелета к Луне при заданном угле наклона плоскости движения к плоскости экватора. Обсудим подробнее эту задачу.

По заданной широте начальной точки  $\varphi_1$  и фиксированному наклону траектории перелета  $i$  однозначно определяется азимут вектора начальной скорости

$$A = \arcsin \frac{\cos i}{\cos \varphi_1}, \quad (7.3.3)$$

который отсчитывается от направления на север по часовой стрелке.

Пусть при заданном азимуте  $A_1$  начальные условия в конце активного участка ракеты-носителя  $H_1, V_1, \theta_1$  выбраны таким образом, что траектория пересекает орбиту Луны. Точку пересечения будем называть *точкой прицеливания* или *упрежденной точкой*. За счет выбора соответствующего времени старта  $t_1$  в течение суток можно обеспечить требуемое положение точки прицеливания на орбите Луны. Если по каким-то причинам запуск ракеты-носителя произвести не удалось, то следующий ближайший момент запуска наступит через  $\sim 25$  час из-за необходимости сместить точку прицеливания на  $\sim 13^\circ$  вперед, чтобы учесть суточное перемещение Луны по орбите. Если бы точка прицеливания осталась неизменной, то пришлось бы так изменить  $V_1$  и  $\theta_1$ , чтобы время перелета сократилось на одни сутки. Это связано с увеличением требований к энергетическим возможностям ракеты-носителя.

Высота конца активного участка и дальность активного участка мало меняются при варьировании управления на активном участке. Поэтому их влиянием при выборе оптимальной траектории перелета к Луне можно в первом приближении пренебречь. Наиболее существенными параметрами являются начальная скорость  $V_1$  и угол наклона траектории  $\theta_1$ . Как отмечалось ранее, задача достижения Луны при большой угловой дальности перелета предъявляет более низкие требования к энергетическим характеристикам ракеты-носителя, чем при малой угловой дальности. Дело в том, что при угловой дальности перелета, стремящейся к  $\pi$ , траектория приближается к энергетически оптимальной (типа Гоманна). Поэтому запуск из Северного полушария обычно проводится в то время, когда Луна находится вблизи своей нижней точки кульминации. Широта точки старта существенно влияет на потребные энергетические затраты для достижения Луны. По мере уменьшения широты точки старта до  $\varphi_1 \approx i_d$  затраты приближаются к величине, которая необходима для реализации компланарного перелета в плоскости орбиты Луны.

Если из геометрических соотношений установлена оптимальная схема перелета с максимальной возможной угловой дальностью  $\Phi_1$ , то задачу выбора оптимальных параметров  $V_1$  и  $\theta_1$  можно рассматривать, например, как обратную задачу баллистики. Тогда, используя формулу (3.3.4), можно записать

$$v_1 = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_1}{2}}{(1 + \tilde{r}_1) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_1}{2} + 2 \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \frac{\Phi_1}{2} + \tilde{r} - 1}, \quad (7.3.4)$$

где

$$v_1 = \left[ \frac{V_1}{V_{кр}(r_1)} \right]^2, \quad \tilde{r}_1 = \frac{r_1}{r_{Л}}$$

Соотношение (7.3.4) устанавливает зависимость  $v_1(\theta_1)$  при заданных угловой дальности  $\Phi_1$  и относительном радиусе  $\tilde{r}_1$ . Если на основе численного интегрирования уравнений движения ракеты-носителя на активном участке известны конечные зависимости  $v_1(\theta_1)$  при различной массе полезной нагрузки, то можно сопоставить потребные и располагаемые характеристики перелета. В итоге для каждой полезной нагрузки следует выбирать сочетание  $V_1$  и  $\theta_1$ , обеспечивающее достижение Луны (если решение существует). Оптимальные значения  $V_1^{opt}$  и  $\theta_1^{opt}$  соответствуют максимальной полезной нагрузке, выводимой на траекторию перелета к Луне. Зная начальные условия перелета, можно рассчитать характеристики траектории перелета, а затем из уравнения Кеплера соответственно для эллиптической (2.5.8), гиперболической (2.5.20) или параболической орбиты (2.5.26) вычислить время перелета  $T_{12}$  и найти упрежденную точку прицеливания для текущего положения Луны. Заметим, что установленные оптимальные условия перелета не всегда удается реализовать из-за существования дополнительных ограничений на траекторию.

В практических задачах механики космического полета важно обеспечить наблюдаемость процесса сближения КА с Луной. Наилучшие условия наблюдаемости достигаются в том случае, когда угол линии визирования КА относительно местного горизонта пункта слежения оказывается максимальным возможным. (Для определенности будем полагать, что пункт слежения находится на территории Советского Союза.) Чтобы угол сближения был максимальным возможным, долгота КА в момент сближения с Луной должна равняться долготе пункта слежения. Это накладывает вполне определенное ограничение на время перелета. Найдем ограничение.

В рассматриваемом приближении разность долгот точки прицеливания и восходящего узла траектории перелета, измеряемая в плоскости орбиты Луны, должна равняться  $\pi$  (рис. 7.18). Будем

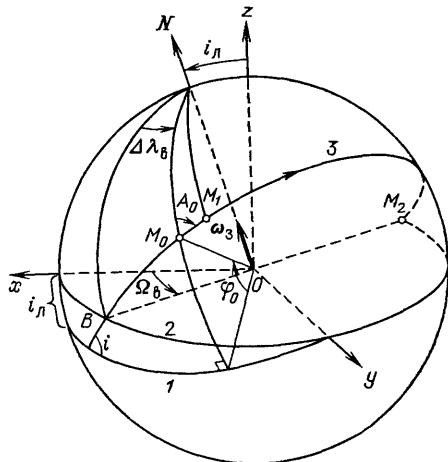


Рис. 7.18. Геометрия траектории перелета к Луне в проекции на геоцентрическую сферу: 1 — плоскость экватора Земли; 2 — плоскость орбиты Луны; 3 — плоскость траектории перелета

теперь учитывать протяженность активного участка  $M_0M_1$ , т. е. условимся различать точки старта  $M_0$  и начала пассивного полета  $M_1$ . Пусть  $\Delta\lambda_{\text{в}}$  — разность географических долгот точки старта  $M_0$  и восходящего узла В траектории перелета, измеренная в момент старта,  $\Delta\lambda_{\text{п}}$  — разность географических долгот точки старта и пункта слежения,  $\omega_3 T_a$  — угол поворота Земли за время активного участка  $T_a$ . Тогда угол  $\pi$  в сумме с разностью  $\Delta\lambda_{\text{п}} - (\Delta\lambda_{\text{в}} + \omega_3 T_a)$  должен с точностью до  $2\pi n$ , где  $n$  — целое число, равняться углу поворота, на который смещается за счет суточного вращения Земли пункт слежения, пока КА совершает пассивный перелет к Луне, т. е. за время  $T_{12}$ . В результате точка сближения КА с Луной окажется на меридиане пункта слежения в требуемый момент времени. Это условие можно записать уравнением

$$\pi + \Delta\lambda_{\text{п}} - (\Delta\lambda_{\text{в}} + \omega_3 T_a) = \omega_3 T_{12} - 2\pi n,$$

или

$$\pi + \Delta\lambda_{\text{п}} - \Delta\lambda_{\text{в}} = \omega_3 (T_a + T_{12}) - 2\pi n. \quad (7.3.5)$$

Отсюда

$$T_{12} = \frac{1}{\omega_3} [\pi (2n + 1) + \Delta\lambda_{\text{п}} - \Delta\lambda_{\text{в}}] - T_a. \quad (7.3.6)$$

Величина  $\Delta\lambda_{\text{в}}$  зависит от азимута запуска  $A_0$  и долготы  $\Omega_{\text{в}}$  восходящего узла траектории перелета, измеряемой в плоскости орбиты Луны. Если  $|\Omega_{\text{в}}| \leq \pi/6$ , что имеет наибольшее практическое значение, то при фиксированном азимуте запуска  $A_0$  величину угла  $\Delta\lambda_{\text{в}}$  можно в первом приближении считать постоянной. Ее численное значение определяется азимутом запуска [22]:

$$\Delta\lambda_{\text{в}} = \begin{cases} 0,349 \text{ рад } (20^\circ) & \text{при } A_0 = 35^\circ, \\ 0,698 \text{ рад } (40^\circ) & \text{при } A_0 = 65^\circ. \end{cases}$$

Предположим, что разность долгот точки старта и пункта слежения  $\Delta\lambda_{\text{п}} = \pi/6$ . Длительность активного участка  $T_a$  обычно имеет порядок 10 мин и ею можно пренебречь по сравнению с длительностью пассивного участка  $T_{12}$ , достигающей несколько суток. Тогда получим

$$T_{12} = n + 0,53 \text{ сут},$$

или

$$T_{12} = 23,93n + 12,63 \text{ ч},$$

при азимуте запуска  $A_0 = 35^\circ$  и

$$T_{12} = n + 0,47 \text{ сут},$$

или

$$T_{12} = 23,93n + 11,30 \text{ ч},$$

при азимуте запуска  $A_0 = 65^\circ$ . Видно, что при увеличении азимута запуска от  $35^\circ$  до  $65^\circ$  время перелета при одинаковом числе  $n$  уменьшается не более чем на 1,5 ч.

Число  $n$  может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, поскольку время перелета до орбиты Луны не превышает пяти суток. Энергетически оптимальная траектория обычно близка к параболической, когда  $n = 1$  или 2. В таких случаях длительность пассивного участка перелета к Луне составляет соответственно около 1,5 и 2,5 сут.

Оценка влияния неучтенных в приближенной методике второстепенных факторов показала следующее [23]. Притяжение Луны незначительно меняет начальные скорости перелета, вычисленные без учета этого притяжения. Например, минимальные требуемые скорости корректируются на величину около 0,2 м/с. Сама траектория, вычисленная без учета притяжения Луны из условия прохождения через ее центр, фактически смещается на величину порядка нескольких сотен километров при малых начальных скоростях и на величину порядка нескольких километров при околопараболических начальных скоростях. Хотя притяжение Луны довольно слабо изменяет форму траектории перелета, вычисленной без учета притяжения, однако время перелета уменьшается заметно. В результате сближение КС с Луной происходит в более ранней точке ее орбиты. Время перелета уменьшается по двум причинам. Во-первых, сокращается время полета в сфере действия Луны из-за учета ее притяжения. Во-вторых, встреча КА с Луной происходит не в ее центре, а на поверхности. В целом уменьшение времени перелета может составлять около 30 мин. Эксцентриситет орбиты Луны ( $e_{\text{л}} \approx 0,0549$ ) и возмущающее действие Солнца вызывают изменение расстояния и орбитальной угловой скорости Луны в зависимости от ее положения на орбите. Уменьшение расстояния до Луны приводит к уменьшению требуемой начальной скорости и сокращению времени перелета. Возрастание орбитальной угловой скорости Луны требует увеличения угла упреждения. Изменение времени перелета достигает нескольких часов и оказывается довольно стабильным для широкого диапазона начальных скоростей. Влияние расстояния до Луны на требуемые начальные скорости незначительно. Так, при изменении расстояния на 20 тыс. км начальная скорость меняется всего на 5 м/с.

Чтобы учесть эллиптичность орбиты Луны даже в приближенных расчетах, можно для рассматриваемого интервала дат перелета принять среднее расстояние Земля — Луна в качестве радиуса фиктивной круговой орбиты Луны, по которой она перемещается со скоростью, равной средней величине истинной трансверсальной составляющей скорости. Неучтенная радиальная составляющая скорости не превышает величины порядка  $e_{\text{л}}$  по сравнению с трансверсальной составляющей скорости.

Сжатие Земли вызывает отклонение поля притяжения от центрального. Влияние сжатия быстро убывает с увеличением геоцентрического радиуса КА. Расчеты показывают, что сжатие может изменить время перелета на 10—20 мин в зависимости от величины начальной скорости.

Возмущение от Солнца изменяет время перелета менее чем на 3 мин, и им можно пренебречь.

Рассмотренная методика является приближенной и обычно используется для качественных исследований. Вместе с тем она обеспечивает достаточно аккуратное вычисление количественных величин. Так, точность расчета углового сближения КА с Луной достигает  $1^\circ$ . Начальная скорость вычисляется с точностью до 1 м/с, а ее направление относительно местного горизонта — с точностью  $0,1^\circ$ . Полученные траектории часто используют в качестве начального приближения при численной итерационной процедуре расчета точной траектории перелета с помощью ЭВМ.

Схема непрерывного выведения на траекторию перелета к Луне, допускающая относительно простую техническую реализацию, была использована в 1959 году для запуска первых советских автоматических станций. С начальной скоростью, несколько превышающей параболическую, автоматическая станция «Луна-1» за 1,5 сут сблизилась с Луной до минимального расстояния 5—6 тыс. км. Автоматическая станция «Луна-2» за такое же время достигла поверхности Луны. Совершив перелет по эллиптической траектории за 2,5 сут, автоматическая станция «Луна-3» облетела Луну и сфотографировала ее обратную сторону.

Все последующие запуски космических аппаратов к Луне осуществлялись с использованием промежуточной околоземной орбиты.

**7.3.2. Полет к Луне с околоземной орбиты.** Чтобы обеспечить оптимальные условия перелета к Луне, т. е. близкую к  $\pi$  угловую дальность в любой день месяца, обычно используют промежуточную околоземную орбиту высотой около 200 км. КА с последней ступенью ракеты-носителя предварительно выводится на орбиту ИСЗ, плоскость которой проходит через заданную точку прицеливания. Затем с помощью последней ступени КА переводится на траекторию перелета к Луне. Разгон начинается в тот момент, когда угловая дальность от текущей точки на орбите до упрежденной точки близка к  $\pi$ . Если азимут задан то запуск через Северное полушарие возможен только один раз в сутки. При ограниченной протяженности второго активного участка старт с орбиты должен произойти в то время, когда КА перемещается в северном направлении. Если момент запуска через Северное полушарие пропущен, то примерно через полсуток появляется возможность запуска по тому же азимуту, но уже с перелетом через Южное полушарие. В этом случае старт с орбиты должен производиться в то время, когда КА перемещается в южном направлении. Таким образом, за счет изменения стартового полувитка возможно произвести два запуска к Луне в течение каждых суток, по северной и южной траекториям.

Расчет траектории попадания в Луну при использовании промежуточной околоземной орбиты очень близок аналогичной задаче при непрерывном выведении с поверхности Земли. Поэтому сразу перейдем к обсуждению задачи перелета с околоземной орбиты на орбиту искусственного спутника Луны (ИСЛ). Будем рассматривать



двухимпульсный перелет в предположении, что оба маневра выполняются в плоскости движения КА.

Если учесть эллиптичность орбиты Луны, то в зависимости от положения упрежденной точки будет меняться геоцентрический радиус Луны и ее орбитальная скорость  $V_{л}$ . Соответственно будет изменяться требуемое приращение скорости для перелета к Луне. На рис. 7.19 показано требуемое приращение скорости  $\Delta V_1$  от круговой до перигейной при старте с круговой орбиты ИСЗ высотой 200 км и различных длительностях перелета  $t_{12}$ . Эти зависимости построены на основе материалов работы [23], полученных численным интегрированием уравнений движения. Заметим, что разница

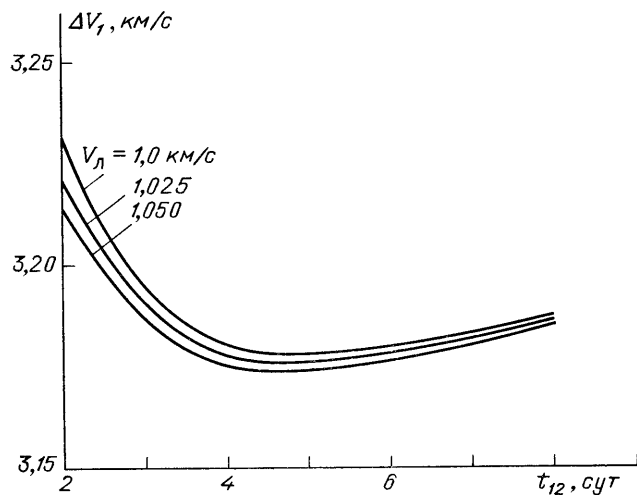


Рис. 7.19. Потребный импульс скорости для перелета с круговой орбиты ИСЗ высотой 200 км к Луне

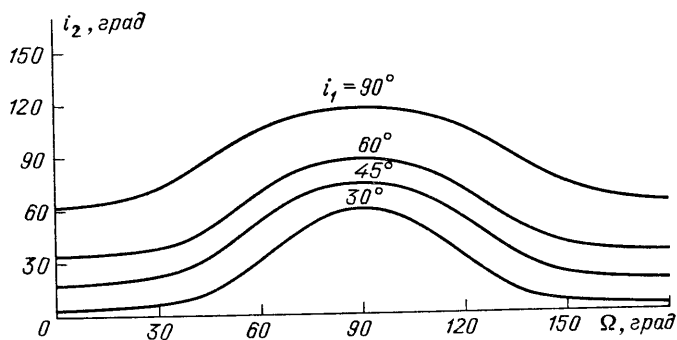


Рис. 7.20. Зависимость наклона  $i_2$  плоскости траектории перелета к плоскости орбиты Луны от долготы  $\Omega$  ее узла и наклона  $i_1$  к экватору

между потребными приращениями скорости для перелета в апогей и перигей орбиты Луны не превышает нескольких м/с. С погрешностью менее 5 м/с можно не учитывать зависимость  $\Delta V_1$  от наклонения  $i_1$  траектории перелета к плоскости экватора Земли. Минимальные величины  $\Delta V_1$  имеют место при временах перелета  $4,4 \text{ сут} < t_{12} < 4,9 \text{ сут}$ , когда апогей траектории перелета располагается на орбите Луны, т. е. реализуется маневр типа Гоманна. Наклонение  $i_1$  траектории перелета к плоскости экватора Земли существенно влияет на наклонение  $i_2$  полученной орбиты ИСЛ к плоскости движения Луны. Наклонение  $i_2$  зависит также от величины  $\Omega$  — долготы ближайшего к перигею узла траектории перелета, отсчитываемой в плоскости орбиты Луны. Отсчет  $\Omega$  ведется от восходящего узла орбиты Луны на экваторе Земли. Рис. 7.20 иллюстрирует зависимость  $i_2(i_1, \Omega)$ , вычисленную с помощью формул сферической тригонометрии. В работе [23] показано, что при заданных высотах круговых орбит ИСЗ и ИСЛ величина  $\Delta V_2$  для перевода КА на орбиту ИСЛ зависит от времени  $t_{12}$ , наклона траектории

$i_2$  к плоскости орбиты Луны и параметра  $V_L \sin \vartheta_L$ , где  $V_L$  — орбитальная скорость Луны,  $\vartheta_L$  — истинная аномалия Луны в момент перевода КА на орбиту ИСЛ.

На рис. 7.21 построены зависимости суммарного приращения скорости  $\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_2$  на перелет КА с круговой орбиты ИСЗ высотой 200 км на круговую орбиту ИСЛ высотой 100 км для двух положений Луны, в перигее и апогее, и двух значений  $i_1$  — угла наклона траектории перелета к плоскости экватора Земли [23]. Минимальные значения  $\Delta V_{\Sigma} = 4-4,2$  км/с имеют место при временах перелета  $t_{12} = 4-5$  сут. Если заданное время перелета  $t_{12} < 3,4$  сут, то целесообразнее совершать перелет к Луне в перигее ее орбиты. Если же заданное время перелета  $t_{12} > 3,7$  сут, то следует совершать перелет к Луне в апогее ее орбиты. Поскольку апогей и перигей

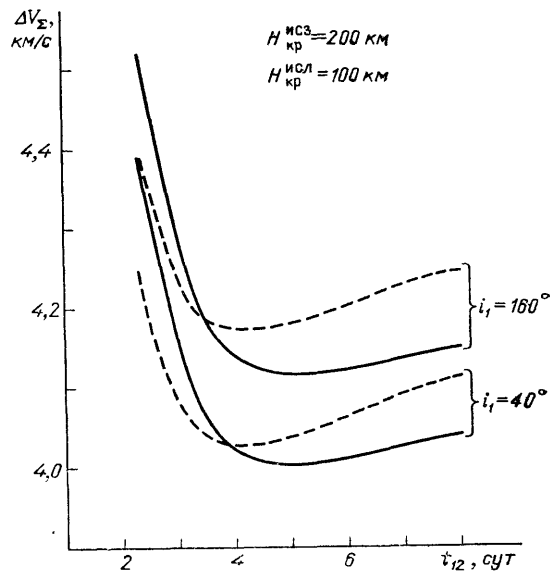


Рис. 7.21. Потребное приращение скорости для двухимпульсного перелета с околоземной орбиты на окололунную: сплошные линии — в апогее орбиты Луны; штриховые — в перигее орбиты Луны

перелета  $t_{12} = 4-5$  сут. Если заданное время перелета  $t_{12} < 3,4$  сут, то целесообразнее совершать перелет к Луне в перигее ее орбиты. Если же заданное время перелета  $t_{12} > 3,7$  сут, то следует совершать перелет к Луне в апогее ее орбиты. Поскольку апогей и перигей

определяют предельные положения Луны, построенные зависимости позволяют установить диапазоны изменения  $\Delta V_2$  при произвольном положении Луны на орбите для фиксированного времени перелета  $t_{12}$ .

Задача обратного перелета с орбиты ИСЛ к Земле отличается от задачи прямого перелета тем, что КА, как правило, не выводится на орбиту ИСЗ, а совершает пологий вход в атмосферу Земли с последующим управляемым движением в атмосфере и рассеиванием энергии за счет аэродинамического торможения. При возвращении к Земле важно обеспечить требуемую высоту *условного перигея* (которая реализовалась бы при отсутствии атмосферы), его географическую привязку по широте и долготе, а также наклонение геоцентрической траектории возвращения к плоскости экватора. Широта условного перигея обеспечивается главным образом за счет выбора склонения Луны в момент старта КА с орбиты ИСЛ. Необходимую долготу перигея можно обеспечить путем изменения времени перелета. Высоту условного перигея целесообразнее всего регулировать коррекцией скорости.

**7.3.3. Посадка на поверхность Луны.** Отличительной особенностью задачи посадки на поверхность Луны является отсутствие атмосферы. Поэтому для уменьшения относительной скорости до нуля необходимо включать двигательную установку КА. Различают прямую посадку с подлетной гиперболической траектории и посадку с орбиты ИСЛ. В свою очередь прямая посадка может осуществляться при вертикальном снижении и при наклонном снижении.

Расчеты показали, что независимо от наклона траектории перелета к плоскости движения Луны прямая вертикальная посадка возможна только в районе, ограниченном селеноцентрической широтой  $-11^\circ \leq \varphi' \leq 11,23^\circ$  и селеноцентрической долготой  $230^\circ \leq \lambda' \leq 350^\circ$  для времен перелета  $1 \text{ сут} \leq t_{12} \leq 10 \text{ сут}$ . Оптимальный маневр на траектории прямой вертикальной посадки состоит в одноразовом включении двигателя КА. Чтобы в конце непрерывного участка торможения двигателем скорость и высота над поверхностью Луны одновременно обратились в нуль, необходимо располагать двумя параметрами управления. Например, иметь возможность выбирать начальный момент включения двигателя и длительность его работы (за счет соответствующего запаса топлива). Такое сочетание позволяет реализовать посадку с наименьшими энергетическими затратами. В частности, для траектории перелета Земля — Луна длительностью  $\sim 3,3$  сут, когда начальная скорость в момент включения двигателя близка к 2550 м/с, величина потребной характеристической скорости КА составляет 2680—2850 м/с для начальных тяговооруженностей (отношение тяги к начальному весу КА на Земле)  $n_0 = 0,5—2,0$ . При этом высота включения двигателя достигает 500—130 км, время его работы 400—100 с (при скорости истечения газов из сопла двигателя  $W = 3000—4500$  м/с) [23]. На-

клонная прямая посадка реализуется в тех случаях, когда имеется остаточная боковая (горизонтальная) скорость.

Посадка с орбиты ИСЛ позволяет достигнуть любой точки поверхности Луны за счет выбора наклона орбиты и момента начала схода с орбиты. Для простоты ограничимся случаем круговой орбиты. Так как атмосфера отсутствует, можно использовать двухимпульсную схему посадки типа полуэллипса Гоманна. Апоселений траектории посадки совпадает с начальной круговой орбитой, а периселений теоретически должен располагаться непосредственно на поверхности Луны. Однако неровности лунного ландшафта и возможные ошибки исполнения маневра при первом и втором включении двигателя требуют увеличения высоты периселения до 10—15 км. Если учесть ограниченность величины тяги тормозного двигателя, то и в этом случае число его включений (активных участков) не превышает двух [53]. Когда начальная тяговооруженность мала, длительность каждого из двух активных участков может быть столь велика, что они сливаются в один.

При посадке с непрерывно работающим двигателем (один активный участок) наименьшие затраты характеристической скорости ( $\Delta V_x \approx 2150$  м/с) оказываются в случае круговых орбит ИСЛ высотой 50—60 км, а оптимальная начальная тяговооруженность  $n_0^{\text{opt}} = 0,25—0,35$  при скорости истечения газов из сопла двигателя  $W = 3000—4500$  м/с.

Как уже отмечалось, схема посадки с двумя активными участками энергетически выгоднее. Так, для низких окололунных орбит (высотой до 100 км) потребная величина характеристической скорости составляет  $\sim 1750$  м/с, если угловая дальность маневра находится в диапазоне  $50^\circ—180^\circ$ . Это примерно на 400 м/с меньше, чем при посадке с непрерывно работающим двигателем [23].

#### § 7.4. Полет к планетам

При расчете межпланетных траекторий КА обычно приходится учитывать притяжение нескольких небесных тел и ряд других эффектов. Длительность межпланетных перелетов исчисляется месяцами и даже годами. Часто оказывается, что точность определения орбиты планеты недостаточна для решения поставленной задачи. Например, для реализации посадки опускаемого аппарата в заданной области поверхности планеты. В таких случаях приходится одновременно решать задачи управления траекторией полета КА и уточнения элементов орбиты планеты на основе измерений, проводимых с Земли и с КА.

Численные методы из-за своей громоздкости и трудоемкости часто оказываются неприемлемыми для проведения большого объема расчетов, связанных с выбором оптимальной схемы перелета, дат отправления и прибытия, потребных энергетических затрат и др.

Для решения перечисленных задач обычно пользуются приближенными методами расчета, которые основаны на разбиении всей межпланетной траектории по участкам преимущественного гравитационного воздействия одного небесного тела. Обычно выделяют три участка межпланетной траектории. Геоцентрический участок расположен в пределах сферы действия Земли. Планетоцентрический участок расположен в сфере действия планеты назначения. Гелиоцентрический участок занимает большую часть межпланетной траектории, расположенную между сферами действия Земли и планеты назначения.

В табл. 7.1 приведены характеристики орбит планет Солнечной системы. Почти все планеты, кроме Меркурия и Плутона, имеют эллиптические орбиты, близкие к круговым. Плоскости их орбит

Т а б л и ц а 7 1

Характеристика орбит планет Солнечной системы [9]

Планета	Большая полуось, млн км	Эксцентриситет (на 1970 г)	Наклонение к эклиптике, град	Средняя орбитальная скорость, км/с	Сидерический период обращения, годы $a$ и сред сут $d$
Меркурий	57,91	0,20563	7,0043°	47,87	87 <sup>d</sup> , 970
Венера	108,21	0,00676	3,3944°	35,02	224 <sup>d</sup> , 701
Земля	149,60	0,01672	0	29,79	1 <sup>a</sup> 0 <sup>d</sup> , 006
Марс	227,94	0,09338	1,8498°	24,13	1 <sup>a</sup> 321 <sup>d</sup> , 730
Юпитер	778,34	0,04846	1,3045°	13,06	11 <sup>a</sup> 314 <sup>d</sup> , 84
Сатурн	1427,0	0,05563	2,893°	9,65	29 <sup>a</sup> 166 <sup>d</sup> , 98
Уран	2869,6	0,04725	0,7732°	6,80	84 <sup>a</sup> 7 <sup>d</sup> , 45
Нептун	4496,7	0,00859	1,7724°	5,43	164 <sup>a</sup> 280 <sup>d</sup> , 30
Плутон	5912	0,253	17,14°	4,7	247 <sup>a</sup> 255 <sup>d</sup> , 1

наклонены к плоскости эклиптики, в которой движется Земля, всего на несколько градусов. Поэтому в первом приближении, при рассмотрении модельных задач, часто принимают, что эти планеты обращаются вокруг Солнца по круговым орбитам в плоскости эклиптики.

Меркурий и Плутон, самая ближняя и самая дальняя планеты Солнечной системы, имеют наиболее вытянутые эллиптические орбиты с наибольшими наклонениями к плоскости эклиптики. Поэтому их обычно рассматривают особо.

Разбиение межпланетной траектории на три участка позволяет на каждом из них учитывать притяжение только одного небесного тела: Земли, Солнца, планеты назначения. Тем самым расчет всей траектории сводится к трем задачам двух тел, решениями которых

являются определяемые начальными условиями конические сечения, состыкованные на границах участков.

Следует отметить, что основная ошибка приближенной методики обычно порождается неточным знанием орбиты планеты, вокруг которой строится та или иная гравитационная сфера (действия, влияния и др.), а не выбором той или иной сферы. В табл. 7.2 приведены радиусы гравитационных сфер для планет Солнечной системы.

Т а б л и ц а 7 2

## Гравитационные сферы планет Солнечной системы

Планеты	Средний радиус сферы действия, млн км	Средний радиус сферы влияния, млн км	Сфера притяжения	
			средний радиус, млн км	смещение центра сферы, км
Меркурий	0,112	0,366	0,0236	10
Венера	0,616	1,677	0,169	265
Земля	0,925	2,482	0,259	450
Марс	0,577	1,798	0,130	74
Юпитер	48,21	88,14	24,073	743900
Сатурн	54,56	108,10	24,130	407900
Уран	51,78	116,27	18,977	125500
Нептун	86,81	192,74	32,358	232800
Плутон	15,167	47,14	3,413	1970

Полученная траектория, состоящая из трех состыкованных конических сечений, является хорошим начальным приближением для расчета численными методами точной траектории с учетом всей совокупности действующих факторов.

При выборе межпланетной траектории необходимо руководствоваться следующими основными требованиями. Энергетические затраты на выведение КА и на выполнение всех маневров, включая коррекцию траектории, должны быть минимальными. Время перелета следует по возможности сокращать. При сближении с планетой назначения надо обеспечить определенные условия для решения поставленной целевой задачи: фотографирования ее поверхности, посадки в заданном районе, проведения научных исследований и т. п. Поскольку перечисленные требования часто оказываются противоречивыми, то приходится отыскивать компромиссные решения на основе анализа большого числа траекторий.

**7.4.1. Классификация межпланетных траекторий.** В зависимости от решаемой задачи могут использоваться межпланетные траектории различных классов. Принято выделять следующие основные классы:

1. Траектория перелета к планете назначения без возвращения к Земле.
2. Траектории перелета к планете назначения с возвращением к Земле.
3. Траектории последовательного облета нескольких планет.

В свою очередь каждый класс траекторий может иметь несколько подклассов. Так, траектория полета к планете назначения без возвращения к Земле может проходить на заданном расстоянии от планеты, заканчиваться выведением КА на орбиту вокруг планеты или посадкой на ее поверхность. Пролетная траектория не требует дополнительных энергетических затрат, поэтому ее довольно просто реализовать. Вместе с тем пролет на ограниченном расстоянии от планеты позволяет провести ряд интересных научных исследований. При выведении КА на орбиту вокруг планеты назначения должен осуществляться активный маневр с включением двигательной установки. Обычно маневр выполняется вблизи перицентра пролетной гиперболической траектории. Если планета имеет атмосферу, можно реализовать комбинированный маневр аэродинамического торможения с последующим включением двигателя для выхода на заданную орбиту [87]. В некоторых случаях траектория перелета завершается посадкой всего КА или отделяемого спускаемого аппарата. Возможна прямая посадка с пролетной гиперболической траектории и посадка с околопланетной орбиты, на которую предварительно выводится КА. Скорость КА может быть погашена с помощью двигателя или за счет аэродинамического торможения, если у планеты есть атмосфера. В некоторых случаях для уменьшения массы тормозной системы оказывается целесообразным сочетание активного торможения (двигателем) с пассивным (аэродинамический экран или парашют).

Большой практический интерес представляет комбинированная схема полета, когда на участке сближения с планетой отделяется спускаемый аппарат, совершающий посадку на поверхность планеты и передающий полученную информацию через пролетный аппарат на Землю. Такая схема позволяет максимально уменьшить массу передающей радиотехнической аппаратуры на спускаемом аппарате и упростить его конструкцию. Пролетный аппарат, который используется для контроля посадки спускаемого аппарата и в качестве активного ретранслятора информации, имеет радиотехническую аппаратуру требуемой мощности для надежной связи с Землей.

Траектории полета к планете назначения с возвращением к Земле включают подклассы траекторий с задержкой у планеты (на ее поверхности или на орбите вокруг планеты) и без задержки у планеты. Если траектории без возвращения к Земле приемлемы только для доставки автоматических аппаратов, то траектории с возвращением к Земле, являясь обязательными для будущих пилотируемых полетов к планетам, могут использоваться и при запуске автоматических аппаратов. Например, в тех случаях, когда необходимо доставить на Землю образцы грунта или пробы атмосферы планеты. Возвращение КА к Земле желательно проводить в два этапа. Сначала КА выводится на промежуточную орбиту вокруг планеты, а затем стартует на гиперболическую траекторию возвращения.

Траектории последовательного облета нескольких планет можно разделить на подклассы траекторий с гравитационным маневром, активным маневром за счет включения двигательной установки и комбинированным активно-гравитационным маневром. Последний подкласс представляет наибольший практический интерес.

**7.4.2. Точный расчет траектории к планете.** Для вычисления точной межпланетной траектории необходимо воспользоваться численным интегрированием уравнений движения. Мерой точности вычисления параметров движения КА может служить точность измерений современных радиотехнических средств, т. е. ошибка численных расчетов не должна быть больше ошибки измерений. Чтобы обеспечить такую точность, необходимо правильно выбрать модель движения и метод численного интегрирования.

При расчете точной межпланетной траектории КА должны учитываться следующие факторы, которые оказывают воздействие на его движение:

1. Притяжение Земли, Солнца, Луны и планет Солнечной системы.

2. Излучение Солнца.

3. Эффекты общей теории относительности.

Заметим, что на начальном участке межпланетной траектории, когда КА находится еще достаточно близко к Земле, необходимо дополнительно учитывать влияние первой зональной гармоники в разложении потенциала притяжения Земли по сферическим функциям (см. п. 1.3). С увеличением расстояния КА от Земли ее поле притяжения можно принимать в виде центрального.

Запишем в векторной форме уравнения движения КА:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \sum_{i=0}^9 \mu_i \left( \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right) + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3. \quad (7.4.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — геоцентрический радиус-вектор КА;  $\mu$  — произведение постоянной притяжения на массу Земли;  $\mathbf{r}_i$  — геоцентрический радиус-вектор  $i$ -го небесного тела, где  $i=0$  — Солнце,  $i=1$  — Луна,  $i=2$  — Меркурий,  $i=3$  — Венера,  $i=4$  — Марс,  $i=5$  — Юпитер,  $i=6$  — Сатурн,  $i=7$  — Уран,  $i=8$  — Нептун,  $i=9$  — Плутон,  $\mathbf{F}_1$  — возмущающее ускорение движения КА из-за нецентральности поля притяжения Земли;  $\mathbf{F}_2$  — возмущающее ускорение движения КА вследствие солнечного излучения;  $\mathbf{F}_3$  — возмущающее ускорение, характеризующее влияние эффектов общей теории относительности на движение КА в пространстве, искривленном гравитационным влиянием Солнца.

Согласно (7.1.1) поправка от нецентральности поля притяжения Земли вычисляется по формуле

$$\mathbf{F}_1 = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} J_2 \left( \frac{R_g}{r} \right)^2 \left[ \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right], \quad (7.4.2)$$



где  $J_2$  — коэффициент при первой зональной гармонике в разложении потенциала поля притяжения Земли,  $R_0$  — экваториальный радиус Земли,  $\varphi$  — геоцентрическая широта,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор рассматриваемой точки.

Для учета возмущения от солнечного излучения можно использовать формулу вида

$$F_2 = \kappa \mu_0 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad (7.4.3)$$

где  $\kappa$  — коэффициент влияния солнечного излучения, зависящий от формы и массы КА.

Влияние эффектов общей теории относительности учитывается формулой [15]

$$F_3 = \mathbf{f}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \mathbf{f}(-\mathbf{r}_0), \quad (7.4.4)$$

где

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{c^2} \left[ 2(1 + \gamma) \frac{\mu_0}{r_s^4} \mathbf{r}_s - \gamma \frac{v_s^2}{r_s^3} \mathbf{r}_s + 2(1 + \gamma) \frac{\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{V}_s}{r_s^3} \mathbf{V}_s \right], \quad (7.4.5)$$

$\mathbf{r}_s$ ,  $\mathbf{V}_s$  — гелиоцентрические радиус-вектор и скорость рассматриваемого тела;  $c$  — скорость света;  $\gamma$  — параметр, характеризующий выбор системы координат поля Шварцшильда. Обычно используется стандартная система координат ( $\gamma = 1$ ). По существу релятивистская поправка  $F_3$  к геоцентрическому ускорению КА представляет собой разность релятивистских поправок к гелиоцентрическому ускорению КА, т. е.  $\mathbf{f}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ , и гелиоцентрическому ускорению Земли, т. е.  $\mathbf{f}(-\mathbf{r}_0)$ .

Необходимые для численного интегрирования уравнений движения КА координаты Луны и планет обычно вычисляются путем интерполяции с использованием заданных табличных значений. Такие таблицы строятся заблаговременно на основе одной из теорий Луны и планет.

Численное интегрирование уравнений движения КА может осуществляться практически любым методом (Рунге-Кутта, Адамса, Эйлера и др.). В целях экономии времени счета целесообразно интегрировать с переменным шагом при контроле заданной точности. В пределах сферы действия планеты шаг интегрирования обычно меняется в диапазоне 10 с — 30 мин, а на гелиоцентрическом участке его можно увеличивать до 1 час — 4 час.

**7.4.3. Приближенный расчет гелиоцентрического участка.** Как уже отмечалось, приближенный расчет межпланетной траектории связан с разбиением ее на геоцентрический, гелиоцентрический и планетоцентрический участки. Границы этих участков определяются сферами действия Земли и планеты назначения, причем сферы действия, а следовательно и границы, перемещаются в соответствии с орбитальным движением планет. Часто планетоцентрические уча-

стики называют *внутренней задачей* (движение внутри сферы действия), а гелиоцентрический участок — соответственно *внешней задачей* (движение вне сферы действия).

Основную часть межпланетной траектории занимает гелиоцентрический участок, на котором КА обычно перемещается по эллиптической траектории. При расчете гелиоцентрического участка можно пренебречь размерами сфер действия планет по сравнению с их расстоянием до Солнца, т. е. принять, что сферы действия планет стянуты в точки, которые совпадают с центрами масс планет. Действительно, радиусы сфер действия Марса, Земли и Венеры составляют меньше 1% от расстояния до Солнца. Однако, для планет-гигантов (Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун) радиусы сфер действия составляют уже несколько процентов от расстояния до Солнца. Поэтому в некоторых задачах для повышения точности приближенных расчетов приходится учитывать размеры сфер действия при

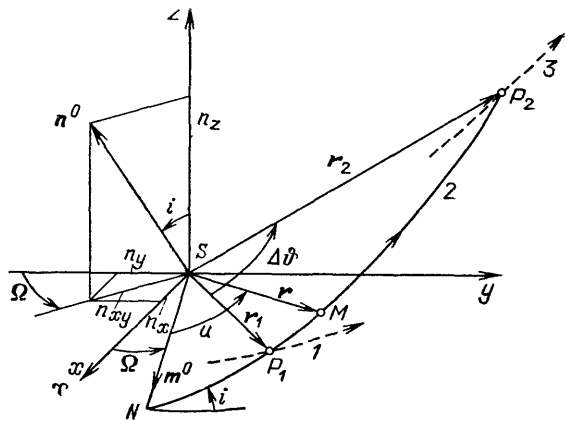


Рис. 7.22. Схема гелиоцентрического участка межпланетной траектории: 1 — орбита планеты отправления; 2 — траектория КА; 3 — орбита планеты назначения

рассмотрении гелиоцентрического участка. В таких случаях стыковка достигается путем совместного рассмотрения гелиоцентрического и планетоцентрического участков. Понятно, что при расчете гелиоцентрического участка притяжение планет не учитывается.

Введем гелиоцентрическую систему координат  $Sxyz$ , ось  $Sx$  которой направлена в точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$ , ось  $Sy$  расположена в плоскости эклиптики, а ось  $Sz$  направлена к северному полюсу эклиптики. Для большей общности получаемых результатов при рассмотрении гелиоцентрического участка будем полагать, что этот участок начинается не от Земли, а от планеты отправления  $P_1$ , и заканчивается у планеты назначения  $P_2$  (рис. 7.22).

Плоскости движения планет отправления и назначения могут не совпадать с плоскостью эклиптики. Движение КА будем предполагать происходящим в направлении движения планет Солнечной системы, т. е. против часовой стрелки, если смотреть с конца оси  $Sz$ .

Пусть в некоторый начальный момент времени  $t_1$  положение КА (и планеты отправления) определяются гелиоцентрическим радиусом-вектором  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ . Время перелета  $t_{12}$  считается заданным. Тогда можно вычислить момент времени  $t_2$  прибытия КА к планете назначения

$$t_2 = t_1 + t_{12}$$

и определить гелиоцентрический радиус-вектор планеты  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , отвечающий этому моменту времени и заданному положению планеты назначения  $P_2(t_2)$ . По существу  $\mathbf{r}_1$  фиксирует начальную точку гелиоцентрического участка межпланетной траектории КА (или в рассматриваемом приближении точку старта), а  $\mathbf{r}_2$  задает конечную точку гелиоцентрического участка (или в рассматриваемом приближении точку встречи с планетой назначения). В частном случае, когда планетой отправления является Земля, имеем  $z_1 = 0$ .

Плоскость гелиоцентрического участка траектории КА должна проходить через векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Используя результаты, приведенные в § 4.2, вычислим единичный вектор внешней нормали к плоскости перелета

$$\mathbf{n}^0 = (n_x, n_y, n_z) = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} \text{sign}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Здесь

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

и

$$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| = \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_2 z_1 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}.$$

При таком задании вектора  $\mathbf{n}^0$  выполняется условие  $n_z > 0$ , что отвечает перелету КА в направлении движения планет. Наклонение  $i$  плоскости перелета к плоскости эклиптики определяется соотношением

$$\cos i = n_z = \frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_2 z_1 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}}, \quad (7.4.6)$$

где  $0 \leq i \leq \pi/2$ , так как предполагается полет КА только в направлении движения планет.

Из геометрических построений на рис. 7.22 видно, что проекция вектора  $\mathbf{n}^0$  на плоскость эклиптики, т. е.  $n_{xy} = \sin i$ , образует с отрицательным направлением оси  $Sy$  угол  $\Omega$ , который равен долготе восходящего узла траектории перелета, измеряемой в плоскости

эклиптики. Тогда

$$\begin{aligned}\sin \Omega &= \frac{n_x}{n_{xy}} = \frac{(y_1 z_2 - y_2 z_1) \operatorname{sign}(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{\sin i \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_2 z_1 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}}, \\ \cos \Omega &= \frac{n_y}{n_{xy}} = \frac{(x_1 z_2 - x_2 z_1) \operatorname{sign}(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{\sin i \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_2 z_1 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}}\end{aligned}\quad (7.4.7)$$

$$(0 \leq \Omega \leq 2\pi).$$

Долгота восходящего узла  $\Omega$  и наклонение  $i$  гелиоцентрического участка траектории КА полностью определяют положение плоскости перелета в эклиптической системе координат.

Угловая дальность гелиоцентрического участка  $\Delta\theta$  определяется из соотношений

$$\begin{aligned}\cos \Delta\theta &= \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1 r_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \\ \sin \Delta\theta &= \frac{|r_1 \times r_2|}{r_1 r_2} \operatorname{sign}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \\ &= \frac{\sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_2 z_1 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \operatorname{sign}(x_1 y_2 - x_2 y_1)\end{aligned}\quad (7.4.8)$$

$$(0 < \Delta\theta < 2\pi).$$

Часто требуется вычислить аргумент широты  $u$  некоторой точки  $M$  гелиоцентрического участка траектории, радиус-вектор которой  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Предварительно введем единичный вектор восходящего узла  $\mathbf{m}^0 = (\cos \Omega, \sin \Omega, 0)$ . Затем вычислим

$$\begin{aligned}\mathbf{m}^0 \cdot \mathbf{r} &= x \cos \Omega + y \sin \Omega, \\ \mathbf{m}^0 \times \mathbf{r} &= (z \sin \Omega, -z \cos \Omega, y \cos \Omega - x \sin \Omega).\end{aligned}$$

Тогда для определения аргумента широты произвольной точки  $M$  имеем

$$\begin{aligned}\cos u &= \frac{\mathbf{m}^0 \cdot \mathbf{r}}{r} = \frac{x \cos \Omega + y \sin \Omega}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \sin u &= \frac{|\mathbf{m}^0 \times \mathbf{r}|}{r} \operatorname{sign}(y \cos \Omega - x \sin \Omega) = \\ &= \frac{\sqrt{(y \cos \Omega - x \sin \Omega)^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \operatorname{sign}(y \cos \Omega - x \sin \Omega)\end{aligned}\quad (7.4.9)$$

$$(0 \leq u \leq 2\pi).$$

Вычисление элементов орбиты в плоскости перелета сводится к решению задачи Ламберта, так как известны начальный  $r_1$  и конечный  $r_2$  радиусы, угловое расстояние между ними  $\Delta\phi$  и время перелета  $t_{12}$ . Известно также направление движения КА, которое совпадает с направлением гелиоцентрического движения планет. Более того, для представляющих интерес межпланетных траекторий КА гелиоцентрический участок является частью эллиптической орбиты. Все это упрощает решение полученной задачи Ламберта.

Наиболее часто для определения орбиты в фиксированной плоскости движения используются следующие элементы: величина большой полуоси  $a$ , эксцентриситет  $e$ , аргумент перицентра  $\omega$  и время пролета перицентра  $t_{\text{п}}$ . Покажем последовательность вычислений величины  $a$  на основе результатов, приведенных в § 4.2. Для рассматриваемого случая перелета по эллиптической траектории с угловой дальностью  $0 < \Delta\phi < 2\pi$  существует единственное решение уравнения Ламберта [58, 62].

Предварительно вычислим время  $t_{\text{гп}}$  перелета по граничной эллиптической орбите, для которой

$$a = \frac{r_1 + r_2 + s}{4}.$$

Длина хорды  $s$ , соединяющей начальную и конечную точки траектории, вычисляется по формуле (4.2.52):

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Используя соотношения (4.2.49) и (4.2.51), найдем

$$t_{\text{гп}} = \frac{(r_1 + r_2 + s)^{3/2}}{8\sqrt{\mu_0}} \left\{ \pi \mp \left[ 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{r_1 + r_2 + s}} - \sin \left( 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{r_1 + r_2 + s}} \right) \right] \right\}, \quad (7.4.10)$$

где

$$0 < \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{r_1 + r_2 + s}} < \frac{\pi}{2},$$

$\mu_0$  — произведение постоянной притяжения на массу Солнца. Здесь и в последующих формулах верхний знак «—» относится к случаю  $0 < \Delta\phi < \pi$ , а нижний знак «+» относится к случаю  $\pi < \Delta\phi < 2\pi$ .

Далее необходимо сравнить заданное время перелета  $t_{12}$  с  $t_{\text{гп}}$ . Если  $t_{12} < t_{\text{гп}}$ , то перелет совершается по эллиптической орбите первого рода, для которой величина большой полуоси

$$a > \frac{r_1 + r_2 + s}{4}$$

и вычисляется из трансцендентного уравнения

$$t_{12} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_0}} \left\{ 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}} - \sin \left( 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}} \right) \mp \right. \\ \left. \mp \left[ 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}} - \sin \left( 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}} \right) \right] \right\}, \quad (7.4.11)$$

где

$$0 < \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}} < \frac{\pi}{2}; \quad (7.4.12) \\ 0 < \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}} < \frac{\pi}{2}.$$

В случае  $t_{12} > t_{гp}$  перелет совершается по эллиптической орбите второго рода с большой полуосью

$$a > \frac{r_1 + r_2 + s}{4},$$

величина которой вычисляется из трансцендентного уравнения

$$t_{12} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_0}} \left\{ 2\pi - \left[ 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}} - \sin \left( 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}} \right) \right] \mp \right. \\ \left. \mp \left[ 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}} - \sin \left( 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}} \right) \right] \right\}. \quad (7.4.13)$$

При этом ограничения (7.4.12) сохраняются.

Если гелиоцентрический участок оказывается параболическим или гиперболическим, то следует воспользоваться соответствующими формулами § 4.2. Однако из-за ограниченных энергетических возможностей современных ракет-носителей такие траектории пока не представляют практического интереса.

Нетрудно показать, что в более общем случае, когда полная угловая дальность гелиоцентрического участка больше  $2\pi$ , причем КА в процессе перелета совершает больше  $n$ , но меньше  $n + 1$  витков, в правые части уравнений (7.4.10), (7.4.11), (7.4.13) следует добавить слагаемое  $2\pi n a^{3/2} / \sqrt{\mu_0}$ . Число возможных решений увеличивается до двух [62].

Полученные уравнения для большой полуоси  $a$  гелиоцентрического участка решаются численно с заданной точностью одним из итерационных способов.

На рис. 7.23 в качестве примера построены зависимости  $a(t_{12})$  гелиоцентрического участка межпланетной траектории Земля — Марс для случаев  $n = 0$  ( $0 < \Delta\theta < 2\pi$ ) и  $n = 1$  ( $2\pi < \Delta\theta < 4\pi$ ). Эти зависимости получены на основе материалов работы [35].

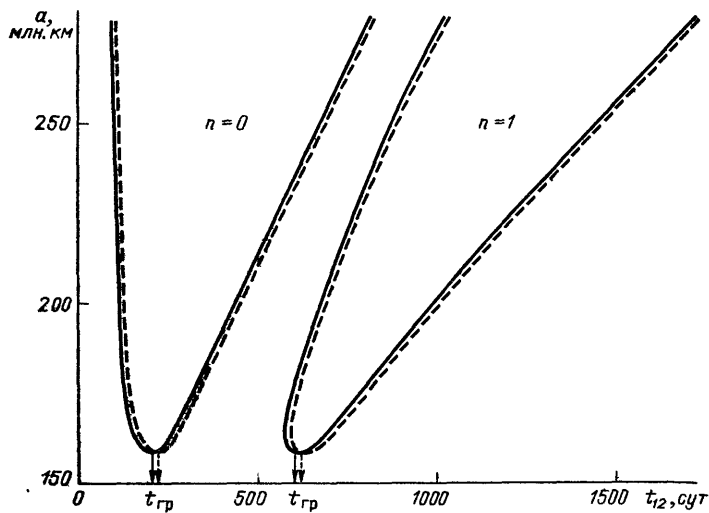


Рис. 7.23. Время и большая полуось гелиоцентрического участка траектории перелета Земля — Марс: сплошные линии  $0 < \Delta\vartheta < \pi$  при  $n = 0$  и  $2\pi < \Delta\vartheta < 3\pi$  при  $n = 1$ ; штриховые линии  $\pi < \Delta\vartheta < 2\pi$  при  $n = 0$  и  $3\pi < \Delta\vartheta < 4\pi$  при  $n = 1$

Для вычисления эксцентриситета гелиоцентрического участка  $e$  возведем левые и правые части уравнений (4.2.55) и (4.2.56) в квадрат и соответственно сложим. Тогда получим с учетом (4.2.57)

$$e = \sqrt{\left(\frac{2a - r_1 - r_2}{2a \cos \frac{\varepsilon - \delta}{2}}\right)^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{2a \sin \frac{\varepsilon - \delta}{2}}\right)^2}. \quad (7.4.14)$$

Здесь углы  $\varepsilon$  и  $\delta$  вычисляются по формулам

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}}.$$

Одновременно для эллиптической орбиты первого рода должны учитываться ограничения

$$0 < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ при } 0 < \Delta\vartheta < 2\pi$$

и

$$0 < \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ при } 0 < \Delta\vartheta < \pi,$$

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{\delta}{2} < 2\pi \text{ при } \pi < \Delta\vartheta < 2\pi.$$

Для эллиптической орбиты второго рода существуют ограничения

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\varepsilon}{2} < \pi \text{ при } 0 < \Delta\vartheta < 2\pi$$

и

$$0 < \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ при } 0 < \Delta\vartheta < \pi,$$

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{\delta}{2} < 2\pi \text{ при } \pi < \Delta\vartheta < 2\pi$$

(см. § 4.2).

Перейдем к вычислению аргумента перигелия  $\omega$ . Предварительно по известным величинам  $a$ ,  $e$  и разности эксцентрических аномалий  $E_2 - E_1 = \varepsilon - \delta$  определим с помощью соотношений (4.2.55), (4.2.56) сумму эксцентрических аномалий из условий

$$\sin \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{r_2 - r_1}{2ae \sin \frac{\varepsilon - \delta}{2}}, \quad \cos \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{2a - r_1 - r_2}{2ae \cos \frac{\varepsilon - \delta}{2}},$$

а затем величину  $E_1$  (или  $E_2$ ). Далее по формуле (2.5.6)

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta_i}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E_i}{2} \quad (i = 1, 2)$$

найдем углы  $\vartheta_i$ . Поскольку аргумент широты известен из уравнений (7.4.9), то аргумент перигелия можно вычислить по формуле

$$\omega = u_i - \vartheta_i \quad (i = 1, 2). \quad (7.4.15)$$

Наконец, из уравнения (2.5.8) определим время пролета перигелия

$$t_{\pi} = t_i - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_0}} (E_i - e \sin E_i) \quad (i = 1, 2). \quad (7.4.16)$$

Тем самым завершено вычисление шести элементов орбиты  $\Omega$ ,  $i$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $t_{\pi}$ , которые полностью определяют в эклиптической системе координат гелиоцентрический участок межпланетной траектории КА.

Оказывается полезным дополнительно вычислить параметр гелиоцентрической орбиты

$$p = a(1 - e^2),$$

затем по формулам (2.3.5), (2.3.7) величины радиальной и трансверсальной составляющих скорости в начальной и конечной точках гелиоцентрического участка

$$V_{ri} = \sqrt{\frac{\mu_0}{p}} e \sin \vartheta_i, \quad V_{ni} = \sqrt{\frac{\mu_0}{p}} (1 + e \cos \vartheta_i), \quad (7.4.17)$$

наконец, по формуле (2.3.8) найти величину скорости в указанных точках

$$V_i = \sqrt{\frac{\mu_0}{p} (1 + 2e \cos \vartheta_i + e^2)}.$$



Соотношения (7.4.17), по существу, определяют радиальную и трансверсальную составляющие скорости КА в квазиорбитальной системе координат  $S\xi\eta\zeta$ , начало которой совпадает с центром масс Солнца, а координатная плоскость  $S\xi\eta$  совмещена с плоскостью движения КА. При этом ось  $S\eta$  направлена по текущему радиусу-вектору КА, ось  $S\xi$  — против трансверсальной составляющей скорости, а ось  $S\zeta$  дополняет систему до правой. По оси  $S\zeta$  направлен единичный вектор внешней нормали к плоскости движения КА. Переход от эллиптической к квазиорбитальной системе координат осуществляется поворотами на углы  $\Omega$ ,  $i$ ,  $u - \pi/2$  (рис. 7.24). Отвечающая этому переходу матрица имеет вид

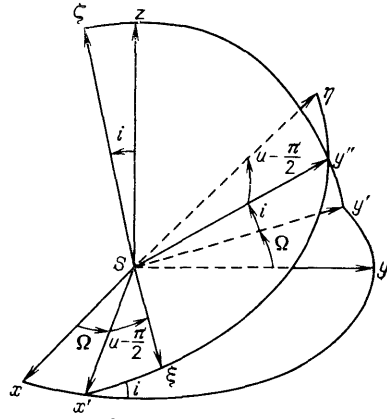


Рис. 7.24. Переход от эллиптической к гелиоцентрической квазиорбитальной системе координат

$$M = \begin{vmatrix} \sin u \cos \Omega + \cos i \cos u \sin \Omega & \sin u \sin \Omega - \cos i \cos u \cos \Omega & -\sin i \cos u \\ \cos u \cos \Omega - \cos i \sin u \sin \Omega & \cos u \sin \Omega + \cos i \sin u \cos \Omega & \sin i \sin u \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{vmatrix}. \quad (7.4.18)$$

Если известны радиус-вектор

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$$

и вектор скорости

$$\mathbf{V}' = \begin{bmatrix} -V_n \\ V_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

в квазиорбитальной гелиоцентрической системе координат, то при переходе к эллиптической системе координат получим

$$\mathbf{r} = M^{-1}\mathbf{r}', \quad \mathbf{V} = M^{-1}\mathbf{V}',$$

где

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} r_x &= r(\cos u \cos \Omega - \cos i \sin u \sin \Omega), \\ r_y &= r(\cos u \sin \Omega + \cos i \sin u \cos \Omega), \\ r_z &= r \sin i \sin u, \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

$$\begin{aligned}
 V_x &= -V_n(\sin u \cos \Omega + \cos i \cos u \sin \Omega) + \\
 &\quad + V_r(\cos u \cos \Omega - \cos i \sin u \sin \Omega), \\
 V_y &= -V_n(\sin u \sin \Omega - \cos i \cos u \cos \Omega) + \\
 &\quad + V_r(\cos u \sin \Omega + \cos i \sin u \cos \Omega), \\
 V_z &= V_n \sin i \cos u + V_r \sin i \sin u.
 \end{aligned} \tag{7.4.20}$$

Как уже отмечалось, гелиоцентрический участок межпланетной траектории является самым протяженным. Этот участок, по существу, определяет основные требования к выбору всей межпланетной траектории, в том числе к выбору оптимальной даты старта и потребной энергии для перевода КА с околоземной орбиты на межпланетную траекторию. Анализ гелиоцентрического участка с учетом движения планет относительно Солнца позволяет установить цикличность оптимальных дат старта и т. п.

**7.4.4. Планетоцентрические участки траектории.** Рассмотрим внутреннюю задачу, т. е. движение КА в сферах действия планет. Для краткости условимся называть планету отправления Землей и соответствующий участок геоцентрическим, а планету назначения — просто планетой и участок планетоцентрическим.

После расчета гелиоцентрического участка межпланетной траектории известны векторы скорости КА в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , а именно  $V_1$  и  $V_2$ , заданные своими составляющими (7.4.20) в эллиптической системе координат. В этой же системе будем полагать заданными векторы скорости Земли  $V_{p1}(t_1)$  в момент начала гелиоцентрического участка КА и планеты  $V_{p2}(t_2)$  в момент окончания указанного участка. Тогда можно вычислить векторы скорости КА относительно Земли и относительно планеты:

$$V_{\text{отн } 1} = V_1 - V_{p1}(t_1), \quad V_{\text{отн } 2} = V_2 - V_{p2}(t_2). \tag{7.4.21}$$

Эти относительные скорости обычно принимают в качестве гиперболического избытка скорости и относят или к бесконечно удаленной точке, или к сфере действия. При втором допущении возникает небольшая методическая ошибка, поскольку не учитывается притяжение планеты на участке полета КА от границы ее сферы действия до бесконечно удаленной точки. Величина ошибки, равная разности скорости КА на границе сферы действия  $V_d$  и скорости КА в бесконечно удаленной точке  $V_\infty$ , зависит от поля притяжения планеты и величины гиперболического избытка скорости. Примеры расчета разности  $V_d - V_\infty$  для некоторых планет Солнечной системы показаны на рис. 7.25 [35]. Понятно, что с увеличением  $V_\infty$  разность  $V_d - V_\infty$  уменьшается вследствие более быстрого удаления (или приближения) КА от планеты. При полете КА от Земли к Марсу и Венере обычно  $V_\infty = 3 - 4$  км/с, поэтому ошибка по скорости может достигать 130 м/с, а при полете от Земли к Юпитеру  $V_\infty = 6 - 9$  км/с, и ошибка по скорости не превышает 75 м/с.

Итак, положим

$$V_{\infty 1} = V_{\text{отн } 1}, \quad V_{\infty 2} = V_{\text{отн } 2},$$

где  $|V_{\infty 1}|$  — гиперболический избыток скорости для геоцентрического участка траектории, а  $|V_{\infty 2}|$  — гиперболический избыток скорости для планетоцентрического участка траектории. Согласно (2.2.2)

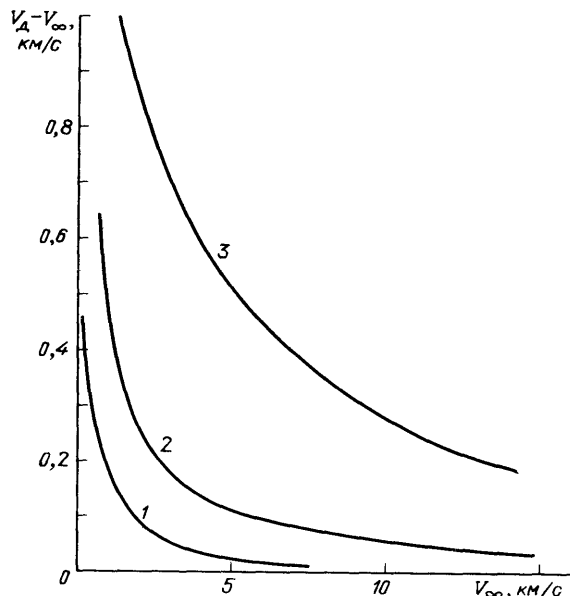


Рис. 7.25. Примеры расчета разности  $V_d - V_{\infty}$  для некоторых планет: 1 — Марс; 2 — Земля, Венера; 3 — Юпитер

гиперболический избыток скорости определяет постоянную интеграла энергии для гиперболической орбиты. Отсюда для геоцентрической и планетоцентрической гиперболических орбит

$$h_1 = V_{\infty 1}^2, \quad h_2 = V_{\infty 2}^2. \quad (7.4.22)$$

Пусть при отлете от Земли известен требуемый вектор скорости  $V_{\infty 1}$  в эллиптической системе координат. Определим его составляющие в геоцентрической экваториальной системе координат  $O_3xyz$ , у которой плоскость  $O_3xy$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $O_3x$  направлена в точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$ , а ось  $O_3z$  — по оси вращения Земли. Если  $i_0$  — угол наклона плоскости экватора к плоскости эклиптики, то матрица перехода от гелиоцентрической эллиптической системы координат  $Sxyz$  к геоцентрической эквато-

риальной системе координат  $O_3xyz$  имеет вид

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_3 & \sin i_3 \\ 0 & -\sin i_3 & \cos i_3 \end{bmatrix}.$$

Найдем теперь составляющие вектора  $V_{\infty 1}$  в экваториальной системе координат

$$\begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{bmatrix} = M_3 V_{\infty 1}, \quad (7.4.23)$$

а затем вычислим его склонение (угол между  $V_{\infty 1}$  и плоскостью экватора)

$$\delta_1 = \arcsin \frac{V_{z1}}{\sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2 + V_{z1}^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \delta_1 \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad (7.4.24)$$

Прямое восхождение (угол между проекцией  $V_{\infty 1}$  на плоскость экватора и осью  $O_3x$ , направленной в точку весеннего равноденствия) определяется из соотношений

$$\cos \alpha_1 = \frac{V_{x1}}{\sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2}}, \quad \text{sign } \sin \alpha_1 = \text{sign } V_{y1} \quad (0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi). \quad (7.4.25)$$

Перейдем к определению элементов геоцентрического участка межпланетной траектории. Наклонение  $i$  плоскости движения КА к экватору зависит от широты точки старта и допустимого азимута запуска. Плоскость движения должна проходить через вектор  $V_{\infty 1}$ , что возможно только при выполнении условия  $i \geq \delta_1$ . Заметим, что в случае точного равенства ( $i = \delta_1$ ) существует одна плоскость движения. При  $i > \delta_1$  имеются две плоскости, отличающиеся долготой восходящего узла, в которых возможно движение КА.

Если широта точки старта и азимут запуска заданы, обеспечивая выполнение условия  $i > \delta_1$ , то в течение каждого суток существуют два момента времени для старта с поверхности Земли. Запуск в указанные моменты времени обеспечивает прохождение плоскости движения через вектор  $V_{\infty 1}$ . При этом в одном случае доразгон с круговой орбиты на гиперболическую траекторию происходит в северном полушарии, а в другом случае — в южном. Для станций слежения, расположенных, например, на территории Советского Союза, северный вариант позволяет контролировать процесс разгона и фактически реализовавшуюся траекторию. Ввиду очевидного преимущества северного варианта для практического решения задачи выведения КА на межпланетную траекторию обычно им и ограничиваются.

Зная прямое восхождение  $\alpha_1$  и склонение  $\delta_1$  вектора  $V_{\infty 1}$  в экваториальной системе координат  $O_3xyz$ , вычислим из сферического треугольника  $ABC$  (см. рис. 7.26) синус аргумента широты

$$\sin u_1 = \frac{\sin \delta_1}{\sin i} \quad (i > 0). \quad (7.4.26)$$

Отсюда найдем два значения аргумента широты,  $u_1^{(1)}$  и  $u_1^{(2)} = \pi - u_1^{(1)}$  (где  $-\pi/2 \leq u_1^{(1)} \leq \pi/2$ ) отвечающие двум положениям восходящего узла.

Для вычисления долготы восходящего узла предварительно установим связь между проекциями вектора  $V_{\infty 1}$  в экваториальной системе координат  $O_3xyz$  и в системе координат  $O_3XYZ$ , у которой плоскость  $O_3XY$  совпадает с плоскостью движения КА, ось  $O_3Y$  направлена по вектору  $V_{\infty 1}$ , ось  $O_3Z$  ориентирована так, чтобы с ее конца движение КА наблюдалось происходящим против хода часовой стрелки. Ось  $O_3X$  дополняет систему координат до правой (рис. 7.26). Легко заметить, что матрица перехода от системы координат  $O_3xyz$  к  $O_3XYZ$  имеет вид (7.4.18), где  $u = u_1^{(1)}$  (или  $\pi - u_1^{(1)}$ ),  $\Omega = \Omega^{(1)}$  (или  $\Omega^{(2)}$ ), а угол  $i$  определяет наклонение плоскости движения. Тогда

$$\begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ V_{\infty 1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $V_{x1}$ ,  $V_{y1}$ ,  $V_{z1}$  — составляющие вектора  $V_{\infty 1}$  в системе координат  $O_3xyz$ , а  $0$ ,  $V_{\infty 1}$ ,  $0$  — составляющие этого вектора в системе координат  $O_3XYZ$ . С учетом (7.4.18) имеем

$$V_{x1} = V_{\infty 1} (\cos u_1 \cos \Omega_1 - \cos i \sin u_1 \sin \Omega_1),$$

$$V_{y1} = V_{\infty 1} (\cos u_1 \sin \Omega_1 + \cos i \sin u_1 \cos \Omega_1).$$

Эти соотношения можно рассматривать в качестве уравнений относительно  $\sin \Omega_1$  и  $\cos \Omega_1$ , так как их левые части известны согласно

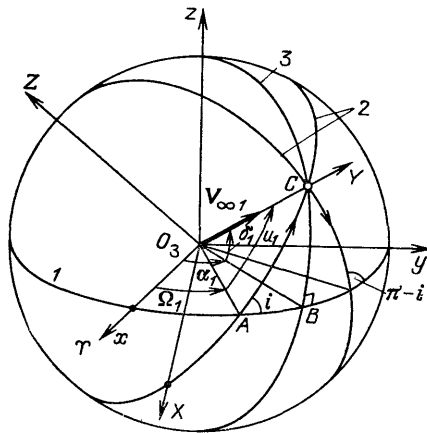


Рис 7.26 Выбор плоскости орбиты КА: 1 — плоскость экватора; 2 — возможные плоскости орбиты КА; 3 — плоскость меридиана

(7.4.23). Отсюда

$$\begin{aligned}\sin \Omega_1 &= \frac{V_{x1} \cos u_1 - V_{y1} \cos i \sin u_1}{V_{\infty 1} (\cos^2 u_1 + \cos^2 i \sin^2 u_1)}, \\ \cos \Omega_1 &= \frac{V_{x1} \sin u_1 + V_{y1} \sin i \cos u_1}{V_{\infty 1} (\cos^2 u_1 + \cos^2 i \sin^2 u_1)}.\end{aligned}\quad (7.4.27)$$

Подставляя в (7.4.27) сначала  $u_1 = u_1^{(1)}$ , а затем  $u_1 = \pi - u_1^{(1)}$ , вычислим два возможных значения долготы восходящего узла,  $\Omega_1^{(1)}$  и  $\Omega_1^{(2)}$ . Далее следует выбрать то значение долготы восходящего узла геоцентрического участка траектории КА, которое обеспечивает наилучшие условия наблюдаемости при разгоне с круговой орбиты на гиперболическую.

Перейдем к определению элементов орбиты в плоскости движения. По формуле (2.4.33) найдем величину большой полуоси

$$a = \frac{\mu_3}{V_{\infty 1}^2}.$$

Здесь  $\mu_3$  — произведение постоянной притяжения на массу Земли. Будем полагать, что КА предварительно выводится на круговую околоземную орбиту радиуса  $r_{кр}$ , а затем стартует с нее на гиперболическую орбиту перелета. При импульсном маневре должно выполняться равенство  $r_n = r_{кр}$ , где  $r_n$  — радиус перигея гиперболической траектории. Тогда линейный эксцентриситет

$$c = r_n + a,$$

эксцентриситет

$$e = \frac{c}{a} = 1 + \frac{r_{кр} V_{\infty 1}^2}{\mu_3}$$

и параметр

$$p = r_n (1 + e) = r_{кр} \left( 2 + \frac{r_{кр} V_{\infty 1}^2}{\mu_3} \right).$$

Далее вычислим по формуле (2.4.19) предельный угол поворота гиперболической орбиты, или истинную аномалию бесконечно удаленной точки:

$$\vartheta_{пред} = \arccos \left( -\frac{1}{e} \right) \quad \left( \frac{\pi}{2} < \vartheta_{пред} < \pi \right).$$

Так как асимптота гиперболической орбиты, в направлении которой совершается уход КА от Земли, должна быть коллинеарна вектору  $V_{\infty 1}$ , то аргумент перицентра

$$\omega = u_1 - \vartheta_{пред} \quad (0 \leq \omega \leq 2\pi).$$

Широта перицентра  $\varphi_n$  определяется по формуле

$$\varphi_n = \arcsin (\sin i \sin \omega).$$

Время пролета перицентра  $t_p$  соответствует моменту достижения широты  $\varphi_p$  при движении в требуемом направлении. В этот момент прикладывается импульс скорости для перевода КА с круговой орбиты на гиперболическую. Время  $t_p$  зависит от момента старта с поверхности Земли и числа витков на околоземной орбите.

Таким образом, определены все элементы гиперболической орбиты в сфере действия Земли.

Использование промежуточной околоземной орбиты при запуске КА к планетам было впервые предложено в 1960 г. Т. М. Энеевым [31]. Это позволило существенно улучшить условия запуска и тем самым значительно увеличить массу выводимой полезной нагрузки на межпланетную траекторию по сравнению с прямым запуском с территории СССР. Впервые старт с промежуточной околоземной орбиты был реализован 12 февраля 1961 года при запуске советской автоматической станции «Венера-1».

Время старта  $t_0$  для выведения КА на промежуточную околоземную орбиту выбирается из условия обеспечения требуемой долготы восходящего узла получаемой плоскости движения. В первом приближении величину  $t_0$  с учетом длительности активного участка можно определить следующим образом. Пусть  $\lambda_{гм}$  — абсолютная долгота (угловое расстояние от направления на точку весеннего равноденствия) гринвичского меридиана в 0 часов рассматриваемой даты старта. Обозначим через  $\omega_3$  угловую скорость суточного вращения Земли,  $t_0$  — гринвичское время старта,  $t_{ак}$  — длительность активного участка,  $\lambda_0$  — долготу точки старта,  $\Delta\lambda_{ак}$  — разность долгот точки выхода на орбиту и точки старта,  $\Delta\lambda_в$  — разность долгот точки выхода на орбиту и восходящего узла орбиты,  $\Omega_1$  — требуемую долготу восходящего узла орбиты, измеряемую от направления на точку весеннего равноденствия. Тогда должно выполняться условие

$$\lambda_{гм} + \lambda_0 + \omega_3(t_0 + t_{ак}) + \Delta\lambda_{ак} = \Omega_1 + \Delta\lambda_в.$$

Отсюда гринвичское время старта

$$t_0 = \frac{\Omega_1 + \Delta\lambda_в - \lambda_{гм} - \lambda_0 - \Delta\lambda_{ак}}{\omega_3} - t_{ак}. \quad (7.4.28)$$

Полученная формула (7.4.28) не учитывает прецессии орбиты (т. е. поворота ее плоскости вследствие нецентральности поля притяжения Земли) за время движения КА по этой орбите. Соответствующая поправка может быть внесена по материалам гл. 8.

Рассмотрим теперь траекторию движения КА в сфере действия планеты назначения. Планетоцентрическая траектория также является гиперболической, и расчет планетоцентрического участка во многом совпадает с расчетом геоцентрического участка.

Вектор гиперболического избытка скорости  $V_{\infty 2}$  можно отнести к сфере действия планеты, допуская при этом ошибку, величина которой оценивается с помощью зависимостей, построенных на рис. 7.25.

Траектория сближения КА с планетой зависит от цели полета (попадание в планету или прямая посадка, пролет на заданном расстоянии или гравитационный маневр для перевода КА на траекторию полета к другой планете, получение спутника планеты и др.).

Движение КА вблизи планеты удобно описывать в планетоцентрической системе координат  $Px_{пл}y_{пл}z_{пл}$ , у которой так называемая *картинная плоскость*  $Px_{пл}y_{пл}$  перпендикулярна вектору  $V_{\infty 2}$ , а ось  $Pz_{пл}$  направлена в сторону вектора  $V_{\infty 2}$  [31]. Ориентация осей  $Px_{пл}$  и  $Pz_{пл}$  определяется единичными векторами

$$\mathbf{e}_y^0 = \frac{\mathbf{r}_{пл} \times \mathbf{V}_{\infty 2}}{|\mathbf{r}_{пл} \times \mathbf{V}_{\infty 2}|}, \quad \mathbf{e}_x^0 = \frac{\mathbf{e}_y^0 \times \mathbf{V}_{\infty 2}}{|\mathbf{e}_y^0 \times \mathbf{V}_{\infty 2}|}. \quad (7.4.29)$$

Здесь  $\mathbf{r}_{пл}$  — гелиоцентрический радиус-вектор планеты в момент времени  $t_2$ . Пусть в этот момент времени вектор  $\mathbf{V}_{\infty 2}$  проецируется на картинную плоскость в точку с координатами  $(x_v, y_v)$ . При отсутствии притяжения планеты траектория КА пересекла бы картинную плоскость в указанной точке. Следовательно, расстояние от центра планеты до этой точки определяет прицельную дальность, которая равна малой полуоси гиперболической орбиты

$$b_2 = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}.$$

Плоскость планетоцентрической траектории КА проходит через центр масс планеты и вектор  $\mathbf{V}_{\infty 2}$ . В системе координат  $Px_{пл}y_{пл}z_{пл}$  наклонение плоскости движения  $i_2 = \pi/2$ . Если отсчитывать долготу восходящего узла  $\Omega_2$  в плоскости  $Px_{пл}y_{пл}$  от оси  $Px_{пл}$  и принять, что в восходящем узле происходит изменение знака координаты  $z_{пл}$  с «-» на «+», то для вычисления  $\Omega_2$  имеем соотношения

$$\sin \Omega_2 = \frac{y_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}}, \quad \cos \Omega_2 = \frac{x_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}}. \quad (7.4.30)$$

Определим теперь элементы орбиты в плоскости движения. Величина большой полуоси

$$a_2 = \frac{\mu_{пл}}{V_{\infty 2}^2},$$

где  $\mu_{пл}$  — произведение постоянной притяжения на массу планеты. Далее, воспользовавшись формулой (2.4.27), вычислим эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2}.$$

Истинная аномалия бесконечно удаленной точки ( $-\vartheta_{пред}$ ) вычисляется из соотношения

$$\cos \vartheta_{пред} = -\frac{1}{e} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \vartheta_{пред} < \pi\right).$$



Аргумент широты указанной точки  $u_2 = -\pi/2$ , отсюда аргумент перицентра

$$\omega_2 = u_2 - (-\vartheta_{\text{пред}}) = -\frac{\pi}{2} + \vartheta_{\text{пред}}.$$

Зная радиус сферы действия, можно из уравнения орбиты вычислить истинную аномалию, отвечающую моменту пролета сферы действия, а затем эксцентрическую аномалию, чтобы из уравнения Кеплера определить время пролета перицентра. Тем самым завершается вычисление элементов планетоцентрической орбиты.

**7.4.5. Выбор оптимальной даты старта.** В упрощенной постановке можно принять, что Земля и планета обращаются вокруг Солнца по круговым компланарным орбитам. Если пренебречь размерами их сфер действия по сравнению с протяженностью геоцентрического участка, т. е. перейти к так называемым «точечным» сферам действия, оптимальной окажется траектория типа Гоманна. Поскольку решается задача сближения, КА и планета должны одновременно оказаться в точке касания их траекторий. Отсюда можно установить требуемое начальное положение Земли и планеты для реализации траектории типа Гоманна.

Пусть  $r_1$  — радиус круговой орбиты Земли, а  $r_2$  — радиус круговой орбиты планеты. Тогда время полета КА по гоманновской траектории

$$t_{12} = \frac{\pi (r_1 + r_2)^{3/2}}{\sqrt{2\mu_0}},$$

а угловые скорости обращения Земли и планеты соответственно равны

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{r_1^3}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{r_2^3}}.$$

Пусть  $P_{11}$  и  $P_{21}$  — положения Земли и планеты в момент начала перелета КА, а  $P_{12}$  и  $P_{22}$  — положения Земли и планеты в момент окончания перелета КА (рис. 7.27). За время перелета  $t_{12}$  КА перемещается по гоманновской траектории из положения  $P_{11}$  в  $P_{22}$  на угловое расстояние  $\pi$ , а планета перемещается из положения  $P_{21}$  в  $P_{22}$  на угловое расстояние  $\pi - \varphi_0$ . Приравняв эти времена, найдем требуемый начальный угол  $\varphi_0$ :

$$\varphi_0 = \pi \left[ 1 - \left( \frac{1 + \tilde{r}}{2\tilde{r}} \right)^{3/2} \right] \quad (\tilde{r} = r_2/r_1). \quad (7.4.31)$$

Здесь  $\varphi_0 > 0$  при  $\tilde{r} > 1$ , или  $r_2 > r_1$  (рис. 7.27, а) и  $\varphi_0 < 0$  при  $\tilde{r} < 1$ , или  $r_2 < r_1$  (рис. 7.27, б). В табл. 7.3 приведены основные характеристики гоманновских траекторий перелета с Земли к планетам Солнечной системы.

Если взаимное положение Земли и планеты не отвечает условию перелета по траектории типа Гоманна, то необходимо выждать до того момента времени, когда такое условие наступит. Прежде чем

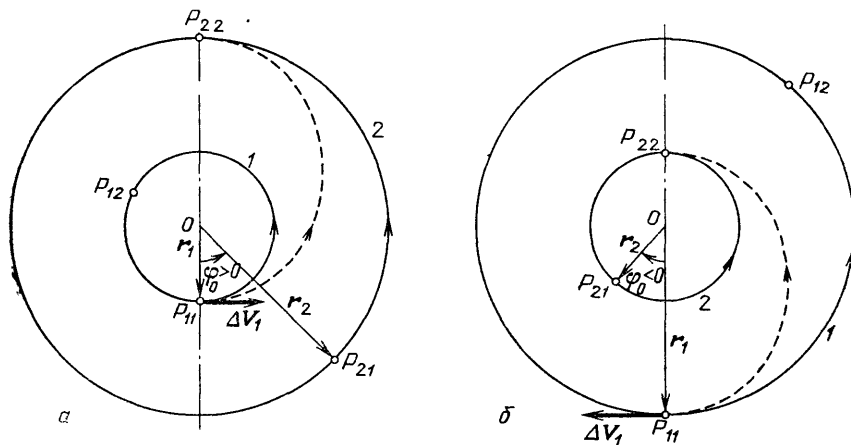


Рис. 7.27. Схемы межпланетного перелета по полуэллипсу Гоманна: 1 — орбита Земли; 2 — орбита планеты

перейти к обсуждению способа расчета оптимальной даты старта, введем некоторые необходимые понятия.

*Синодическим периодом*  $T_{\text{син}}$  планет называют наименьший промежуток времени, через который повторяется взаимное положение двух планет (в частности, позволяющее осуществить перелет типа

Таблица 7.3

Характеристики гоманновских траекторий перелета Земля — планета (старт с круговой орбиты высотой 200 км) [38]

Планета назначения	Начальное приращение скорости км/с	Гелиоцентрическая скорость на сфере действия Земли, км/с	Планетоцентрическая скорость на сфере действия, км/с	Длительность перелета, звездный год	Начальный угол $\varphi_0$ , град
Меркурий	5,556	22,252	9,614	0,29	-251,7
Венера	3,506	27,289	2,707	0,34	-54,1
Марс	3,643	32,729	2,650	0,71	44,3
Юпитер	6,305	38,577	5,645	2,73	97,1
Сатурн	7,285	40,074	5,449	6,05	106,0
Уран	7,978	41,066	4,660	16,04	111,5
Нептун	8,247	41,439	4,052	30,62	112,9
Плутон	8,364	41,599	3,647	45,60	113,4

Гоманна). *Сидерическим периодом* планеты  $T_{\text{сид}}$  называют наименьший промежуток времени, через который планета занимает в гелиоцентрическом движении одно и то же положение относительно звезд. Если  $T_{\text{сид}1}$  и  $T_{\text{сид}2}$  — сидерические периоды обращения Зем-

ли и планеты, то их синодические периоды можно вычислить по формуле

$$T_{\text{син}} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{1}{\left| \frac{1}{T_{\text{сид2}}} - \frac{1}{T_{\text{сид1}}} \right|} = \frac{T_{\text{сид1}} T_{\text{сид2}}}{|T_{\text{сид1}} - T_{\text{сид2}}|}. \quad (7.4.32)$$

Периодом великих противостояний Земли и Марса в астрономии принято называть промежуток времени между двумя последовательными сближениями указанных планет до минимального возможного расстояния. При этом обе планеты располагаются по прямой в одну сторону от Солнца. Земля находится вблизи своего афелия, Марс — перигелия. Такое расположение повторяется через 15 или 17 лет (например, в 1956 г., 1971 г., 1988 г.). При великих противостояниях положение Земли и Марса практически фиксировано относительно звезд.

По аналогии с этим будем называть *периодом великих противостояний двух планет* наименьший промежуток времени, через который повторяется положение планет в гелиоцентрической системе координат. Период великих противостояний приблизительно равен общему наименьшему кратному сидерических периодов планет и их

Т а б л и ц а 7.4

Синодические периоды и периоды великих противостояний планет Солнечной системы и Земли

Планеты	$T_{\text{син}}$ , лет	$T_{\text{вп}}$ , лет <sup>1)</sup>	Планеты	$T_{\text{син}}$ , лет	$T_{\text{вп}}$ , лет <sup>1)</sup>
Меркурий	0,317	1	Сатурн	1,035	29
Венера	1,599	8	Уран	1,012	84
Марс	2,135	17	Нептун	1,006	165
Юпитер	1,092	12	Плутон	1,004	248

<sup>1)</sup> Величина  $T_{\text{вп}}$  округлена до года.

синодического периода. В табл. 7.4 приведены синодические периоды ( $T_{\text{син}}$ ) и периоды великих противостояний ( $T_{\text{вп}}$ ) планет Солнечной системы и Земли. Ниже будет показано, что эти величины позволяют оценить периодичность оптимальных условий старта при межпланетных перелетах.

Вернемся теперь к определению оптимальной даты старта. Пусть  $\varphi_{10}$  — гелиоцентрическая долгота Земли, измеряемая от направления на точку весеннего равноденствия, в момент начала отсчета времени,  $t_1$  — время (дата) старта, отсчитываемое от этого момента. Тогда гелиоцентрическая долгота Земли в момент старта КА

$$\varphi_{11} = \varphi_{10} + \omega_1 t_1.$$

Обозначим через  $\varphi_{20}$  гелиоцентрическую долготу планеты в момент начала отсчета времени, тогда ее долгота в момент  $t_1 + t_{12}$  прибытия КА к планете

$$\varphi_{22} = \varphi_{20} + \omega_2(t_1 + t_{12}).$$

Найдем разность

$$\varphi_{22} - \varphi_{11} = \varphi_{20} - \varphi_{10} + (\omega_2 - \omega_1)t_1 + \omega_2 t_{12}.$$

По условиям гоманновского перелета эта разность должна равняться  $\pm\pi$  с точностью до  $2k\pi$ , где  $k = 0, \pm 1, \dots$  — количество синодических циклов от начала отсчета времени. Следовательно,

$$\varphi_{20} - \varphi_{10} + (\omega_2 - \omega_1)t_1 + \omega_2 t_{12} = \pm\pi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

Отсюда найдем время старта

$$t_1 = \frac{\pm\pi + 2k\pi - \varphi_{20} + \varphi_{10} - \omega_2 t_{12}}{\omega_2 - \omega_1}, \quad (7.4.33)$$

или

$$t_1 = t_{1н} + kT_{\text{син}}, \quad (7.4.34)$$

где

$$t_{1н} = \frac{\pm\pi - \varphi_{20} + \varphi_{10} - \omega_2 t_{12}}{\omega_2 - \omega_1} \quad (7.4.35)$$

— время старта при  $k = 0$ .

Вычислив оптимальную дату старта для упрощенной задачи движения планет (круговые компланарные орбиты), можно затем численными методами исследовать потребное приращение скорости при переходе с околоземной круговой орбиты на гиперболическую в некоторой окрестности оптимальной даты старта. В уточненных расчетах следует учесть эксцентricность орбит планет, их некомпланарность и другие факторы. Как правило, по результатам уточненных расчетов оптимальные даты старта несколько корректируются, хотя качественная картина при этом не меняется. Однако необходимо отметить, что в случае некомпланарных орбит перелет с угловой дальностью, равной  $\pi$ , возможен только в том случае, когда точка сближения КА с планетой находится вблизи линии узлов, образованной плоскостями движения планет. Если точка сближения КА с планетой находится далеко от линии узлов, то не удастся реализовать траекторию перелета типа Гоманна. В результате значительно возрастает (по сравнению с оптимальными условиями старта) потребное приращение скорости при переводе КА с круговой околоземной орбиты на гиперболическую.

Из-за эксцентricности орбит планет и их некомпланарности потребное приращение скорости оказывается несколько отличающимся для различных оптимальных дат старта. Одновременно несколько меняется оптимальное время перелета  $t_{12}$ . Например, при полетах к Марсу и Венере гиперболический избыток скорости (а значит, и потребное начальное приращение скорости) для оптимальных дат старта может меняться в диапазоне 3 — 4 км/с. Время перелета

$t_{12} = 200 - 250$  сут при полете к Марсу и  $t_{12} = 107 - 113$  сут при полете к Венере [35].

Для проектно-баллистических расчетов удобно пользоваться изолиниями гиперболического избытка скорости или потребного начального приращения скорости в плоскости параметров «дата старта — дата прибытия». Эти изоэнергетические линии (так как начальная высота фиксирована, то изменение скорости определяет изменение энергии КА) представляют собой два семейства замкнутых линий, одно из которых отвечает сближению КА с планетой на первом полувитке, а второе — на втором (рис. 7.28). При прочих

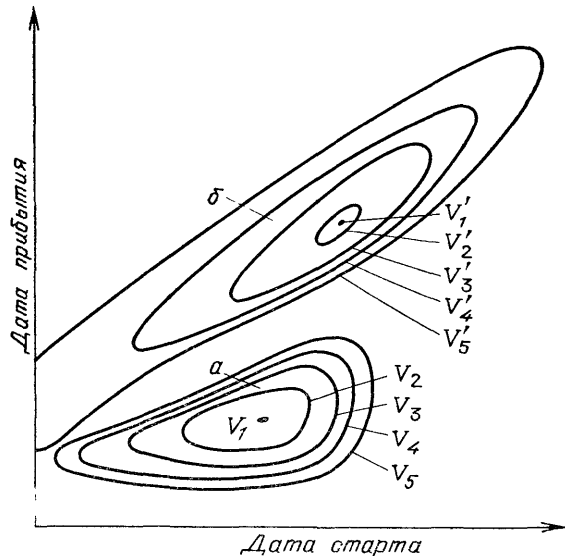


Рис. 7.28. Примеры изолиний потребных скоростей для реализации межпланетных траекторий:  $a$  — сближение на первом полувитке ( $V_1 < V_2 < V_3 < V_4 < V_5$ );  $b$  — сближение на втором полувитке ( $V'_1 < V'_2 < V'_3 < V'_4 < V'_5$ )

равных условиях траектория сближения на первом полувитке предпочтительнее, поскольку позволяет сократить время перелета. Чем меньше размеры замкнутой изоэнергетической линии, тем меньше потребная скорость. Если провести аналогию с изовысотными линиями, или линиями уровня в топографии, то окажется, что оптимальные условия перелета соответствуют «ямам» энергетических поверхностей, а два семейства линий разделены «энергетическим хребтом», который возникает из-за некомпланарности орбит планет. Только в частном случае, когда сближение с планетой происходит вблизи линии узлов, оба семейства линий сливаются в одно [67].

Для каждой оптимальной даты старта в зависимости от располагаемой энергетики орбитальной ступени ракеты-носителя существует множество траекторий перелета, которые отличаются потребным

приращением скорости и временем перелета. Из этих траекторий можно выбрать такую, которая в большей степени удовлетворяет всем дополнительным требованиям, связанным с решением поставленной задачи. Обычно в качестве дополнительных требований рассматривают условия наблюдаемости КА на начальном участке удаления от Земли, геометрические условия подлета к планете, скорость сближения с планетой и др.

### § 7.5. Последовательный облет нескольких небесных тел

На начальном этапе исследования космического пространства, как известно, запускались КА, предназначенные для полета к одной планете, например, Марсу или Венере. Это советские аппараты типа «Марс» и «Венера», американские аппараты типа «Маринер», «Викинг» и «Пионер». Ограничения по располагаемым энергетическим возможностям и по времени надежного функционирования бортовых систем не позволяли решать более сложных задач, связанных с последовательным облетом нескольких небесных тел. Повышение энергетических возможностей ракет-носителей и совершенствование бортовых систем КА позволили уже сейчас перейти к реализации программы многоцелевых полетов. За счет такого «совмещения» нескольких целевых задач в одну многоцелевую экономятся ресурсы на проведение космических исследований, сокращается суммарное время получения научных результатов. При близком облете небесного тела КА совершает гравитационный, или пертурбационный маневр, получая некоторое приращение вектора скорости без включения двигательной установки. Вместе с тем при последовательном облете нескольких небесных тел повышаются требования к системе навигации и управления КА.

Впервые гравитационный маневр в межпланетном полете был осуществлен в 1974 году американским КА «Маринер-10» на маршруте Земля — Венера — Меркурий. Он пролетал на минимальном расстоянии 5740 км от Венеры, получив приращение скорости около 4,5 км/с, а затем сблизился с Меркурием до 720 км. Из-за слабого гравитационного поля Меркурия траектория КА после пролета этой планеты практически не изменилась.

Для решения некоторых задач приходится сочетать гравитационный маневр с активным, т. е. включать двигательную установку для дополнительного приращения вектора скорости. Обычно большая величина приращения скорости приходится на гравитационный маневр и лишь незначительная величина приращения скорости обеспечивается двигательной установкой. Однако в целом может достигаться существенный выигрыш. Например, в ряде случаев при полете КА к Меркурию с использованием поля притяжения Венеры активно-гравитационный маневр позволяет уменьшить вдвое потребные энергетические затраты по сравнению с чистым гравитационным маневром [56].

7.5.1. **Использование гравитационного маневра.** *Траекторией облета нескольких планет* называют такую траекторию, которая проходит через их сферы действия. Эта траектория должна проходить по крайней мере через сферы действия трех планет, включая планету отправления, промежуточную планету, которая используется для гравитационного маневра, и планету назначения. Траектория сложного маршрута может проходить через сферы действия четырех и большего числа планет.

Как показано в п. 7.2.3, довольно просто оценить максимальную возможную величину приращения скорости КА при гравитационном маневре, если пренебречь изменением вектора гелиоцентрической скорости планеты за время движения КА в ее сфере действия. Это максимальное возможное приращение равно круговой скорости в перигеентре гиперболической траектории КА относительно планеты, если гиперболической избыток скорости на входе в сферу действия также равен указанной круговой скорости. Как известно, круговая скорость в перигеентре зависит от параметра  $\mu$  планеты и радиуса перигеентра, который должен выбираться по возможности меньшим, гарантируя вместе с тем безопасный пролет вблизи планеты.

В табл. 7.5 приведены оценки возможного изменения скорости за счет гравитационного маневра в сферах действия различных планет. Под оптимальным маневром здесь имеется в виду вход в сферу

Таблица 7.5

Изменение скорости КА при гравитационном маневре [38]

Планета	Величина изменения скорости, км/с		
	при оптимальном маневре	при перелете по траектории типа Гоманна	при перелете по параболической траектории
Меркурий	3,0	1,7	—
Венера	7,2	4,7	—
Марс	3,5	3,4	1,2
Юпитер	42,7	10,0	29,7
Сатурн	25,6	10,4	21,5
Уран	15,1	8,5	14,2
Нептун	16,7	7,6	13,6
Плутон	1,0	0,6	0,3

действия планеты с гиперболическим избытком скорости, равным круговой скорости в перигеентре гиперболической орбиты. Видно, что наибольшее приращение скорости ( $\sim 43$  км/с) может быть получено при гравитационном маневре в сфере действия Юпитера. При пролете Сатурна КА может получить  $\sim 26$  км/с, Урана  $\sim 15$  км/с, а Нептуна  $\sim 17$  км/с. Если межпланетный перелет от Земли совершается по траектории типа Гоманна, то приращение

скорости при облете указанных планет не превысит 7—10 км/с. В случае параболической межпланетной траектории, касающейся орбиты Земли, приращение скорости может достигать 13—30 км/с.

Заметим, что использование далеких планет для получения наибольшего приращения скорости КА в процессе гравитационного маневра достаточно проблематично из-за большого времени полета до этих планет. Отсюда наиболее реальным представляется использование ближайших к земле планет, т. е. Венеры и Марса, а также Юпитера. В последнем случае можно существенно уменьшить запас топлива КА для полетов к Сатурну, Урану, Нептуну, Плутону, Солнцу и вне плоскости эклиптики.

**7.5.2. Активно-гравитационный маневр.** Возможности гравитационного маневра в поле притяжения планеты ограничены. Поэтому в ряде задач возникает необходимость сочетания гравитационного маневра с активным, когда за счет включения двигательной установки изменяется траектория движения КА. При этом «вклад»

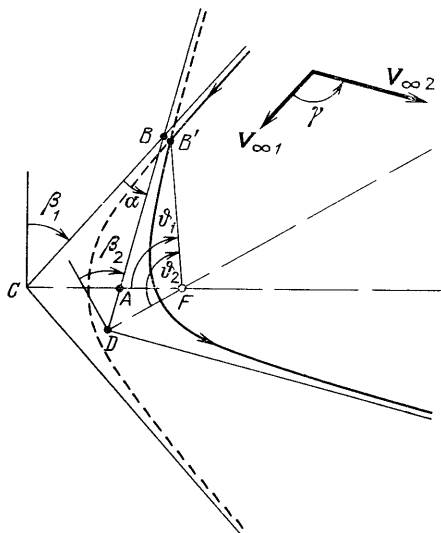


Рис 7.29 Схема перелета между гиперболическими орбитами

активной составляющей маневра должен быть по возможности меньше, чтобы уменьшить потребный запас топлива. Обычно рассматривают 1—2 включения двигательной установки, что в импульсной аппроксимации равносильно приложению 1—2 импульсов скорости.

Одноимпульсный маневр соответствует переводу КА с одной гиперболической траектории на другую, так как вход в сферу действия планеты и выход из сферы действия происходит по гиперболическим траекториям. Двухимпульсное изменение скорости предполагает перевод КА с начальной гиперболической траектории на некоторую промежуточную, а затем с промежуточной — на конечную гиперболическую траекторию.

В зависимости от цели маневра может меняться величина и направление вектора скорости на выходе из сферы действия.

Следуя работе [75], рассмотрим задачу одноимпульсного перелета между гиперболическими орбитами. Такая задача возникает при оптимизации активно-гравитационного маневра в сфере действия планеты. Будем считать, что заданы входная  $V_{\infty 1}$  и выходная  $V_{\infty 2}$  величины гиперболического избытка скорости, а также угол  $\gamma$  изменения направления движения (рис. 7.29). Требуется определить



величину  $\Delta V$  импульсного изменения скорости и точку, в которой осуществляется маневр.

Возможны 4 типа одноимпульсных переходов между гиперболическими орбитами. С нисходящей ветви начальной гиперболической орбиты КА может перейти на нисходящую или восходящую ветвь конечной гиперболической орбиты. Точно так же с восходящей ветви начальной гиперболической орбиты КА может перейти на нисходящую или восходящую ветвь конечной гиперболической орбиты.

В результате активно-гравитационного маневра угол изменения направления движения  $\gamma$  будет складываться из угла  $\alpha$  между входными асимптотами начальной и конечной гиперболических орбит и полного угла поворота  $\vartheta_{\text{полн}} = 2\beta_2$  для конечной гиперболической орбиты, т. е.

$$\gamma = \alpha + 2\beta_2. \quad (7.5.1)$$

Из треугольников  $ABC$  и  $ADF$  на рис. 7.29 следует, что

$$\begin{aligned} \angle CBA = \pi - \left( \frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) - \angle CAB = \frac{\pi}{2} + \beta_1 - \angle DAF = \\ = \frac{\pi}{2} + \beta_1 - \left[ \pi - \left( \frac{\pi}{2} - \beta_2 \right) - (\vartheta_2 - \vartheta_1) \right] = \beta_1 - \beta_2 + \vartheta_2 - \vartheta_1, \end{aligned}$$

или

$$\alpha = \beta_1 - \beta_2 + \vartheta_2 - \vartheta_1. \quad (7.5.2)$$

Здесь  $\vartheta_1, \vartheta_2$  — угловые расстояния от перицентров до точки маневра для начальной и конечной гиперболических орбит ( $\vartheta > 0$  при повороте по ходу часовой стрелки от перицентра до рассматриваемой точки). Нетрудно проверить, что соотношение (7.5.2) справедливо для любого из четырех перечисленных ранее типов одноимпульсных перелетов между гиперболическими орбитами. С учетом (7.5.1) и (7.5.2) имеем

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2 + \vartheta_2 - \vartheta_1. \quad (7.5.3)$$

Следовательно, угол изменения направления движения зависит от геометрических характеристик начальной и конечной гиперболических орбит и положения точки маневра.

Обычно при рассмотрении активно-гравитационного маневра минимизируется величина приращения скорости  $\Delta V$  за счет работы двигательной установки. Чтобы получить результаты анализа в более общем виде, отнесем  $\Delta V$  и  $V_{\infty 2}$  к  $V_{\infty 1}$ , т. е. введем величины

$$\Delta \tilde{V} = \Delta V / V_{\infty 1}, \quad \tilde{V} = V_{\infty 2} / V_{\infty 1}, \quad (7.5.4)$$

а в качестве параметра, характеризующего минимальное расстояние пролета КА относительно планеты, рассмотрим

$$v_{\text{II}} = \frac{r_{\text{II}} V_{\infty 1}^2}{\mu} = \left[ \frac{V_{\infty 1}}{\tilde{V}_{\text{кр}}(r_{\text{II}})} \right]^2, \quad (7.5.5)$$

где  $r_n$  — радиус перицентра,  $\mu$  — произведение постоянной притяжения на массу планеты.

Вычислим величину  $\Delta V$ . Из векторного треугольника в точке приложения импульса имеем

$$\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}, \quad (7.5.6)$$

где  $V_1, V_2$  — скорости в точке маневра на начальной и конечной гиперболических орбитах, а  $\theta_1, \theta_2$  — углы наклона траектории в этой точке. С помощью интеграла энергии (2.2.1) и значения его постоянной для гиперболической орбиты  $h = V_\infty^2$  найдем величину скорости на расстоянии  $r$ :

$$V = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)}. \quad (7.5.7)$$

Здесь

$$a = \frac{\mu}{V_\infty^2} \quad (7.5.8)$$

— величина действительной полуоси гиперболической орбиты. Далее, используя соотношения (2.3.7) и (2.3.8), получим

$$\cos \theta = \frac{V_n}{V} = \frac{1 + e \cos \vartheta}{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}} = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{\sqrt{\frac{r}{a} \left( 2 + \frac{r}{a} \right)}},$$

или

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{a} \left( 2 + \frac{r}{a} \right) \operatorname{tg} \beta}}, \quad (7.5.9)$$

так как согласно (2.4.19)

$$\cos \vartheta_{\text{пред}} = -\frac{1}{e}, \quad \sin \vartheta_{\text{пред}} = \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$$

и

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left( \vartheta_{\text{пред}} - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \vartheta_{\text{пред}} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}. \quad (7.5.10)$$

Для синуса угла наклона траектории имеем формулу

$$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{\frac{r}{a} \left( 2 + \frac{r}{a} \right) \operatorname{tg}^2 \beta - 1}}{\sqrt{\frac{r}{a} \left( 2 + \frac{r}{a} \right) \operatorname{tg} \beta}}. \quad (7.5.11)$$

Знак минус отвечает нисходящей ветви гиперболической орбиты (до пролета перицентра), а знак плюс соответствует восходящей ветви (после пролета перицентра).

С помощью соотношений (7.5.7), (7.5.9), (7.5.11) можно преобразовать (7.5.6) к следующему виду:

$$\Delta V = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{4}{r} - \frac{2 \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}}{\left(\frac{r}{a_1}\right)^2 \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2} \left[ 1 \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \sqrt{\frac{r}{a_1} \left(2 + \frac{r}{a_1}\right) \operatorname{tg}^2 \beta_1 - 1} \sqrt{\frac{r}{a_2} \left(2 + \frac{r}{a_2}\right) \operatorname{tg}^2 \beta_2 - 1} \right] \right\}^{1/2},$$

откуда

$$\Delta \tilde{V} = \left\{ 1 + \frac{1}{\tilde{a}} + \frac{4}{\tilde{r}} - \frac{2 \sqrt{\tilde{a}}}{\tilde{r}^2 \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2} \left[ 1 \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \sqrt{\tilde{r} (2 + \tilde{r}) \operatorname{tg}^2 \beta_1 - 1} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{a} \left(2 + \frac{\tilde{r}}{a}\right) \operatorname{tg}^2 \beta_2 - 1} \right] \right\}^{1/2}, \quad (7.5.12)$$

где

$$\tilde{a} = \frac{a_2}{a_1}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{a_1}, \quad \Delta \tilde{V} = \Delta V \sqrt{\frac{a_1}{\mu}}. \quad (7.5.13)$$

Используя теперь уравнение орбиты (2.2.34), получим формулы для вычисления угла  $\vartheta$ :

$$\cos \vartheta = \left(\frac{p}{r} - 1\right) \frac{1}{e} = \left(\frac{1}{\frac{r}{a} \frac{1}{e^2 - 1}} - 1\right) \frac{1}{e} = \left(\frac{1}{\frac{r}{a} \operatorname{tg}^2 \beta} - 1\right) \sin \beta,$$

или

$$\cos \vartheta = \frac{\cos^2 \beta - \frac{r}{a} \sin^2 \beta}{\frac{r}{a} \sin \beta} \quad (7.5.14)$$

и

$$\sin \vartheta = \pm \frac{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} \sin^2 \beta - \left(\cos^2 \beta - \frac{r}{a} \sin^2 \beta\right)^2}}{\frac{r}{a} \sin \beta}. \quad (7.5.15)$$

Знак в (7.5.15) выбирается согласно приведенному ранее правилу.

Из соотношения (7.5.3) имеем

$$\gamma - \beta_1 - \beta_2 = \vartheta_2 - \vartheta_1,$$

отсюда

$$\cos(\gamma - \beta_1 - \beta_2) = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2$$

и с учетом соотношений (7.5.13) — (7.5.15) получим

$$\cos(\gamma - \beta_1 - \beta_2) = \frac{(\cos^2 \beta_1 - \tilde{r} \sin^2 \beta_1) \left( \cos^2 \beta_2 - \frac{\tilde{r}}{a} \sin^2 \beta_2 \right)}{\frac{\tilde{r}^2}{a} \sin \beta_1 \sin \beta_2} \pm$$

$$\pm \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 \sqrt{\tilde{r}^2 \sin^2 \beta_1 - \cos^2 \beta_1 + 2\tilde{r} \sin^2 \beta_1} \sqrt{\frac{\tilde{r}^2}{a^2} \sin^2 \beta_2 - \cos^2 \beta_2 + \frac{2\tilde{r}}{a} \sin^2 \beta_2}}{\frac{\tilde{r}^2}{a} \sin \beta_1 \sin \beta_2},$$

а затем

$$\frac{\tilde{r}^2}{a} \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos(\gamma - \beta_1 - \beta_2) -$$

$$- (\cos^2 \beta_1 - \tilde{r} \sin^2 \beta_1) \left( \cos^2 \beta_2 - \frac{\tilde{r}}{a} \sin^2 \beta_2 \right) = \pm \cos \beta_1 \cos \beta_2 \times$$

$$\times \sqrt{(\tilde{r}^2 \sin^2 \beta_1 - \cos^2 \beta_1 + 2\tilde{r} \sin^2 \beta_1) \left( \frac{\tilde{r}^2}{a^2} \sin^2 \beta_2 - \cos^2 \beta_2 + \frac{2\tilde{r}}{a} \sin^2 \beta_2 \right)},$$

Возводя обе части в квадрат и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\tilde{r}$ , найдем после несложных преобразований

$$\frac{\tilde{r}^2}{a^2} \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 \left\{ [\cos^2(\gamma - \beta_1 - \beta_2) - \right.$$

$$- 2 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos(\gamma - \beta_1 - \beta_2) + \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 - \cos^2 \beta_1 \cos^2 \beta_2] \tilde{r}^2 +$$

$$+ 2 \left[ \frac{(\tilde{a} \operatorname{tg}^2 \beta_1 + \operatorname{tg}^2 \beta_2) \cos \beta_1 \cos \beta_2}{\operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2} \cos(\gamma - \beta_1 - \beta_2) - \right.$$

$$\left. - (\cos^2 \beta_1 + \tilde{a} \cos^2 \beta_2) \right] \tilde{r} + \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2} \times$$

$$\left. \times \left[ \frac{\tilde{a}^2 \operatorname{tg}^2 \beta_1 \cos \beta_2}{\cos \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2} - 2 \cos(\gamma - \beta_1 - \beta_2) + \frac{\cos \beta_1 \operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_1 \cos \beta_2} \right] \right\} = 0.$$

Поскольку  $\tilde{r} \sin \beta_1 \sin \beta_2 \neq 0$ , то это уравнение равносильно следующему:

$$A\tilde{r}^2 + B\tilde{r} + C = 0, \quad (7.5.16)$$

где

$$A = [\cos(\gamma - \beta_1 - \beta_2) + \sin \beta_1 \sin \beta_2]^2 - \cos^2 \beta_1 \cos^2 \beta_2,$$

$$B = 2 \left[ \frac{(\tilde{a} \operatorname{tg}^2 \beta_1 + \operatorname{tg}^2 \beta_2) \cos \beta_1 \cos \beta_2}{\operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2} \cos(\gamma - \beta_1 - \beta_2) - \right.$$

$$\left. - (\cos^2 \beta_1 + \tilde{a} \cos^2 \beta_2) \right],$$

$$C = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2} \left[ \frac{\tilde{a}^2 \operatorname{tg} \beta_1 \cos \beta_2}{\cos \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2} - 2 \cos(\gamma - \beta_1 - \beta_2) + \frac{\cos \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2}{\operatorname{tg} \beta_1 \cos \beta_2} \right].$$

Коэффициенты уравнения (7.5.16) зависят от углов  $\gamma$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и параметра  $\tilde{a} = a_2/a_1$ . Величина угла  $\gamma$  задана по условиям маневра. Углы  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  определяются заданными величинами гиперболических избытков скоростей и выбираемыми радиусами перицентров для начальной и конечной и гиперболических орбит. Действительно, согласно (2.4.25) и (7.5.5) имеем

$$\sin \beta = \frac{1}{e} = \frac{1}{\frac{r_{\Pi} v_{\infty}^2}{1 + \frac{\mu}{r_{\Pi}}}} = \frac{1}{1 + v_{\Pi}} \quad \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right). \quad (7.5.17)$$

Определив коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , вычислим затем корни уравнения (7.5.16) и после подстановки  $\tilde{r}$  в (7.5.12) найдем нормированную величину потребного для маневра импульса скорости.

Предположим теперь возможность выбора  $v_{\Pi 1}$  и  $v_{\Pi 2}$ , т. е. радиусов перицентров начальной и конечной гиперболических орбит. Тогда подбором  $v_{\Pi 1}$  и  $v_{\Pi 2}$  можно обеспечить минимальную величину  $\Delta V$ ; будем называть такой маневр *оптимальным* (при заданных значениях  $\tilde{V}$  и  $\gamma$ ).

Рассмотрим теперь частный случай маневра, когда переход происходит в совпадающих перицентрах гиперболических орбит с помощью касательного к траектории импульса скорости. Условимся называть такой переход *перицентральный*. В этом случае  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Отсюда

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2 \quad (7.5.18)$$

и с учетом (7.5.14) получим

$$\cos^2 \beta_1 - \tilde{r} \sin^2 \beta_1 = \tilde{r} \sin \beta_1, \quad (7.5.14a)$$

$$\cos^2 \beta_2 - \frac{\tilde{r}}{\tilde{a}} \sin^2 \beta_2 = \frac{\tilde{r}}{\tilde{a}} \sin \beta_2. \quad (7.5.14б)$$

Исключив из этих соотношений величину  $\tilde{r}$ , найдем уравнение, связывающее  $\beta_1$  и  $\beta_2$ :

$$\sin \beta_1 = \frac{\sin \beta_2}{\tilde{a} + (1 - \tilde{a}) \sin \beta_2}. \quad (7.5.19)$$

Далее воспользуемся (7.5.18) для исключения угла  $\beta_1$  из (7.5.19), тогда получим уравнение для определения угла  $\beta_2$

$$\sin(\gamma - \beta_2) = \frac{\sin \beta_2}{\tilde{a} + (1 - \tilde{a}) \sin \beta_2}. \quad (7.5.20)$$

Решив это уравнение, вычислим по формуле (7.5.19) угол  $\beta_1$  и затем из соотношений (7.5.14a) или (7.5.14б) определим величину  $\tilde{r}$ , необходимую для расчета  $\Delta V$ .

Для перицентрального перехода с помощью касательного импульса скорости углы наклона траектории  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , поэтому

Формула (7.5.6) упрощается

$$\Delta V = |V_1 - V_2|,$$

и с учетом (7.5.7), (7.5.13) имеем в этом случае

$$\Delta \tilde{V} = \left| V \sqrt{\frac{2}{r} + 1} - V \sqrt{\frac{2}{r} + \frac{1}{a}} \right|. \quad (7.5.21)$$

Подставляя сюда найденное значение  $\tilde{r}$ , вычислим  $\Delta \tilde{V}$ .

Обсудим теперь результаты численных расчетов задачи одноимпульсного перелета между гиперболическими орбитами [75]. Заданными характеристиками маневра является отношение гиперболических избытков скоростей конечной и начальной орбит  $\tilde{V} = V_{\infty 2}/V_{\infty 1}$ , а также угол изменения направления движения  $\gamma$ . Эти величины отложены соответственно по осям абсцисс и ординат на рис. 7.30, 7.31. При построении графиков оказалось возможным ограничиться величинами  $\tilde{V} \geq 1$ , так как в случае  $0 < \tilde{V} < 1$  имеет место «зеркальное» решение с равными значениями потребной величины  $\Delta \tilde{V}$ . Выходными величинами являются потребное относительное приращение скорости  $\Delta \tilde{V} = \Delta V/V_{\infty 1}$  и параметр  $v_{\pi} = V_{\infty 1}^2 r_{\pi}/\mu = V_{\infty 1}^2/V_{\text{KF}}^2(r_{\pi})$ , который отвечает расстоянию наибольшего сближения с планетой.

На рис. 7.30 показаны характеристики перицентральных перелетов между гиперболическими орбитами. Ось ординат ( $\tilde{V} = 1$ ) отвечает предельному случаю, когда гиперболические избытки скорости равны, а перелет осуществляется без приложения импульса скорости только за счет надлежащего выбора угла

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{\gamma}{2}.$$

Ось абсцисс ( $\gamma = 0$ ) соответствует прямолинейной траектории, когда импульс скорости прикладывается за пределами сферы действия по направлению движения КА (или против направления движения). Теоретическая верхняя граница угла поворота траектории  $\gamma = 180^\circ$ . При приближении к ней имеем  $v_{\pi} \rightarrow 0$ ,  $\Delta \tilde{V} \rightarrow 0$ . Реальная верхняя граница должна определяться с учетом допустимого расстояния пролета, т. е. иметь вид кривых  $v_{\pi} = \text{const}$ .

На рис. 7.31 построены аналогичные зависимости для оптимальных переходов. В целом характер кривых  $\Delta \tilde{V} = \text{const}$  не меняется, хотя они несколько смещены вправо вниз по сравнению с рис. 7.30. Это объясняется уменьшением величины  $\Delta \tilde{V}$  при тех же значениях  $\tilde{V}$  и  $\gamma$ . Для оптимального маневра параметр  $v_{\pi}$  отвечает гиперболической орбите, по которой совершается пролет перицентра.

В качестве примера рассмотрим случай, когда необходимо обеспечить отношение гиперболических избытков скоростей конечной и начальной орбит  $\tilde{V} = 1,9$  и угол изменения направления движения  $\gamma = 55^\circ$ . Тогда в случае перицентрального перехода  $\Delta \tilde{V} = 0,5$ ,  $v_{\pi} = 0,7$ . При оптимальном переходе имеем  $\Delta \tilde{V} = 0,2$ ,  $v_{\pi} = 0,5$ .

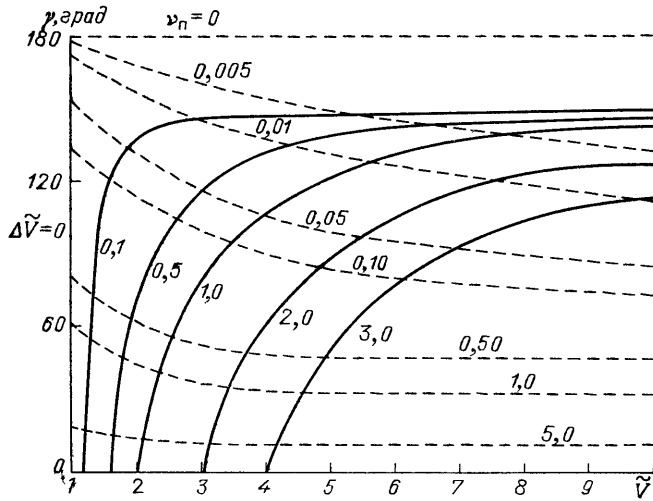


Рис. 7.30. Характеристики одноимпульсных периферических перелетов между гиперболическими орбитами

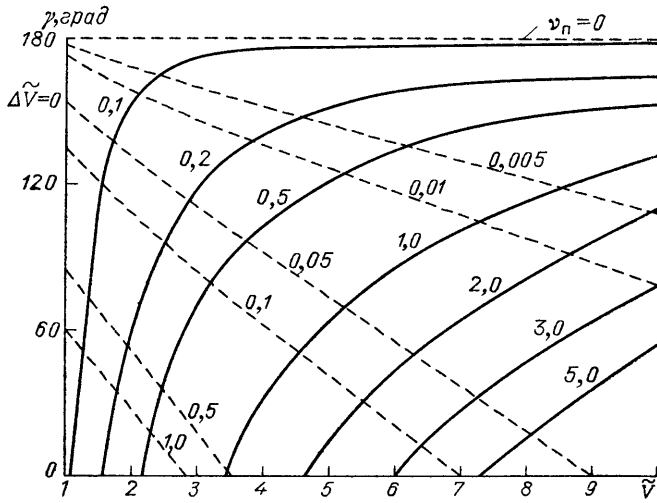


Рис. 7.31. Характеристики оптимальных одноимпульсных перелетов между гиперболическими орбитами

Оптимальный одноимпульсный переход можно реализовать только в том случае, когда наибольшее сближение с планетой отвечает требованиям безопасности полета. Если требования безопасности нарушаются, необходимо искать оптимальное решение с учетом ограничения на минимальное допустимое расстояние до поверхности планеты. В некоторых случаях это расстояние определяется требо-

ваниями программы полета. На рис. 7.32 в качестве примера построены характеристики одноимпульсного перелета при угле изменения направления движения  $\gamma = 90^\circ$  в зависимости от минимального расстояния сближения (параметра  $v_n$ ). Величина  $\Delta \tilde{V}$  достигает минимума при оптимальных маневрах. Результаты расчетов

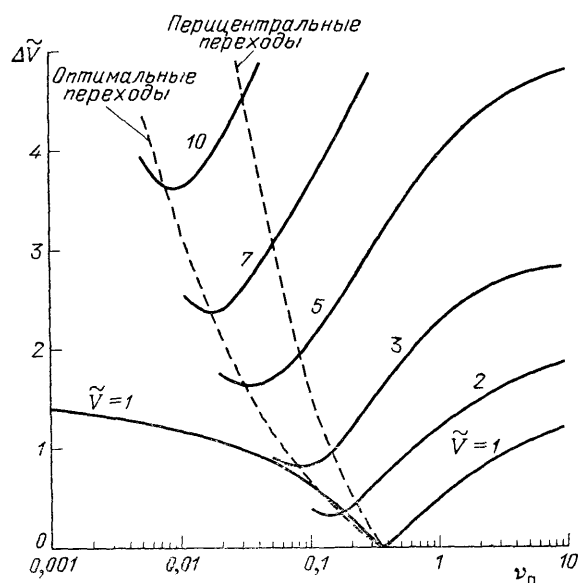


Рис. 7.32. Одноимпульсные переходы между гиперболическими орбитами при изменении направления движения на  $90^\circ$

показывают, что в области, лежащей правее линии перичентральных переходов, имеет место переход с восходящей ветви начальной гиперболической орбиты на восходящую ветвь конечной гиперболической орбиты (переход после перичентра). В области, лежащей левее линии перичентральных маневров, имеют место переходы с нисходящей ветви начальной гиперболической орбиты на нисходящую ветвь конечной гиперболической орбиты (переход от перичентра). В последней области находятся и оптимальные маневры при  $\tilde{V} > 1$ . В случае  $\tilde{V} < 1$  указанные области меняются местами.

Кривая, отвечающая условию  $\tilde{V} = 1$ , содержит точку, для которой  $\Delta \tilde{V} = 0$  и которая определяет траекторию облета планеты без приложения импульса скорости. Геометрические места точек, соответствующие оптимальным и перичентральным маневрам, включают ту же самую точку. При  $\tilde{V} = 1$  необходимый угол поворота можно получить без приложения импульса скорости, а лишь за счет выбора перичентрального расстояния.

Если  $\gamma < 90^\circ$ , то зависимости  $\Delta \tilde{V}(v_n, \tilde{V})$  становятся более пологими, а при  $\gamma < 90^\circ$  — более крутыми.



**7.5.3. Примеры последовательного облета небесных тел.** Обсудим наиболее интересные примеры реализации межпланетных траекторий с последовательным облетом нескольких небесных тел. 20 августа 1977 года был запущен американский КА «Вояджер-2» по маршруту Земля — Юпитер — Сатурн — Уран — Нептун. Такую траекторию часто называют «Гранд тур» (Grand Tour — «Великое путешествие»). Основные цели запуска включали исследование атмосфер Юпитера и Сатурна, Большого красного пятна Юпитера, колец Сатурна, гравитационных полей Юпитера и Сатурна, некоторых характеристик их спутников, а также планетной системы Урана [82]. Благоприятное расположение планет для реализации подобной траектории повторится только в 2154 году.

В табл. 7.6 представлены основные этапы полета КА «Вояджер-2» и минимальные расстояния до планет (по уточненным данным), а на рис. 7.33 показана схема траектории полета. После

Таблица 7.6

Основные этапы и параметры траектории полета КА «Вояджер-2»

Событие	Дата	Расстояние, км
Запуск с Земли	20 августа 1977 года	—
Пролет на минимальном расстоянии от Юпитера	9 июля 1979 года	700000
Пролет на минимальном расстоянии от Сатурна	25 августа 1981 года	101000
Пролет на минимальном расстоянии от Урана	24 января 1986 года	81200
Пролет на минимальном расстоянии от Нептуна	24 августа 1989 года	1300

сближения с Нептуном КА «Вояджер-2» должен покинуть Солнечную систему, двигаясь в направлении созвездия Козерога. В процессе полета КА «Вояджер-2» неоднократно проводилась коррекция траектории. При сближении с планетами была получена информация, представляющая большой научный интерес. Предполагается, что связь с КА «Вояджер-2» будет поддерживаться в течение 30 лет. За это время он удалится на расстояние ~15 млрд. км от Земли.

15 и 21 декабря 1984 года были запущены советские автоматические межпланетные станции (АМС) «Вега-1» и «Вега-2» в рамках международного проекта «Венера-Галлей» (сокращенно проект «Вега») [26]. Впервые реализована траектория последовательного сближения с планетой Венерой и кометой Галлея (рис. 7.34). Орбиты этих небесных тел существенно отличаются. Так, планета Галлея движется по сильно вытянутой гелиоцентрической орбите

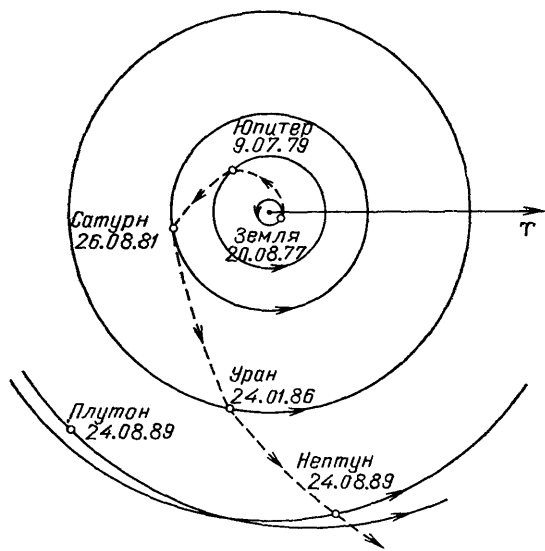


Рис. 7.33. Схема полета КА «Вояджер»

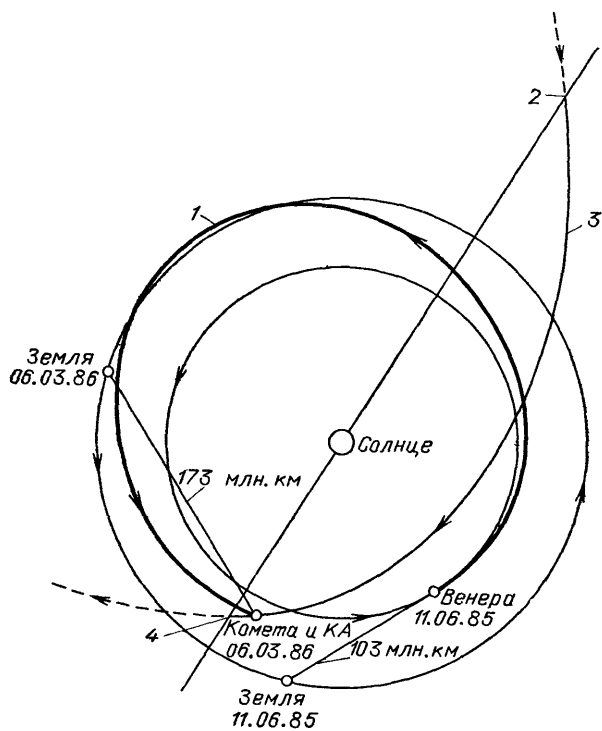


Рис. 7.34. Схема полета советских АМС «Вега» после сближения с Венерой: 1 — траектория КА «Вега»; 2 — восходящий узел орбиты кометы; 3 — орбита кометы Галлея; 4 — нисходящий узел орбиты кометы

с периодом обращения  $\sim 76$  лет. Афелий находится на расстоянии  $\sim 5,28$  млрд. км, а перигелий — на расстоянии  $\sim 88$  млн. км, т. е. внутри орбиты Венеры.

Уникальная возможность перелета АМС «Вега» по маршруту Земля — Венера — комета Галлея с небольшими энергетическими затратами достигнута благодаря использованию гравитационного маневра при сближении с Венерой и несущественной коррекции скорости для перевода АМС на траекторию сближения с кометой Галлея.

В середине июня 1985 года от каждой АМС был отделен спускаемый аппарат, совершивший посадку на поверхность Венеры. При прохождении атмосферы планеты от спускаемого аппарата отделялся аэростатный зонд для автономного плавания в облачном слое на высоте около 50 км. Пролетный аппарат использовался для ретрансляции на Землю информации, поступавшей от спускаемого аппарата и аэростатного зонда. После этого оба пролетных аппарата с помощью активного маневра были направлены на траекторию сближения с кометой Галлея. Сближение произошло в первой половине марта 1986 года. Минимальное расстояние составило  $\sim 10$  тыс. км, а относительная скорость достигала  $\sim 80$  км/с. В результате проведенных сеансов исследования кометы Галлея получена весьма ценная научная информация.

Сложность решения задачи столь тесного сближения АМС с кометой Галлея была обусловлена тем, что точность априорного знания траектории движения кометы оказалась на два порядка хуже требуемой. Поэтому уже в процессе полета АМС «Вега-1» и «Вега-2» совместными усилиями советских и зарубежных ученых, осуществлявших наземные наблюдения за движением кометы, удалось обеспечить требуемую точность только к моменту сближения. Вместе с тем сами АМС в сеансе высокоточных измерений угловых координат кометы Галлея при максимальном сближении с ней позволили существенно повысить точность определения положения кометы. Эти результаты были необходимы для оперативного наведения в точку наибольшего сближения с кометой Галлея европейского КА «Джотто», который осуществил сближение через пять дней после пролета кометы советскими АМС «Вега».

## § 7.6. Полет в сторону Солнца

Обсудим задачу полета КА в сторону Солнца, центрального притягивающего тела нашей планетной системы. Исследование околосолнечного космического пространства представляет несомненный практический интерес, однако выведение КА в эту область требует больших энергетических затрат.

Возможны следующие основные схемы геоцентрической траектории КА в сторону Солнца:

1. Полет по траектории типа Гоманна.

2. Полет по биэллиптической траектории с предварительным удалением от Солнца.

3. Полет по биэллиптической траектории с гравитационным (активно-гравитационным) маневром в сфере действия внешней планеты, имеющей сильное гравитационное поле.

При запуске в сторону Солнца не требуется вывести КА на близкую гелиоцентрическую круговую орбиту. Поэтому первая схема полета реализуется с помощью одного (тормозного) импульса скорости, который сообщается КА на орбите Земли. Вторая схема требует двух импульсов скорости. Первый (разгонный) сообщается КА на орбите Земли, а второй (тормозной) сообщается КА в афелии траектории полета. Третья схема отличается тем, что второй импульс скорости заменяется гравитационным (или активно-гравитационным) маневром с целью уменьшения потребного запаса топлива.

Перечисленные схемы полета отличаются от аналогичных маневров при перелете между круговыми орбитами отсутствием последнего импульса скорости, который обеспечивает выход на заданную круговую орбиту. В результате существенно снижаются потребные энергетические затраты. Вместе с тем области целесообразного применения двух первых схем полета, определенные в гл. 5, могут существенно трансформироваться.

Оценим потребные энергетические затраты и время движения для каждой из обсуждаемых схем полета и выявим области их рационального применения.

С целью упрощения внешней задачи, т. е. расчета гелиоцентрического участка траектории, будем полагать орбиту Земли круговой радиуса  $r_3$ .

Решение внутренней задачи, т. е. расчет геоцентрического участка траектории, не зависит от выбранной схемы полета на гелиоцентрическом участке.

**7.6.1. Полет по траектории типа Гоманна.** Эта схема предполагает использование на гелиоцентрическом участке траектории типа Гоманна, афелий которой расположен на уровне орбиты Земли ( $r_3$ ), а перигелий — на заданном минимальном расстоянии от Солнца ( $r_n$ ). Потребный импульс скорости по существу является гиперболическим избытком скорости в геоцентрическом движении КА на выходе из сферы действия Земли и вычисляется по формуле вида (5.1.41):

$$V_\infty = V_{крз} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_n}{r_n + r_3}} \right),$$

или

$$\tilde{V}_\infty = 1 - \sqrt{\frac{2\tilde{r}_n}{1 + \tilde{r}_n}}. \quad (7.6.1)$$

Здесь  $V_{крз}$  — круговая скорость орбитального движения Земли,  $\tilde{V}_\infty = V_\infty/V_{крз}$ ,  $\tilde{r}_п = r_п/r_з$ . При такой нормировке все расстояния измеряются в астрономических единицах (а. е.).

Вектор гиперболического избытка скорости КА на границе сферы действия Земли должен быть направлен против вектора орбитальной скорости Земли. Это требование удовлетворяется путем соответствующего выбора промежуточной круговой орбиты ИСЗ и точки перевода КА на гиперболическую орбиту, по которой происходит полет до сферы действия Земли.

Используя соотношение (2.5.10), получим формулу для расчета времени движения на гелиоцентрическом участке от афелия до перигелия:

$$t_c = \frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu_c}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\omega_{орб}} (1 + \tilde{r}_п)^{3/2},$$

где  $a = (r_п + r_з)/2$  — большая полуось гелиоцентрической орбиты,  $\mu_c$  — произведение постоянной притяжения на массу Солнца,  $\omega_{орб}$  — угловая скорость орбитального гелиоцентрического движения Земли.

Пусть

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{орб}}$$

— сидерический год; тогда время полета на гелиоцентрическом участке, исчисляемое в годах,

$$\tilde{t}_c = \frac{t_c}{T} = \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 + \tilde{r}_п)^{3/2}. \quad (7.6.2)$$

Зависимости  $\tilde{V}_\infty(\tilde{r}_п)$  и  $\tilde{t}_c(\tilde{r}_п)$  для гелиоцентрического участка полета к Солнцу по траектории типа Гоманна приведены на рис. 7.35. Видно, что при изменении  $\tilde{r}_п$  в диапазоне  $0 \div 1$  а. е. время полета находится в пределах  $0,177 \div 0,5$  года. Величина  $\tilde{V}_\infty$  при этом уменьшается от 1 до 0.

**7.6.2. Полет по биэллиптической траектории.** Схема полета по биэллиптической траектории с предварительным удалением от Солнца была предложена А. А. Штернфельдом [61] как более экономичная для близкого облета Солнца. Оценим потребные энергетические затраты для реализации такой схемы полета на гелиоцентрическом участке.

Как уже отмечалось, биэллиптическая траектория может быть реализована с помощью двух импульсов скорости. Посредством первого импульса КА переводится с круговой орбиты Земли (радиуса  $r_з$ ) на эллиптическую орбиту с радиусом афелия  $r_a > r_з$ . Этот

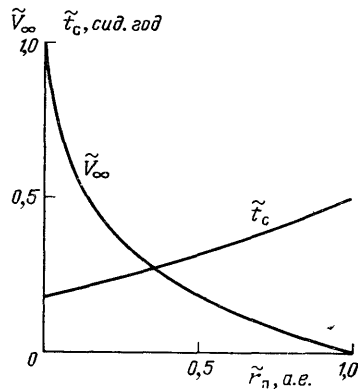


Рис. 7.35. Характеристики гелиоцентрического участка полета к Солнцу по траектории типа Гоманна

импульс скорости по существу является гиперболическим избытком скорости в геоцентрическом движении КА и вычисляется по формуле

$$\Delta V_1 = V_\infty = V_{\text{крЗ}} \left( \sqrt{\frac{2r_a}{r_3 + r_a}} - 1 \right),$$

или

$$\Delta \tilde{V}_1 = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a}} - 1,$$

где  $\Delta \tilde{V}_1 = \Delta V_1 / V_{\text{крЗ}}$ ,  $\tilde{r}_a = r_a / r_3$ .

В афелии траектории за счет второго импульса скорости, направленного против движения, КА переводится на соосную эллиптическую орбиту с заданным радиусом перигелия  $r_\Pi$ . Суммарное приращение скорости на маневр вычисляется по формуле вида (5.2.1):

$$\Delta V_\Sigma = \sqrt{\frac{\mu_C}{r_3}} \left( \sqrt{\frac{r_a}{r_3 + r_a}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{\mu_C}{r_a}} \left( \sqrt{\frac{2r_3}{r_3 + r_a}} - \sqrt{\frac{2r_\Pi}{r_\Pi + r_a}} \right),$$

или

$$\Delta \tilde{V}_\Sigma = \frac{\Delta V_\Sigma}{V_{\text{крЗ}}} = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_a}} \left( \sqrt{\frac{2}{1 + \tilde{r}_a}} - \sqrt{\frac{2\tilde{r}_\Pi}{\tilde{r}_\Pi + \tilde{r}_a}} \right). \quad (7.6.3)$$

При заданной относительной величине радиуса перигелия  $\tilde{r}_\Pi$  суммарное нормированное приращение скорости  $\Delta \tilde{V}_\Sigma$  будет зависеть от величины  $\tilde{r}_a > 1$ . Исследуем поведение функции  $\Delta \tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a)$  при различных значениях параметра  $\tilde{r}_\Pi$ . С этой целью вычислим производную

$$\frac{d\Delta \tilde{V}_\Sigma}{d\tilde{r}_a} = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{r}_a\tilde{r}_a}} \left( \sqrt{\frac{r_\Pi}{\tilde{r}_\Pi + \tilde{r}_a}} \frac{\tilde{r}_\Pi + 2\tilde{r}_a}{\tilde{r}_\Pi + \tilde{r}_a} - \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{r}_a}} \right) \quad (7.6.4)$$

и определим, при каких условиях эта производная обращается в нуль. Видно, что

$$\lim_{\tilde{r}_a \rightarrow \infty} \frac{d\Delta \tilde{V}_\Sigma}{d\tilde{r}_a} = 0.$$

Кроме того, производная (7.6.4) обращается в нуль, если равно нулю соотношение, стоящее в скобках. Положим

$$\sqrt{\frac{\tilde{r}_\Pi}{\tilde{r}_\Pi + \tilde{r}_a}} \frac{\tilde{r}_\Pi + 2\tilde{r}_a}{\tilde{r}_\Pi + \tilde{r}_a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{r}_a}}$$

и, возводя в квадрат, получим после несложных преобразований

$$(4\tilde{r}_\Pi - 1)\tilde{r}_a^3 + (\tilde{r}_\Pi + 4\tilde{r}_\Pi^2)\tilde{r}_a^2 + (\tilde{r}_\Pi^2 + \tilde{r}_\Pi^3)\tilde{r}_a = 0.$$

Здесь  $\tilde{r}_a \neq 0$ , поэтому должно выполняться условие

$$(4\tilde{r}_\pi - 1)\tilde{r}_a^2 + (\tilde{r}_\pi + 4\tilde{r}_\pi^2)\tilde{r}_a + \tilde{r}_\pi^2 + \tilde{r}_\pi^3 = 0. \quad (7.6.5)$$

Если  $4\tilde{r}_\pi - 1 \geq 0$ , то уравнение (7.6.5) не имеет положительных корней. Если

$$\tilde{r}_\pi < \frac{1}{4} \text{ а. е.}, \quad (7.6.6)$$

то уравнение (7.6.5) имеет единственный положительный корень

$$\tilde{r}_a^* = \frac{\tilde{r}_\pi (1 + 4\tilde{r}_\pi + \sqrt{5 - 4\tilde{r}_\pi})}{2(1 - 4\tilde{r}_\pi)}. \quad (7.6.7)$$

Установим, при каких значениях  $\tilde{r}_\pi$  выполняется требуемое условие  $\tilde{r}_a \geq 1$ . Используя (7.6.7), запишем это условие в виде

$$\tilde{r}_\pi \sqrt{5 - 4\tilde{r}_\pi} \geq 2 - 9\tilde{r}_\pi - 4\tilde{r}_\pi^2. \quad (7.6.8)$$

Для рассматриваемых значений  $\tilde{r}_\pi \geq 0$  левая часть (7.6.8) определена и неотрицательна в диапазоне  $0 \leq \tilde{r}_\pi \leq 1,25$  а. е., причем в граничных точках она обращается в нуль. Правая часть (7.6.8) определена при всех значениях  $\tilde{r}_\pi \geq 0$ , но неотрицательна только в диапазоне  $0 \leq \tilde{r}_\pi \leq 0,2038$  а. е. Она обращается в нуль при  $\tilde{r}_\pi = 0,2038$  а. е. и равна 2 при  $\tilde{r}_\pi = 0$ . Поэтому знак равенства в соотношении (7.6.8) возможен при единственном значении  $\tilde{r}_\pi^*$ , принадлежащем диапазону  $0 < 0,2038$  а. е. Ограничив таким образом диапазон существования  $\tilde{r}_\pi^*$ , возведем обе части соотношения (7.6.8) в квадрат и после некоторых преобразований получим

$$(\tilde{r}_\pi^3 + 5\tilde{r}_\pi^2 + 5\tilde{r}_\pi - 1)(4\tilde{r}_\pi - 1) \leq 0.$$

С учетом (7.6.6) второй сомножитель отрицателен. Отсюда видно, что условие  $\tilde{r}_a \geq 1$  выполняется при

$$\tilde{r}_\pi^3 + 5\tilde{r}_\pi^2 + 5\tilde{r}_\pi - 1 \geq 0. \quad (7.6.9)$$

Уравнение

$$\tilde{r}_\pi^3 + 5\tilde{r}_\pi^2 + 5\tilde{r}_\pi - 1 = 0$$

имеет единственный положительный корень

$$\tilde{r}_\pi^* = 0,1701 \text{ а. е.}$$

Таким образом, для значений параметра, принадлежащих диапазону

$$0,1701 \text{ а. е.} \leq \tilde{r}_\pi < 0,25 \text{ а. е.}, \quad (7.6.10)$$

существует такое значение  $\tilde{r}_a^*$ , вычисляемое по формуле (7.6.7) и удовлетворяющее условию  $\tilde{r}_a \geq 1$ , которое обращает в нуль произ-

водную (7.6.4). Для всех остальных значений параметра  $\tilde{r}_n$ , т. е. при

$$0 \leq \tilde{r}_n < 0,1701 \text{ а. е. и } 0,25 \text{ а. е.} < \tilde{r}_n < 1 \text{ а. е.}, \quad (7.6.11)$$

производная  $d\Delta\tilde{V}_\Sigma/d\tilde{r}_a$  не обращается в нуль, и зависимость  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a)$  является монотонной.

Покажем, что в точке  $\tilde{r}_a^*$  достигается максимум зависимости  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(r_a)$ . Непосредственной подстановкой значения (7.6.7) в (7.6.4) можно убедиться, что

$$\left. \frac{d\Delta\tilde{V}_\Sigma}{d\tilde{r}_a} \right|_{\tilde{r}_a^*} = 0. \quad (7.6.12)$$

Определим знак второй производной

$$\left. \frac{d^2\Delta\tilde{V}_\Sigma}{d\tilde{r}_a^2} \right|_{\tilde{r}_a^*}.$$

Дифференцируя (7.6.4) по  $\tilde{r}_a$ , получим с учетом (7.6.12):

$$\left. \frac{d^2\Delta\tilde{V}_\Sigma}{d\tilde{r}_a^2} \right|_{\tilde{r}_a^*} = -\frac{1}{V(2\tilde{r}_a^*)^3} \left[ \frac{(2\tilde{r}_a^* - \tilde{r}_n) V\tilde{r}_n}{V(\tilde{r}_n + \tilde{r}_a^*)^5} + \frac{1}{V(1 + \tilde{r}_a^*)^3} \right] < 0.$$

Следовательно, при  $\tilde{r}_a = \tilde{r}_a^*$  зависимость  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a)$  имеет максимум, если параметр  $\tilde{r}_n$  принадлежит диапазону (7.6.10). В таком случае наименьшая величина  $\Delta\tilde{V}_\Sigma$  будет достигаться либо при  $\tilde{r}_a = 1$  а. е., когда биэллиптическая траектория трансформируется в траекторию типа Гоманна, либо при  $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ , когда реализуется предельная биэллиптическая траектория. Точно так же определяется оптимальная по энергетике схема полета, если параметр  $\tilde{r}_n$  принадлежит диапазонам (7.6.11), когда зависимость  $\Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a)$  имеет монотонный характер.

Сравним потребное приращение скорости на маневр в случаях перелетов по траектории типа Гоманна ( $\tilde{r}_a = 1$  а. е.) и по предельной биэллиптической траектории ( $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ ). Согласно (7.6.3) имеем

$$\Delta\tilde{V}_\Sigma(1) = 1 - \sqrt{\frac{2\tilde{r}_n}{1 + \tilde{r}_n}}$$

и

$$\lim_{\tilde{r}_a \rightarrow \infty} \Delta\tilde{V}_\Sigma(\tilde{r}_a) = \sqrt{2} - 1.$$

Условие

$$\Delta\tilde{V}_\Sigma(1) \leq \sqrt{2} - 1,$$

или

$$1 - \sqrt{\frac{2\tilde{r}_n}{1 + \tilde{r}_n}} \leq \sqrt{2} - 1,$$



можно после избавления от квадратного корня привести к виду

$$\tilde{r}_n \geq \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} - 1)},$$

или

$$\tilde{r}_n \geq 0,2071 \text{ а. е.}$$

Итак, показано, что при близком пролете Солнца, когда

$$0 \leq \tilde{r}_n \leq 0,2071 \text{ а. е.}, \quad (7.6.13)$$

более экономичной оказывается биэллиптическая траектория с достаточно большим радиусом афелия. При дальнем пролете Солнца, когда

$$0,2071 \text{ а. е.} < \tilde{r}_n < 1 \text{ а. е.}, \quad (7.6.14)$$

более экономичной оказывается траектория типа Гоманна.

Время полета по биэллиптической траектории к Солнцу складывается из времен полета по двум полуэллипсам и вычисляется по формуле, аналогичной (7.6.2):

$$t_c = \frac{\pi}{2\sqrt{2\mu_c}} [(r_3 + r_a)^{3/2} + (r_n + r_a)^{3/2}],$$

или в единицах сидерического года

$$\begin{aligned} \tilde{t}_c &= \\ &= \frac{t_c}{T} = \frac{1}{4\sqrt{2}} [(1 + \tilde{r}_a)^{3/2} + (\tilde{r}_n + \tilde{r}_a)^{3/2}]. \end{aligned} \quad (7.6.15)$$

На рис. 7.36 показаны характеристики биэллиптической траектории полета к Солнцу:  $\tilde{V}_\infty$ ,  $\Delta\tilde{V}_z$  и  $\tilde{t}_c$ . Видно, что при  $\tilde{r}_n = 0,1 \div 0,2$  а. е. уменьшение радиуса от бесконечно большой величины до  $\tilde{r}_a = 20$  а. е. приводит к увеличению  $\Delta\tilde{V}_z$  не более чем на 0,015. При этом время полета сокращается до 33 лет.

Отметим, что время полета по биэллиптической траектории слабо зависит от величины  $\tilde{r}_n$ . Например, уменьшение  $\tilde{r}_n$  от 0,5 а. е. до 0,1 а. е. приводит к сокра-

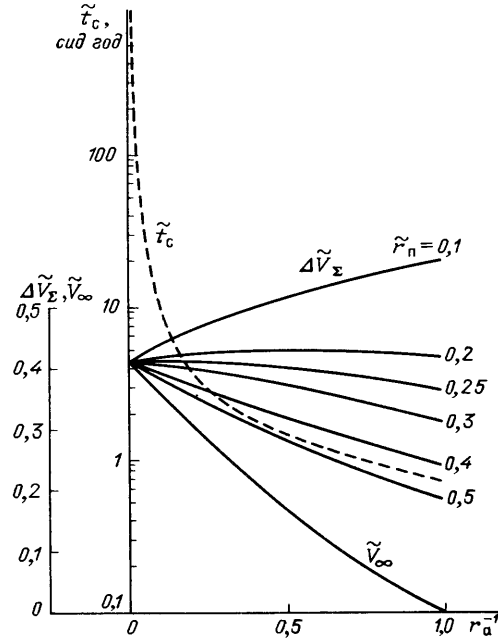


Рис 7.36 Характеристики гелиоцентрического участка полета к Солнцу по биэллиптической траектории

щению времени полета на  $0,1 \div 0,5$  года соответственно для  $\tilde{r}_a = 1 - 20$  а. е. Построенная на рис. 7.36 зависимость  $\tilde{t}_c(\tilde{r}_a^{-1})$  отвечает значению  $\tilde{r}_n = 0,1$  а. е., но ею можно пользоваться для любых значений  $\tilde{r}_n$  в рассматриваемом диапазоне  $\tilde{r}_n = 0,1 \div 0,5$  а. е.

Если время полета не должно превышать 10 лет, то следует ограничить радиус афелия  $\tilde{r}_a$  величиной порядка 9 а. е. Это вызывает увеличение второго импульса скорости на 0,1 в случае  $\tilde{r}_n = 0,2$  а. е. и на 0,3 в случае  $\tilde{r}_n = 0,1$  а. е. по сравнению с траекторией, имеющей бесконечно большой радиус афелия.

Если же время полета не должно превышать 5 лет, то в случае  $\tilde{r}_n = 0,2$  а. е. второй импульс скорости увеличивается на 0,15, а в случае  $\tilde{r}_n = 0,1$  а. е. увеличивается на 0,35.

**7.6.3. Полет по бизелинтической траектории с гравитационным маневром в афелии.** Второй (тормозной) импульс скорости, сообщаемый КА в афелии, можно частично или полностью заменить гравитационным маневром, если согласовать момент достижения афелия с входом в сферу действия планеты, имеющей сильное гравитационное поле.

Для получения эффекта уменьшения гелиоцентрической скорости КА облет планеты должен совершаться против ее орбитального движения (аналогично траектории облета Луны с последующим возвращением к Земле). Задача гравитационного маневра подробно рассмотрена в п. 7.5.1. Было показано, что при оптимальных условиях входа в сферу действия планеты максимальное возможное приращение скорости равно круговой скорости в перицентре. Если подлет КА к сфере действия планеты происходит по траектории типа Гоманна, то приращение скорости за счет гравитационного маневра существенно уменьшается.

Для полета к Солнцу целесообразно использовать гравитационное поле Юпитера. Так, при оптимальном маневре максимальное возможное приращение скорости КА может достигать 42,7 км/с. При входе в сферу действия Юпитера по параболической траектории возможное приращение скорости КА за счет гравитационного маневра уменьшается до 30 км/с. Если же подлет КА к сфере действия Юпитера происходит по траектории типа Гоманна, возможное приращение скорости составляет 10 км/с. Между тем, если рассматривается задача пролета Солнца на расстоянии  $\tilde{r}_n = 0,2$  а. е., а радиус афелия  $\tilde{r}_a = 5,2$  а. е. достигает орбиты Юпитера, то тормозной импульс скорости в афелии траектории равен 3,76 км/с (при этом время полета на гелиоцентрическом участке 4,7 лет). Следовательно, возможности коррекции скорости КА за счет гравитационного маневра в сфере действия Юпитера оказываются существенно больше, чем требуется для реализации такой траектории.

Избыточные возможности гравитационного маневра целесообразно использовать, например, для сокращения времени полета к Солнцу. В этом случае траектория будет несколько отличаться от бп-

эллиптической. Так, в работе [90] показано, что, увеличивая начальную скорость КА при старте с орбиты ИСЗ и используя гравитационный маневр в сфере действия Юпитера, можно обеспечить пролет Солнца на расстоянии  $\tilde{r}_n = 0,2$  а. е. через 3 года после старта.

Маневр в гравитационном поле Юпитера можно использовать также для выведения КА на траекторию пролета вблизи Солнца с выходом из плоскости эклиптики [60].

Еще большие возможности обеспечивает активно-гравитационный маневр, рассмотренный в п. 7.5.2.

Использование других планет для гравитационного маневра КА, в частности Сатурна, едва ли оправдано из-за резкого возрастания продолжительности полета.

**7.6.4. Расчет геоцентрического участка траектории полета к Солнцу.** Для расчета геоцентрического участка траектории к Солнцу (внутренняя задача) исходным является заданный вектор гиперболического избытка скорости  $V_\infty$  на границе сферы действия Земли. Как уже отмечалось, в случае траектории типа Гоманна вектор скорости  $V_\infty$  должен быть направлен против вектора  $V_z$  орбитальной скорости Земли, а в случае биэллиптической траектории вектор  $V_\infty$  должен быть коллинеарен  $V_z$ . Величина вектора  $V_\infty$  зависит от требуемого минимального расстояния до Солнца  $r_n$ .

Поскольку в рассматриваемой задаче вектор  $V_\infty$  является свободным, его можно поместить в начало геоцентрической системы координат и использовать для задания направления асимптоты геоцентрической гиперболической орбиты. Величина  $V_\infty^2$  определяет постоянную интеграла энергии гиперболической орбиты.

Будем полагать, что точка старта на поверхности Земли фиксирована, а азимут запуска задан по соображениям безопасного выведения. Тем самым однозначно определяется наклонение получаемой промежуточной околоземной орбиты, на которую предварительно выводится КА. Момент старта выбирается так, чтобы вектор  $V_\infty$  оказался в плоскости промежуточной орбиты. Это всегда возможно, если только склонение вектора  $V_\infty$  не больше наклонения получаемой орбиты. С учетом суточного вращения Земли каждые 24 часа существуют два благоприятных момента для запуска на промежуточную орбиту. Обычно в качестве промежуточной выбирают орбиту высотой 200—300 км. После выхода на промежуточную орбиту КА должен достигнуть заданной точки старта для перехода на гиперболическую орбиту. Такая точка существует на каждом витке. Она определяется условием получения заданного вектора  $V_\infty$ .

Будем рассматривать одноимпульсный переход КА с круговой орбиты в перицентр гиперболической орбиты.

Величина потребного приращения скорости для перевода КА с круговой орбиты на гиперболическую определяется по формуле

$$\Delta V_0 = V_r(r_0) - V_{кр}(r_0) = \sqrt{2V_{кр}^2(r_0) + V_\infty^2} - V_{кр}(r_0),$$

или

$$\Delta \widehat{V}_0 = \frac{\Delta V_0}{V_{\text{кр}}(r_0)} = \sqrt{2 + \widehat{V}_\infty^2} - 1, \quad (7.6.16)$$

где  $r_0$  — радиус круговой околоземной орбиты,  $V_r(r_0)$  — скорость в перигее гиперболической орбиты,  $V_{\text{кр}}(r_0)$  — круговая скорость на околоземной орбите,  $\widehat{V}_\infty = V_\infty/V_{\text{кр}}(r_0)$ .

Время полета по гиперболической траектории от перигея до сферы действия Земли определим по формуле (2.5.19)

$$t_d = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_3}} (e \operatorname{sh} H_d - H_d), \quad (7.6.17)$$

где  $a$  — продольная полуось гиперболической орбиты,  $e$  — ее эксцентриситет,  $\mu_3$  — произведение постоянной притяжения на массу Земли,  $H_d$  — вспомогательная величина, вычисляемая из условия (2.5.17)

$$\operatorname{th} \frac{H_d}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_d}{2}. \quad (7.6.18)$$

Здесь  $\vartheta_d$  — истинная аномалия, соответствующая точке пересечения гиперболической орбиты со сферой действия Земли.

Для расчета геоцентрического участка траектории полета определяющей является величина  $V_\infty$ , поэтому выразим все постоянные, входящие в соотношения (7.6.17) и (7.6.18), через  $V_\infty$ . С учетом (2.4.33) преобразуем постоянный множитель в (7.6.17)

$$\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_3}} = \frac{\mu_3}{V_\infty^3}. \quad (7.6.19)$$

Для эксцентриситета гиперболической орбиты имеем согласно (2.4.25)

$$e = 1 + \frac{r_0}{a} = 1 + \widehat{V}_\infty^2. \quad (7.6.20)$$

Используя (7.6.19), (7.6.20), перепишем соотношение (7.6.17) в виде

$$t_d = \frac{\mu_3}{V_\infty^3} [(1 + \widehat{V}_\infty^2) \operatorname{sh} H_d - H_d],$$

или

$$\widehat{t}_d = \frac{1}{2\pi \widehat{V}_\infty^3} [(1 + \widehat{V}_\infty^2) \operatorname{sh} H_d - H_d], \quad (7.6.21)$$

где

$$\widehat{t}_d = t_d/T_0, \quad T_0 = \frac{2\pi r_0^{3/2}}{\sqrt{\mu_3}}$$

— период обращения на промежуточной круговой околоземной орбите.

Теперь с помощью (7.6.20) исключим эксцентриситет из (7.6.18):

$$\operatorname{th} \frac{H_d}{2} = \frac{\widehat{V}_\infty^2}{\sqrt{2 + \widehat{V}_\infty^2}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_d}{2}. \quad (7.6.22)$$

Величину угла  $\vartheta_d$  найдем из условия

$$\cos \vartheta_d = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_d} - 1 \right)$$

и далее

$$\cos \vartheta_d = \frac{1}{1 + \widehat{V}_\infty^2} \left( \frac{2 + \widehat{V}_\infty^2}{\widehat{r}_d} - 1 \right) \quad (0 < \vartheta_0 < \pi), \quad (7.6.23)$$

где  $\widehat{r}_d = r_d/r_0$ ,  $r_d$  — радиус сферы действия Земли.

Формулы (7.6.16) и (7.6.21)–(7.6.23) позволяют вычислить относительные величины потребного приращения скорости  $\Delta \widehat{V}$  и времени полета  $\widehat{t}_d$  на геоцентрическом участке траектории в зависимости от требуемой величины относительного гиперболического избытка скорости  $\widehat{V}_\infty$ .

Значения  $\widehat{V}_\infty$  для внешней задачи и  $\widetilde{V}_\infty$  для внутренней задачи связаны условием

$$\frac{\widetilde{V}_\infty}{\widehat{V}_\infty} = \frac{V_{кр}(r_0)}{V_{крЗ}}.$$

Если высота околоземной круговой орбиты  $H_{кр} = 200$  км, а  $V_{крЗ} = 29,79$  км/с, то

$$\frac{\widetilde{V}_\infty}{\widehat{V}_\infty} = 0,26.$$

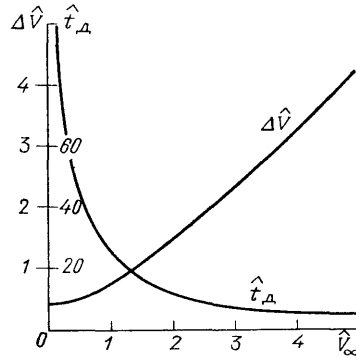


Рис 7.37. Характеристики траектории полета с круговой орбиты ИСЗ до сферы действия Земли

На рис. 7.37 построены характеристики гиперболической орбиты внутри сферы действия Земли. Величина  $\widehat{t}_d$  существенно уменьшается с увеличением  $\widehat{V}_\infty$ . Однако даже для малых значений  $\widehat{V}_\infty \approx 0,5$  имеем  $t_d \approx 40$ . Период обращения на круговой околоземной орбите высотой 200 км равен 1,5 час. Отсюда время полета КА с круговой орбиты до сферы действия Земли составляет всего 2,5 сут, что существенно меньше времени полета на гелиоцентрическом участке траектории. Поэтому во многих задачах можно пренебречь продолжительностью геоцентрического участка по сравнению с гелиоцентрическим.

Рассмотренная модель движения КА в центральном поле притяжения является одной из наиболее простых и хорошо изученных в механике космического полета. Эта модель во многих случаях описывает основные закономерности движения и позволяет установить ряд качественных характеристик движения. Вместе с тем в некоторых случаях помимо силы притяжения центрального тела приходится учитывать и другие силы, действующие на КА. Например, силу притяжения второго небесного тела или нескольких тел, силы, обусловленные нецентральностью поля притяжения, аэродинамические силы при движении в атмосфере, силу светового солнечного давления, наконец, силу, которая порождается магнитным полем центрального тела, и др. Все силы, кроме силы притяжения центрального тела, принято называть *возмущающими*, а движение под дополнительным воздействием этих сил — *возмущенным движением*. Дифференциальные уравнения возмущенного движения КА можно решать методом численного интегрирования. Такой метод особенно эффективен для конкретных расчетов, а не общих исследований. Он требует затрат машинного времени и не всегда позволяет выявить общие закономерности. Поэтому при анализе возмущенного движения часто пользуются приближенными методами, позволяющими найти решение в общем виде и исследовать его. Во многих задачах оказывается эффективным комбинировать аналитические методы с численными расчетами.

### § 8.1. Метод оскулирующих элементов

Невозмущенное движение в центральном поле притяжения описывается дифференциальным уравнением вида (2.1.7)

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = - \frac{\mu}{\rho^2} \rho^0, \quad (8.1.1)$$

где  $\rho^0 = \rho/\rho$  — единичный вектор, а для возмущенного движения можно записать

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}^0 + \mathbf{a}. \quad (8.1.2)$$

Здесь  $\mathbf{a}$  — ускорение, порождаемое возмущающими силами (возмущающее ускорение),  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$ .

**8.1.1. Оскулирующая орбита.** Если, начиная с некоторого момента времени  $t^*$ , возмущающее ускорение  $\mathbf{a}$  обращается в нуль, то уравнение (8.1.2) принимает вид (8.1.1). В момент времени  $t^*$  возмущенное движение не отличается от невозмущенного, и обе орбиты (возмущенная и невозмущенная) будут соприкасаться:

$$\mathbf{r}(t^*) = \boldsymbol{\rho}(t^*), \quad \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t^*} = \left. \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \right|_{t^*}. \quad (8.1.3)$$

Полученную невозмущенную орбиту принято называть *оскулирующей орбитой*, соответствующей моменту времени  $t^*$ . Изменяя момент времени  $t^*$ , получим семейство оскулирующих орбит, для которых фактическая возмущенная орбита является огибающей.

Каждая оскулирующая орбита полностью описывается своими *оскулирующими элементами*  $p, e, i, \Omega, \omega, t_{\text{п}}$ , т. е. любой точке фактической орбиты отвечает определенный набор оскулирующих элементов. В случае непрерывности изменения оскулирующих орбит оскулирующие элементы являются непрерывными функциями времени  $p(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), t_{\text{п}}(t)$ . Согласно условиям (8.1.3), в каждый момент времени  $t$  по текущим значениям оскулирующих элементов можно определить векторы  $\mathbf{r}(t)$  и  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ , которые полностью характеризуют движение по фактической орбите. Таким образом, определение зависимостей от времени (или любого другого аргумента) оскулирующих элементов равносильно определению возмущенной орбиты при действии любых возмущающих сил. Тогда система уравнений движения принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= f_1(s, p, e, i, \Omega, \omega, t_{\text{п}}, \mathbf{a}), \\ \frac{de}{ds} &= f_2(s, p, e, i, \Omega, \omega, t_{\text{п}}, \mathbf{a}), \\ \frac{di}{ds} &= f_3(s, p, e, i, \Omega, \omega, t_{\text{п}}, \mathbf{a}), \\ \frac{d\Omega}{ds} &= f_4(s, p, e, i, \Omega, \omega, t_{\text{п}}, \mathbf{a}), \\ \frac{d\omega}{ds} &= f_5(s, p, e, i, \Omega, \omega, t_{\text{п}}, \mathbf{a}), \\ \frac{dt_{\text{п}}}{ds} &= f_6(s, p, e, i, \Omega, \omega, t_{\text{п}}, \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

Здесь  $s$  — выбранная независимая переменная (время, истинная аномалия, аргумент широты и др.).

Система уравнений движения в оскулирующих элементах (8.1.4) по сравнению с уравнением возмущенного движения (8.1.2) имеет определенные преимущества. Так, в случае малых возмущающих ускорений ( $|\mathbf{a}| \ll \mu/r^2$ ) оскулирующие элементы изменяются медленно по траектории движения, и на этом обычно основываются различные методы приближенного решения системы (8.1.4). Кро-

ме того, определяемые при решении системы (8.1.4) зависимости оскулирующих элементов часто позволяют наглядно представить эволюцию орбиты под действием возмущающих сил, т. е. провести качественный анализ движения.

Пусть  $x, y, z$  — координаты, а  $V_x, V_y, V_z$  — составляющие вектора скорости КА в возмущенном движении. Соответственно обозначим через  $x^*, y^*, z^*$  — координаты и  $V_x^*, V_y^*, V_z^*$  — составляющие вектора скорости при движении по оскулирующей орбите. Если  $F$  — некоторая функция координат и составляющих вектора скорости, то в любой точке касания возмущенной и невозмущенной орбит согласно (8.1.3) должно выполняться равенство

$$F(x, y, z, V_x, V_y, V_z) = F(x^*, y^*, z^*, V_x^*, V_y^*, V_z^*).$$

С учетом уравнений возмущенного движения запишем производную от функции  $F$  по времени  $t$  при движении по возмущенной орбите

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} V_x + \frac{\partial F}{\partial y} V_y + \frac{\partial F}{\partial z} V_z + \frac{\partial F}{\partial V_x} (g_x + a_x) + \\ + \frac{\partial F}{\partial V_y} (g_y + a_y) + \frac{\partial F}{\partial V_z} (g_z + a_z), \end{aligned}$$

а затем с учетом уравнений невозмущенного движения — такую же производную при движении по оскулирующей орбите

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)^* = \frac{\partial F}{\partial x} V_x^* + \frac{\partial F}{\partial y} V_y^* + \frac{\partial F}{\partial z} V_z^* + \frac{\partial F}{\partial V_x} g_x + \frac{\partial F}{\partial V_y} g_y + \frac{\partial F}{\partial V_z} g_z.$$

Здесь  $-\mu\mathbf{r}^0/r^2 = (g_x, g_y, g_z)$ ,  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ .

В момент времени  $t^*$  согласно (8.1.3) должно выполняться равенство

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{dF}{dt}\right)^* + \frac{d\tilde{F}}{dt},$$

где

$$\frac{d\tilde{F}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial V_x} a_x + \frac{\partial F}{\partial V_y} a_y + \frac{\partial F}{\partial V_z} a_z.$$

В качестве функции  $F$  можно взять любой элемент оскулирующей орбиты или постоянную интегрирования уравнений невозмущенного движения (обозначим рассматриваемую величину через  $\alpha$ ). Тогда для оскулирующей орбиты

$$\alpha(x^*, y^*, z^*, V_x^*, V_y^*, V_z^*) = \text{const}, \quad \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^* = 0, \quad (8.1.5)$$

а для возмущенной орбиты

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\tilde{\alpha}}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial V_x} a_x + \frac{\partial \alpha}{\partial V_y} a_y + \frac{\partial \alpha}{\partial V_z} a_z. \quad (8.1.6)$$



Эти зависимости часто используются при выводе уравнений движения в оскулирующих элементах.

**8.1.2. Уравнения для элементов возмущенного движения.** Рассмотрим один из возможных способов получения дифференциальных уравнений для элементов возмущенного движения [47]. С этой целью воспользуемся векторными интегралами площадей (2.2.5) и Лапласа (2.2.22)

$$\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{V}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{V} \times \mathbf{C} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Вычислим производную

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{V} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Согласно уравнению возмущенного движения (8.1.2) и соотношениям

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{r} \times \left( -\frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}^0 \right) = 0$$

имеем

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{a}. \quad (8.1.7)$$

Поскольку уравнение (8.1.7) записано для единицы массы, из него следует после умножения обеих частей на массу КА, что изменение кинетического момента по времени равно моменту возмущающей силы. Векторное уравнение (8.1.7) эквивалентно трем скалярным, для перехода к которым предварительно введем две геоцентрические системы координат. Система координат  $O_3xyz$  является экваториальной. Ось  $O_3x$  направлена в точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$ . Ось  $O_3z$  направлена по оси вращения Земли, а ось  $O_3y$  в экваториальной плоскости замыкает правую систему координат. Вторая система координат  $O_3\xi\eta\zeta$  связана с плоскостью орбиты. Ось  $O_3\xi$  направлена в восходящий узел орбиты, ось  $O_3\zeta$  направлена по вектору  $\mathbf{C}$ , а ось  $O_3\eta$  расположена в плоскости орбиты (рис. 8.1).

Разложим возмущающее ускорение  $\mathbf{a}$  на три составляющие: радиальную  $a_r$ , трансверсальную  $a_n$  и бинормальную  $a_w$ . Тогда проекции векторов в системе координат  $O_3\xi\eta\zeta$

$$\mathbf{r} = (r \cos u, r \sin u, 0),$$

$$\mathbf{a} = (a_r \cos u - a_n \sin u, a_r \sin u + a_n \cos u, a_w)$$

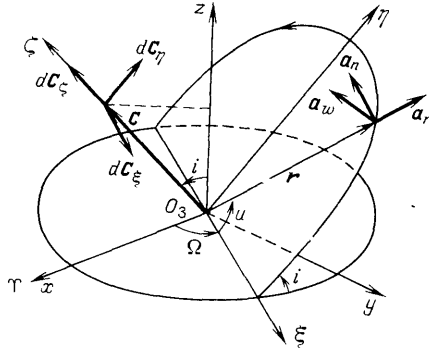


Рис. 8.1. Связь геоцентрических систем координат  $O_3xyz$  и  $O_3\xi\eta\zeta$

и проекции векторного уравнения (8.1.7)

$$\frac{dC_{\xi}}{dt} = a_w r \sin u, \quad \frac{dC_{\eta}}{dt} = -a_w r \cos u, \quad \frac{dC_{\zeta}}{dt} = a_n r.$$

Отсюда приращения вектора  $\mathbf{C}$  за время  $dt$

$$dC_{\xi} = a_w r \sin u dt, \quad dC_{\eta} = -a_w r \cos u dt, \quad dC_{\zeta} = a_n r dt. \quad (8.1.8)$$

Понятно, что величина  $dC_{\zeta}$  определяет изменение модуля вектора  $\mathbf{C}$ , а величины  $dC_{\xi}$  и  $dC_{\eta}$  могут быть получены поворотом вектора  $\mathbf{C}$  соответственно относительно осей  $O_3z$  и  $O_3\xi$  (рис. 8.1). Запишем

$$dC_{\xi} = C \sin i d\Omega, \quad dC_{\eta} = -C di. \quad (8.1.9)$$

Далее, согласно формуле (2.2.29) имеем

$$C = \sqrt{\mu p}, \quad (8.1.10)$$

откуда

$$dC_{\xi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} dp. \quad (8.1.11)$$

Приравняв правые части соотношений (8.1.8) и (8.1.9), (8.1.11), получим с учетом (8.1.10)

$$\frac{d\Omega}{dt} = a_w \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i}, \quad (8.1.12)$$

$$\frac{di}{dt} = a_w \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u, \quad (8.1.13)$$

$$\frac{dp}{dt} = 2a_n r \sqrt{\frac{p}{\mu}}. \quad (8.1.14)$$

Для вычисления производных по времени от эксцентриситета и скорости поворота линии апсид воспользуемся вектором Лапласа  $\mathbf{f}$ , постоянным в невозмущенном движении и зависящим от времени в возмущенном движении. Используя (2.2.22), вычислим производную

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \mathbf{C} + \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt} - \frac{\mu}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\mu\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt},$$

или с учетом (8.1.2) и  $d\mathbf{V}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}^0 \times \mathbf{C} + \mathbf{a} \times \mathbf{C} + \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt} - \frac{\mu}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\mu\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt}. \quad (8.1.15)$$

Но в невозмущенном движении  $\mathbf{a} = 0$ ,  $d\mathbf{C}/dt = 0$ ,  $\mathbf{f} = \text{const}$ ,  $d\mathbf{f}/dt = 0$  и уравнение (8.1.15) принимает вид

$$0 = -\frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}^0 \times \mathbf{C} - \frac{\mu}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\mu\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt}.$$

Поскольку эта сумма не зависит от ускорения возмущающей силы, то равенство нулю остается справедливым и в случае возмущенного

движения. Отсюда

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{a} \times \mathbf{C} + \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt},$$

или после подстановок  $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{V}$ ,  $d\mathbf{C}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{a}$

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = 2\mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{V}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{a}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}).$$

Раскрывая скалярные произведения, получим

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = 2\mathbf{r}(a_r V_r + a_n V_n) - \mathbf{V} a_r r - \mathbf{a} V_r r. \quad (8.1.16)$$

Спроектируем векторное уравнение (8.1.16) сначала на радиус-вектор, а затем на нормаль к нему в плоскости движения. Для проекции на радиус-вектор имеем

$$\left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_r = 2r(a_r V_r + a_n V_n) - V_r a_r r - a_r V_r r = 2a_n V_n r.$$

Но  $V_n r = C = \sqrt{\mu p}$ , поэтому

$$\left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_r = 2a_n \sqrt{\mu p}.$$

Проекция (8.1.16) на нормаль

$$\left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_n = -V_n a_r r - a_n V_r r = -a_r \sqrt{\mu p} - a_n V_r r.$$

Согласно (2.3.5)

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta,$$

тогда

$$\left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_n = -\sqrt{\mu p} \left( a_r + a_n e \frac{r}{p} \sin \vartheta \right).$$

Пусть  $\mathbf{i}$  — единичный вектор, направленный из притягивающего центра  $O$  в перицентр  $\Pi$ ,  $\mathbf{j}$  — единичный вектор в плоскости орбиты, нормальный  $\mathbf{i}$  и направленный по движению, а единичный вектор  $\mathbf{k}$  дополняет систему векторов до правой (рис. 8.2). Тогда можно представить  $d\mathbf{f}/dt$  через составляющие по направлениям  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ :

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{df}{dt} \mathbf{i} + f \frac{d\sigma}{dt} \mathbf{j} + f \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{k}. \quad (8.1.17)$$

Здесь  $d\sigma/dt$  — скорость поворота линии апсид в плоскости орбиты,  $d\gamma/dt$  — скорость поворота линии апсид в плоскости, перпендикулярной к орбите. Следовательно, первое слагаемое в (8.1.17) учитывает изменение вектора  $\mathbf{f}$  по модулю, второе — поворот в плоскости движения с постоянным модулем  $f$ , а третье — поворот вне плоскости.

Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{i} = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \Big|_r \cos \vartheta - \frac{d\mathbf{f}}{dt} \Big|_n \sin \vartheta = \\ &= \sqrt{\mu p} \left( 2a_n \cos \vartheta + a_r \sin \vartheta + a_n e \frac{r}{p} \sin^2 \vartheta \right) = \\ &= \sqrt{\mu p} \left[ a_r \sin \vartheta + a_n e \frac{r}{p} + a_n \left( 2 - e \frac{r}{p} \cos \vartheta \right) \cos \vartheta \right]. \end{aligned}$$

Согласно уравнению орбиты

$$e \frac{r}{p} \cos \vartheta = 1 - \frac{r}{p},$$

тогда

$$\frac{df}{dt} = \sqrt{\mu p} \left[ a_r \sin \vartheta + a_n e \frac{r}{p} + a_n \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta \right]. \quad (8.1.18)$$

Далее, используя формулу (2.2.30) для модуля вектора Лапласа  $f = \mu e$ , найдем производную эксцентриситета по времени

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\mu} \frac{df}{dt},$$

откуда с учетом (8.1.18)

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ a_r \sin \vartheta + a_n e \frac{r}{p} + a_n \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta \right]. \quad (8.1.19)$$

Таким образом, изменение эксцентриситета по времени зависит от обеих составляющих возмущающего ускорения в плоскости орбиты.

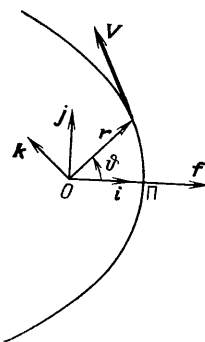


Рис 8.2. К вычислению производной вектора Лапласа в возмущенном движении

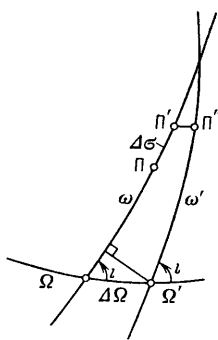


Рис 8.3. К вычислению производной аргумента широты

Рассмотрим теперь второе слагаемое (8.1.17), т. е. проекцию вектора  $df/dt$  на направление  $\mathbf{j}$  (см. рис. 8.2):

$$\begin{aligned} f \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{d\mathbf{f}}{dt} \Big|_r \sin \vartheta + \frac{d\mathbf{f}}{dt} \Big|_n \cos \vartheta = \\ &= \sqrt{\mu p} \left[ 2a_n \sin \vartheta - \left( a_r + a_n e \frac{r}{p} \sin \vartheta \right) \cos \vartheta \right] = \\ &= \sqrt{\mu p} \left[ -a_r \cos \vartheta + a_n \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta \right] \end{aligned}$$

Отсюда с учетом  $f = \mu e$  имеем

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -a_r \cos \vartheta + a_n \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta \right]. \quad (8.1.20)$$

Скорость поворота линии апсид в плоскости движения также зависит от обеих составляющих возмущающего ускорения в этой плоскости.

Перейдем теперь от производной  $d\sigma/dt$  к производной аргумента перицентра  $d\omega/dt$ . Если плоскость орбиты неизменна ( $\Omega = \text{const}$ ,  $i = \text{const}$ ), то  $\Delta\omega = \Delta\sigma$ . Если же угол  $\Omega$  изменяется, то аргумент перицентра меняется не только за счет перемещения линии апсид на угол  $\Delta\sigma$ , но и за счет изменения плоскости орбиты. Из геометрических построений на рис. 8.3 имеем

$$\Delta\omega = \Delta\sigma - \Delta\Omega \cos i,$$

отсюда

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} - \frac{d\Omega}{dt} \cos i$$

или с учетом соотношений (8.1.12), (8.1.20)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -a_r \cos \vartheta + a_n \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - a_w e \frac{r}{p} \text{ctg } i \sin u \right]. \quad (8.1.21)$$

Производная по времени аргумента перицентра, т. е. скорость изменения расстояния перицентра от узла, зависит от всех трех составляющих возмущающего ускорения.

В тех случаях, когда наклонение  $i$  орбиты мало, величина  $\text{ctg } i$  становится большой. Соответственно возрастает производная  $d\omega/dt$  и увеличиваются ошибки при численном интегрировании. Поэтому целесообразным оказывается переход к новому оскулирующему элементу

$$\tilde{\omega} = \omega + \Omega,$$

который будет медленно меняться по времени. Найдем

$$\Delta\tilde{\omega} = \Delta\omega + \Delta\Omega = \Delta\sigma + (1 - \cos i) \Delta\Omega = \Delta\sigma + \text{tg } \frac{i}{2} \sin i \Delta\Omega$$

и после перехода к производной получим с учетом (8.1.12), (8.1.20)

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -a_r \cos \vartheta + a_n \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta + a_w e \frac{r}{p} \text{tg } \frac{i}{2} \sin u \right]. \quad (8.1.22)$$

Итак, получены производные по времени для пяти оскулирующих элементов орбиты:  $p$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  (или  $\tilde{\omega}$ ). Все эти производные имеют смысл для любой орбиты.

Заметим, что в некоторых задачах вместо производной параметра орбиты удобнее использовать производную большой полуоси.

Для ее вычисления рассмотрим интеграл энергии в случае эллиптической орбиты (2.4.18)

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{a}$$

и продифференцируем его по времени:

$$2\mathbf{V} \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{2\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{\mu}{a^2} \frac{da}{dt}.$$

Отсюда с учетом (8.1.2)

$$\frac{\mu}{a^2} \frac{da}{dt} = 2\mathbf{V} \left( -\frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}^0 \right) + 2\mathbf{V} \cdot \mathbf{a} + \frac{2\mu}{r^2} \frac{dr}{dt}. \quad (8.1.23)$$

В невозмущенном движении  $\mathbf{a} = 0$ , большая полуось постоянна ( $da/dt = 0$ ), а уравнение (8.1.23) принимает вид

$$0 = 2\mathbf{V} \left( -\frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}^0 \right) + \frac{2\mu}{r^2} \frac{dr}{dt}.$$

Так как это условие выполняется и в случае возмущенного движения, то

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} \mathbf{V} \cdot \mathbf{a} = \frac{2a^2}{\mu} (V_r a_r + V_n a_n),$$

или с учетом (2.3.5), (2.3.7)

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} \left( a_r e \sin \vartheta + a_n \frac{p}{r} \right). \quad (8.1.24)$$

Эта формула справедлива для эллиптического движения. В случае гиперболического движения можно записать с учетом (2.2.1), (2.2.2) и (2.4.33) формулу для интеграла энергии

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = \frac{\mu}{a},$$

где  $a$  — продольная полуось гиперболической орбиты. Тогда

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} \left( a_r e \sin \vartheta + a_n \frac{p}{r} \right). \quad (8.1.25)$$

Перейдем к вычислению производной времени прохождения через перигеум ( $t_{\Pi}$ ). Обозначим

$$I = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \quad (8.1.26)$$

и запишем уравнение (2.5.2) в виде

$$t - t_{\Pi} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} I. \quad (8.1.27)$$

Дифференцируя (8.1.27) по времени, найдем

$$1 - \frac{dt_{\Pi}}{dt} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} I \frac{dp}{dt} + \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \frac{dI}{dt}, \quad (8.1.28)$$

где

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (8.1.29)$$

Производная в возмущенном движении

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta_{\text{нв}}}{dt} - \frac{d\sigma}{dt}, \quad (8.1.30)$$

так как первое слагаемое учитывает производную истинной аномалии ( $\vartheta_{\text{нв}}$ ) в невозмущенном движении, а второе слагаемое — скорость поворота линии апсид, от которой отсчитывается истинная аномалия, в возмущенном движении. Вычислим

$$\frac{\partial I}{\partial e} = -2 \int_0^{\vartheta} \frac{\cos \vartheta \, d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^3} = -I_1, \quad (8.1.31)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \vartheta} = \frac{1}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \frac{r^2}{p^2}. \quad (8.1.32)$$

После подстановки соотношений (8.1.29) — (8.1.32) в (8.1.28) имеем

$$1 - \frac{dt_{\Pi}}{dt} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} I \frac{dp}{dt} + \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[ -I_1 \frac{de}{dt} + \frac{r^2}{p^2} \left( \frac{d\vartheta_{\text{нв}}}{dt} - \frac{d\sigma}{dt} \right) \right],$$

но согласно (2.3.4)

$$\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\vartheta_{\text{нв}}}{dt} = 1,$$

поэтому

$$\frac{dt_{\Pi}}{dt} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left( -\frac{3}{2} \frac{I}{p} \frac{dp}{dt} + I_1 \frac{de}{dt} + \frac{r^2}{p^2} \frac{d\sigma}{dt} \right). \quad (8.1.33)$$

Установим связь между интегралами  $I$  и  $I_1$ . С этой целью рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(\vartheta) = \frac{r}{p} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta$$

и продифференцируем ее по  $\vartheta$

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = \frac{r}{p} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + \left( 1 + 2 \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{r}{p} \right).$$

Здесь

$$\frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{r}{p} \right) = \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} \right) = \frac{e \sin \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \left( \frac{r}{p} \right)^2 e \sin \vartheta,$$

тогда

$$\frac{\psi}{d\vartheta} = \frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \vartheta + \left(1 + 2\frac{r}{p}\right) \left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin^2 \vartheta.$$

После несложных преобразований с учетом равенства

$$e \frac{r}{p} \cos \vartheta = 1 - \frac{r}{p}$$

получим

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = \left(1 + 2\frac{r}{p}\right) e \left(\frac{r}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos \vartheta.$$

Но

$$1 + 2\frac{r}{p} = 1 + 2\left(1 - e\frac{r}{p} \cos \vartheta\right) = 3 - 2e\frac{r}{p} \cos \vartheta,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\vartheta} &= \left(3 - 2e\frac{r}{p} \cos \vartheta\right) e \left(\frac{r}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos \vartheta = \\ &= 3e \left(\frac{r}{p}\right)^2 + 2(1 - e^2) \left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos \vartheta, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{d\vartheta} \left[ \frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin \vartheta \right] = 3e \left(\frac{r}{p}\right)^2 + 2(1 - e^2) \left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos \vartheta.$$

Проинтегрировав это соотношение в пределах от 0 до  $\vartheta$ , определим условие, связывающее интегралы  $I$  и  $I_1$ :

$$\frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin \vartheta = 3e \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} + 2(1 - e^2) \int_0^{\vartheta} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^3},$$

или

$$\frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin \vartheta = 3eI + (1 - e^2)I_1. \quad (8.1.34)$$

Подставим теперь в (8.1.33) производные  $dp/dt$ ,  $de/dt$ ,  $d\sigma/dt$ , а также  $I$  из (8.1.34), тогда

$$\begin{aligned} \frac{dt_{\pi}}{dt} &= \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left\{ -\frac{a_n r}{e \sqrt{\mu p}} \left[ \frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin \vartheta - (1 - e^2)I_1 \right] + \right. \\ &+ I_1 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ a_r \sin \vartheta + a_n e \frac{r}{p} + a_n \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \vartheta \right] + \\ &+ \frac{r^2}{ep^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ a_n \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin \vartheta - a_r \cos \vartheta \right] \left. \right\} = \\ &= \frac{p^2}{e\mu} \left\{ a_r \left( I_1 e \sin \vartheta - \frac{r^2}{p^2} \cos \vartheta \right) + a_n I_1 \left[ \frac{r}{p} + e \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \vartheta \right] \right\}. \end{aligned}$$



Множитель при  $a_n$  приведем к виду

$$I_1 \left[ \frac{r}{p} + e \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta \right] = I_1 (1 + e \cos \vartheta) = I_1 \frac{p}{r} = N \frac{r}{p},$$

где

$$N = I_1 \left( \frac{p}{r} \right)^2. \quad (8.1.35)$$

С учетом обозначения (8.1.35) имеем

$$\frac{dt_{\Pi}}{dt} = \frac{r^2}{e\mu} \left[ a_r (eN \sin \vartheta - \cos \vartheta) + a_n N \frac{p}{r} \right]. \quad (8.1.36)$$

Определим  $N$  через элементы орбиты и текущие параметры КА на орбите. С этой целью подставим в уравнение связи (8.1.34) величины

$$I = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - t_{\Pi}), \quad I_1 = N \left( \frac{r}{p} \right)^2$$

и после несложных преобразований получим

$$N = \frac{1}{1 - e^2} \left[ (2 + e \cos \vartheta) \sin \vartheta - 3e \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} (t - t_{\Pi}) \right]. \quad (8.1.37)$$

Итак, получены уравнения для всех элементов оскулирующей орбиты

$$\frac{dp}{dt} \left( \text{или } \frac{da}{dt} \right), \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{d\Omega}{dt}, \frac{d\omega}{dt} \left( \text{или } \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \right), \frac{dt_{\Pi}}{dt}.$$

Если известны начальные условия в момент времени  $t_0$ , т. е.  $p_0$  (или  $a_0$ ),  $e_0$ ,  $i_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\omega_0$  (или  $\tilde{\omega}_0$ ),  $t_{\Pi 0}$ , эти уравнения можно интегрировать по времени численно. Истинная аномалия  $\vartheta$ , входящая в производные, определяется через эксцентрическую аномалию  $E$  из соотношения (2.5.6) после решения уравнения вида (2.5.8). Чтобы избежать решения этого уравнения, которое зависит от типа орбиты, можно к шести уравнениям для оскулирующих элементов добавить еще одно уравнение связи (8.1.30)

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta_{\text{НВ}}}{dt} - \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{d\sigma}{dt}. \quad (8.1.38)$$

В ряде случаев возмущающее ускорение не зависит от времени, а определяется положением КА на орбите. Тогда в качестве независимой переменной может оказаться целесообразным выбрать, например, истинную аномалию  $\vartheta$  или аргумент широты  $u$ , хотя в некоторых случаях это недопустимо.

Пусть в качестве независимой переменной выбрана истинная аномалия и пусть  $A$  — произвольный элемент орбиты. Тогда

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{dA}{dt} \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{d\sigma}{dt}},$$

или

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} \beta \frac{dA}{dt}, \quad (8.1.39)$$

где

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\sigma}{dt}}. \quad (8.1.40)$$

Если положить

$$\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\sigma}{dt} \approx 0,$$

то можно принять  $\beta = 1$ , и уравнение  $dA/d\theta$  упрощается. Такое упрощение обычно допустимо, когда скорость смещения перигентра  $d\sigma/dt$  мала по сравнению с угловой скоростью радиуса-вектора  $\sqrt{\mu p}/r^2$ . Практически для многих траекторий это имеет место, кроме траекторий с малым эксцентриситетом. Каждый раз, полагая  $\beta = 1$ , следует помнить, что уравнения вида  $dA/d\theta$  являются приближенными.

**8.1.3. К выбору аргумента для системы оскулирующих элементов.** При выборе аргумента для системы оскулирующих элементов необходимо учитывать все особенности рассматриваемой задачи, т. е. нельзя этот выбор делать формально. Обсудим некоторые примеры возмущенных орбит, для описания которых нельзя принимать в качестве независимой переменной истинную аномалию и аргумент широты.

Предположим, что КА из-за действия возмущающего ускорения  $\mathbf{a}_{\text{воз}}$  движется по круговой орбите радиуса  $\rho$ , плоскость которой не проходит через центр притяжения  $O$ . Пусть  $r$  — расстояние КА до центра притяжения,  $i$  — наклонение оскулирующей орбиты,  $\mathbf{g}$  — ускорение силы притяжения. Предположим сначала, что возмущающее ускорение направлено параллельно оси  $Oz$  (рис. 8.4). По условиям движения суммарное ускорение

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{g} + \mathbf{a}_{\text{воз}}$$

направлено к центру  $O'$  возмущенной круговой орбиты. Следовательно,

$$a_z = g \cos i, \quad \rho = r \cos i.$$

Вместе с тем возмущенная орбита является круговой, и для нее справедливо условие

$$\frac{V^2}{\rho} = a_{\Sigma},$$

откуда

$$V^2 = \rho a_{\Sigma} = rg \cos^2 i.$$

Здесь  $rg = \mu/r = V_{кр}^2(r)$ , поэтому

$$V = V_{кр}(r) \cos i,$$

т. е. скорость движения КА по возмущенной круговой орбите меньше местной круговой скорости.

Найдем параметры оскулирующей орбиты. Ее плоскость проходит через радиус  $r$  (отрезок  $OM$  на рис. 8.4) и вектор скорости. Наклонение оскулирующей орбиты  $i$  постоянно ( $di/dt = 0$ ). Так как скорость при движении по оскулирующей орбите нормальна к радиусу  $r$ , то угол наклона траектории (к горизонту)  $\theta \equiv 0$ . С учетом  $V < V_{кр}(r)$  установим, что КА находится в апоцентре. Линия апсид ( $OM$ ) перемещается вместе с движением самого КА. Отсюда его истинная аномалия  $\phi \equiv \pi$ , аргумент перицентра  $\omega \equiv -\pi/2$  (или  $3\pi/2$ ), аргумент широты  $u = \phi + \omega \equiv \pi/2$  ( $du/dt = 0$ ). Таким образом, в рассматриваемой задаче ни истинная аномалия, ни аргумент широты не могут быть использованы в качестве независимой переменной, поскольку они постоянны.

Для вычисления остальных элементов оскулирующей орбиты предварительно найдем

$$v = \frac{V^2}{V_{кр}^2(r)} = \cos^2 i,$$

а затем по формулам (2.4.5) и (2.4.3) эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 + (v - 2)v} = 1 - v = \sin^2 i \quad \left(\frac{de}{dt} = 0\right)$$

и параметр

$$p = rv = r \cos^2 i \quad \left(\frac{dp}{dt} = 0\right).$$

Отсюда большая полуось

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{r}{1 + \sin^2 i} \quad \left(\frac{da}{dt} = 0\right).$$

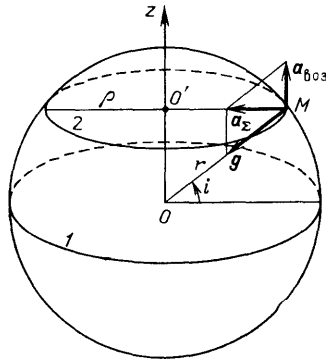


Рис. 8.4. Схема движения КА по возмущенной орбите: 1 — плоскость экватора; 2 — плоскость орбиты

Заметим, что большая полуось оскулирующей орбиты меньше радиуса  $r$ .

Составляющие возмущающего ускорения

$$\begin{aligned} a_r &= a_{\text{воз}} \sin i = g \sin^2 i, \\ a_n &= 0, \\ a_w &= a_{\text{воз}} \cos i = g \sin i \cos i. \end{aligned}$$

С их помощью найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= a_w \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} = g \sqrt{\frac{r}{\mu}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= a_r \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} = g \sqrt{\frac{r}{\mu}} \cos i = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{r}} \cos i, \\ \frac{dt_{\Pi}}{dt} &= a_r \frac{r^2}{e\mu} = g \frac{r^2}{\mu} = 1. \end{aligned}$$

Отметим, что в рассматриваемой задаче знаменатель формулы (8.1.40) обращается в нуль. Это согласуется с выводом о невозможности использования истинной аномалии в качестве аргумента.

Обсудим теперь другой пример, предполагая, что КА совершает такое же движение по круговой орбите, плоскость которой не проходит через центр притяжения, а возмущающее ускорение будем полагать нормальным к радиусу-вектору  $\mathbf{r}$ , т. е.

$$a_r = 0, \quad a_n = 0, \quad a_w = g \operatorname{tg} i.$$

Условие движения по круговой орбите

$$\frac{V^2}{\rho} = a_{\Sigma}, \quad a_{\Sigma} = \frac{g}{\cos i},$$

откуда

$$V^2 = \rho a_{\Sigma} = r g = V_{\text{кр}}^2(r).$$

Таким образом, КА перемещается по возмущенной орбите со скоростью, равной местной круговой скорости, причем ее эксцентриситет  $e = 0$ . Поскольку оскулирующая орбита является круговой, то понятия истинной аномалии и аргумента перицентра для нее теряют смысл. В рассматриваемой задаче истинная аномалия и аргумент широты не могут быть выбраны в качестве независимой переменной.

## § 8.2. Действие возмущающих касательной, нормальной и бинормальной сил

Разложение возмущающей силы на радиальную и трансверсальную составляющую не всегда оказывается удобным, так как фактически действуют силы, направленные по касательной к траектории или по нормали к ней. В качестве примера можно назвать силу

аэродинамического сопротивления при движении в верхних слоях атмосферы или силу малой тяги, направленную по вектору скорости при разгоне с орбиты. Поэтому возникает необходимость записи уравнений для элементов оскулирующей орбиты в такой форме, где вместо радиального ( $a_r$ ) и трансверсального ( $a_n$ ) ускорений стоят касательное ( $a_t$ ) и нормальное ( $a_s$ ) возмущающие ускорения, порождаемые соответствующими возмущающими силами.

**8.2.1. Учет возмущающих касательной и нормальной сил в уравнениях для оскулирующих элементов.** За положительное направление касательной возмущающей силы принимается направление вектора скорости, за положительное направление нормальной возмущающей силы — направление к центру кривизны. Положительное направление бинормальной возмущающей силы, как и прежде, совпадает с направлением вектора кинетического момента. Для перехода от возмущающих ускорений  $a_r$ ,  $a_n$  к возмущающим ускорениям  $a_t$ ,  $a_s$  (рис. 8.5) предварительно найдем с помощью формул (2.3.5), (2.3.7)

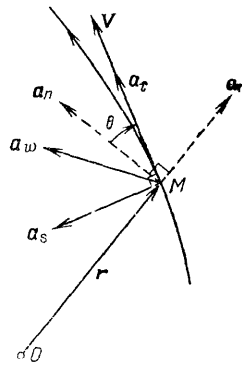


Рис 8.5 Переход к касательному и нормальному возмущающим ускорениям

$$\sin \theta = \frac{V_r}{V} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta,$$

$$\cos \theta = \frac{V_n}{V} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{p}{r},$$

а затем вычислим

$$a_r = a_t \sin \theta - a_s \cos \theta = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left( a_t e \sin \vartheta - a_s \frac{p}{r} \right),$$

$$a_n = a_t \cos \theta + a_s \sin \theta = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left( a_t \frac{p}{r} + a_s e \sin \vartheta \right). \quad (8.2.1)$$

После подстановки  $a_n$  в (8.1.14) найдем

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2}{V} (a_t p + a_s r e \sin \vartheta). \quad (8.2.2)$$

Затем подставим (8.2.1) в (8.1.19), тогда получим

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{V} \left\{ \left( a_t e \sin \vartheta - a_s \frac{p}{r} \right) \sin \vartheta + \left( a_t \frac{p}{r} + a_s e \sin \vartheta \right) \times \right.$$

$$\times \left[ e \frac{r}{p} + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta \right] \left. \right\} = \frac{1}{V} \left\{ a_t \left[ e \sin^2 \vartheta + e + \left( 1 + \frac{p}{r} \right) \cos \vartheta \right] + \right.$$

$$\left. + a_s \sin \vartheta \left[ -\frac{p}{r} + e^2 \frac{r}{p} + e \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta \right] \right\}.$$

Упростим множители при  $a_t$  и  $a_s$ :

$$\begin{aligned} e \sin^2 \vartheta + e + \left(1 + \frac{p}{r}\right) \cos \vartheta &= e(1 + \sin^2 \vartheta) + (2 + e \cos \vartheta) \cos \vartheta = \\ &= 2(e + \cos \vartheta), \\ \sin \vartheta \left[ -\frac{p}{r} + e^2 \frac{r}{p} + e \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \vartheta \right] &= \frac{r}{p} \sin \vartheta \left\{ -\left(\frac{p}{r}\right)^2 + \right. \\ &+ e \left[ e + \left(\frac{p}{r} + 1\right) \cos \vartheta \right] \left. \right\} = \frac{r}{p} \sin \vartheta [-(1 + e \cos \vartheta)^2 + \\ &+ e(e + 2 \cos \vartheta + e \cos^2 \vartheta)] = \frac{r}{p} (e^2 - 1) \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{V} \left[ 2a_t (e + \cos \vartheta) + a_s \frac{r}{p} (e^2 - 1) \sin \vartheta \right]. \quad (8.2.3)$$

Производные  $di/dt$  и  $d\Omega/dt$  не зависят от возмущающих ускорений в оскулирующей плоскости движения, поэтому форма их записи не меняется при переходе к  $a_t$ ,  $a_s$ . Преобразуем теперь производную аргумента перицентра

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -\frac{1}{V} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left( a_t e \sin \vartheta - a_s \frac{p}{r} \right) \cos \vartheta + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left( a_t \frac{p}{r} + a_s e \sin \vartheta \right) \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - a_w e \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right] = \\ &= a_t \frac{\sin \vartheta}{V} \left[ -\cos \vartheta + \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{p}{r} \right) \right] + a_s \frac{1}{V} \left[ \frac{p}{er} \cos \vartheta + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin^2 \vartheta \right] - \\ &- a_w \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \operatorname{ctg} i \sin u, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{eV} \left[ 2a_t \sin \vartheta + a_s \frac{2e + (1 + e^2) \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \right] - a_w \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \operatorname{ctg} i \sin u. \quad (8.2.4)$$

Последнее уравнение системы оскулирующих элементов получим после подстановки (8.2.1) в (8.1.36) и проведения несложных преобразований:

$$\frac{dt_{\Pi}}{dt} = \frac{r^2}{eV \sqrt{\mu p}} \left[ a_t \left( e^2 N \sin^2 \vartheta - e \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{p^2}{r^2} N \right) + a_s \frac{p}{r} \cos \vartheta \right]. \quad (8.2.5)$$

Во многих задачах используются производные для угла поворота линии апсид  $\sigma$  и большой полуоси эллиптической орбиты  $a$ . Вычислим эти производные с помощью соотношений (8.1.20), (8.1.24) и (8.2.1). Опуская выкладки, почти совпадающие с выпол-

ненными ранее, запишем сразу конечный результат

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{eV} \left[ 2a_t \sin \vartheta + a_s \frac{2e + (1 + e^2) \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \right]. \quad (8.2.6)$$

Производная большой полуоси эллиптической орбиты

$$\frac{da}{dt} = 2a_t \frac{a^2}{pV} \left( \frac{2p}{r} + e^2 - 1 \right),$$

или

$$\frac{da}{dt} = 2a_t \frac{a^2}{V} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = 2a_t \frac{a^2 V}{\mu}. \quad (8.2.7)$$

Для продольной полуоси гиперболической орбиты имеем

$$\frac{da}{dt} = -2a_t \frac{a^2 V}{\mu}. \quad (8.2.8)$$

**8.2.2. Влияние возмущающей касательной силы.** Сначала рассмотрим, как меняются элементы эллиптической орбиты в плоскости движения под действием возмущающей касательной силы, порождающей ускорение  $a_t$ . Из уравнения (8.2.7) следует, что под действием положительного касательного ускорения большая полуось орбиты увеличивается. В рассматриваемом случае для скорости поворота линии апсид имеем

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2a_t \frac{\sin \vartheta}{eV}. \quad (8.2.9)$$

На восходящей ветви орбиты (от перицентра до апоцентра), где  $\sin \vartheta > 0$ , под действием касательного ускорения  $a_t > 0$  линия апсид поворачивается в направлении орбитального движения ( $d\sigma/dt > 0$ ), а на нисходящей ветви (от апоцентра до перицентра), где  $\sin \vartheta < 0$ , линия апсид поворачивается против орбитального движения ( $d\sigma/dt < 0$ ).

Более сложный характер имеет изменение эксцентриситета, так как

$$\frac{de}{dt} = 2a_t \frac{e + \cos \vartheta}{V}.$$

Если КА находится в конце малой полуоси, где  $r = a$ , то

$$\cos \vartheta = -\frac{c}{r} = -\frac{ae}{a} = -e \quad \text{и} \quad \frac{de}{dt} = 0.$$

При  $r > a$ , когда КА находится в области от конца малой полуоси до апоцентра, имеем  $e + \cos \vartheta < 0$  и  $de/dt < 0$ , а при  $r < a$ , когда КА находится в области от перицентра до малой полуоси, справедливы неравенства  $e + \cos \vartheta > 0$  и  $de/dt > 0$ . Видно, что уменьшение или увеличение эксцентриситета под действием касательного ускорения зависит от того, на каком расстоянии от притягивающего центра находится КА.

В рассматриваемом случае производная от параметра орбиты

$$\frac{dp}{dt} = 2a_t \frac{p}{V}, \quad (8.2.10)$$

и под действием касательного ускорения  $a_t > 0$  параметр орбиты возрастает, как и большая полуось.

Уже отмечалось, что при малой возмущающей силе в подавляющем большинстве случаев движение КА можно описывать с помощью оскулирующих орбит. Однако в некоторых случаях такое предположение может привести к неправильным выводам. А именно, может оказаться, что оскулирующее движение существенно отличается от действительного. В качестве примера рассмотрим случай, когда эксцентриситет имеет такой же порядок малости, что и отношение возмущающего ускорения к гравитационному ускорению, т. е.  $e \sim a_t/g$ . При этом будем предполагать, что эксцентриситет не меняется ( $e = e_0 = \text{const}$ ), а возмущающее ускорение направлено по касательной.

Из условия постоянства эксцентриситета  $de/dt = 0$  следует  $e_0 + \cos \vartheta = 0$  и  $\cos \vartheta = -e_0$ . Последнее равенство возможно, когда КА находится в конце малой полуоси. Если так, то  $d\vartheta/dt = 0$ ,  $r = a$ , и из интеграла энергии найдем скорость КА

$$V^2 = \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{r} = V_{\text{кр}}^2(r).$$

Рассмотрим полярный угол  $\varphi$ , который отсчитывается от произвольного неподвижного направления. Тогда  $\varphi = \vartheta + \sigma$  и  $d\varphi/dt = d\sigma/dt$ , т. е. линия апсид вращается вместе с полярным лучом.

Для вычисления произвольной  $dp/d\sigma$  разделим (8.2.10) на (8.2.9):

$$\frac{dp}{d\sigma} = \frac{e_0 p}{\sin \vartheta}$$

или с учетом  $\sin \vartheta = \sqrt{1 - e_0^2}$

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{d\sigma} = \frac{e_0}{\sqrt{1 - e_0^2}}.$$

Интегрируя это соотношение, получим

$$p = p_0 \exp \left[ \frac{e_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} (\sigma - \sigma_0) \right].$$

Здесь  $p_0$  и  $\sigma_0$  — начальные величины параметра и угла поворота линии апсид. Используя формулу

$$p = a(1 - e_0^2) = r(1 - e_0^2),$$



получим окончательно

$$r = r_0 \exp \left[ \frac{e_0}{\sqrt{1-e_0^2}} (\sigma - \sigma_0) \right],$$

где

$$r_0 = \frac{p_0}{1-e_0^2}.$$

Следовательно, возмущенная орбита имеет форму логарифмической спирали, хотя оскулирующее движение является эллиптическим. Логарифмическая спираль обладает тем свойством, что пересекает полярный луч под постоянным углом  $\chi$ . Для вычисления этого угла воспользуемся формулой, связывающей угол наклона траектории с элементами орбиты и положением КА на орбите

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{e_0 \sin \vartheta}{1+e_0 \cos \vartheta} = \frac{e_0 \sqrt{1-e_0^2}}{1-e_0^2} = \frac{e_0}{\sqrt{1-e_0^2}} = \operatorname{tg} \theta_0,$$

откуда

$$\sin \theta_0 = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_0}} = e_0$$

и

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \arcsin e_0.$$

Определим теперь величину возмущающего касательного ускорения, необходимую для реализации такого движения. Согласно (8.2.9)

$$a_t = \frac{eV}{2 \sin \vartheta} \frac{d\sigma}{dt},$$

но из интеграла площадей (2.3.4)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2},$$

причем  $d\sigma/dt = d\varphi/dt$ . Тогда с учетом соотношений  $V = V_{\text{кр}}(r) = \sqrt{\mu/a}$  и  $\sin \vartheta = \sqrt{1-e_0^2}$  получим окончательно

$$a_t = \frac{e_0 \mu}{2r^2} = \frac{1}{2} g e_0,$$

так как  $\mu/r^2 = g$ . Отсюда

$$\frac{a_t}{g} = \frac{e_0}{2}.$$

Действительно, отношение возмущающего касательного ускорения к гравитационному имеет порядок малости эксцентриситета. С увеличением расстояния  $r$  величина  $g$  убывает, соответственно должна убывать величина  $a_t$ . Заметим, что и в этой задаче  $\vartheta = \text{const}$ . Нель-

зя пользоваться истинной аномалией  $\vartheta$  в качестве аргумента для системы оскулирующих элементов.

**8.2.3. Влияние возмущающей нормальной силы.** Предположим теперь, что на КА действует возмущающая нормальная сила, которая создает ускорение  $a_s$ . Обсудим влияние возмущающего нормального ускорения на элементы оскулирующей орбиты. Как уже отмечалось, производная большой полуоси эллиптической орбиты (8.2.7) не зависит от возмущающего нормального ускорения, поэтому в рассматриваемом случае  $a = \text{const}$ . Для параметра орбиты имеем согласно (8.2.2)

$$\frac{dp}{dt} = 2a_s \frac{re \sin \vartheta}{V}.$$

При наличии возмущающего нормального ускорения  $a_s > 0$  на восходящем участке движения (от перигея до апогея) параметр орбиты возрастает, а на нисходящем участке (от апогея до перигея) убывает.

Изменение эксцентриситета описывается уравнением

$$\frac{de}{dt} = a_s \frac{r}{pV} (e^2 - 1) \sin \vartheta.$$

Для эллиптической орбиты  $e < 1$ , следовательно, при наличии возмущающего нормального ускорения  $a_s > 0$  на восходящем участке эксцентриситет орбиты убывает, а на нисходящем участке возрастает.

Знак производной угла поворота линии апсид

$$\frac{d\sigma}{dt} = a_s \frac{2e + (1 + e^2) \cos \vartheta}{eV(1 + e \cos \vartheta)}$$

также зависит от положения КА на орбите. При  $a_s > 0$  условие  $d\sigma/dt > 0$  для эллиптической орбиты выполняется, если

$$2e + (1 + e^2) \cos \vartheta > 0,$$

откуда

$$\cos \vartheta > -\frac{2e}{1 + e^2}.$$

Пусть КА находится на эллиптической орбите в точке, проекция которой на линию апсид совпадает с непритягивающим фокусом. Тогда расстояние КА от притягивающего фокуса

$$r^* = 2a - p = a(1 + e^2),$$

а проекция радиуса-вектора  $\mathbf{r}^*$  на ось апсид равна фокусному расстоянию  $2c = 2ae$ , взятому со знаком минус. Отсюда истинная аномалия отмеченной точки

$$\vartheta^* = \arccos \left( -\frac{2e}{1 + e^2} \right).$$

Таким образом, условие  $d\sigma/dt > 0$  выполняется, если  $r < r^*$ , т. е. КА находится вне прилегающей к апоцентру части орбиты, которая отсекается прямой, проходящей через непритягивающий фокус параллельно малой оси оскулирующего эллипса.

Производная времени пролета перицентра при наличии возмущающего нормального ускорения согласно (8.2.5) имеет вид

$$\frac{dt_{\pi}}{dt} = a_s \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r \cos \theta}{eV}.$$

При наличии положительного возмущающего ускорения  $a_s > 0$ , когда КА перемещается по прилегающей к перицентру части орбиты, где  $r < p$  ( $\cos \theta > 0$ ), время пролета перицентра  $t_{\pi}$  увеличивается. Наличие возмущающего нормального ускорения на остальной части орбиты приводит к уменьшению  $t_{\pi}$ .

Результаты анализа воздействия возмущающих ускорений, касательного и нормального, на элементы оскулирующей орбиты приведены в табл. 8.1.

**8.2.4. Возмущения оскулирующих элементов эллиптической орбиты.** Различают *вековые* и *периодические* возмущения оскулирующих элементов эллиптической орбиты. Вековыми называют возмущения, которые монотонно возрастают по числовой величине вместе

Таблица 8.1

Воздействие касательного и нормального ускорений на элементы оскулирующей орбиты

Производные	Ускорение	
	Касательное $a_t > 0$	Нормальное $a_s > 0$
$\frac{da}{dt}$	$> 0$	$= 0$
$\frac{dp}{dt}$	$> 0$	$> 0$ на восходящей ветви, $< 0$ на нисходящей ветви
$\frac{de}{dt}$	$> 0$ при $r < a$ , $< 0$ при $r > a$	$> 0$ на нисходящей ветви, $< 0$ на восходящей ветви
$\frac{d\sigma}{dt}$	$> 0$ на восходящей ветви, $< 0$ на нисходящей ветви	$> 0$ при $r < a(1 + e^2)$ $< 0$ при $r > a(1 + e^2)$

со временем или полярным углом. Понятно, что при наличии вековых возмущений оскулирующие элементы орбиты могут претерпевать значительные изменения за достаточно большой промежуток времени.

*Периодическими* называют возмущения, которые являются периодическими функциями от средней аномалии  $M$ , а следовательно, и периодическими функциями времени.

В качестве примера обсудим эволюцию оскулирующих элементов эллиптической орбиты КА за один виток при наличии постоянного возмущающего касательного ускорения или возмущающего касательного ускорения, которое является четной функцией от истинной аномалии. Вместо производных оскулирующих элементов по времени будем рассматривать производные по истинной аномалии, так как зависимости элементов эллиптической орбиты от времени весьма громоздки, а от истинной аномалии — достаточно просты. При этом учтем, что

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta_{\text{нв}}}{dt} - \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{d\sigma}{dt}.$$

Если  $a_t/g \ll e$ , то можно ограничиться только первым слагаемым

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}.$$

Тогда

$$\frac{dp}{d\theta} = 2a_t \frac{p}{V \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}}, \quad \frac{de}{d\theta} = 2a_t \frac{e + \cos \theta}{V \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}}, \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = 2a_t \frac{\sin \theta}{eV \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}}.$$

Используем формулу (2.3.8) для вычисления множителя, входящего во все производные:

$$\frac{1}{V \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}} = \frac{p^2}{\mu \tilde{V}} \left( \frac{r}{p} \right)^2,$$

где

$$\tilde{V} = \sqrt{1 + 2e \cos \theta + e^2}. \quad (8.2.11)$$

В результате система уравнений для оскулирующих элементов принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\theta} &= 2a_t \frac{p^3}{\mu \tilde{V}} \left( \frac{r}{p} \right)^2, \\ \frac{de}{d\theta} &= 2a_t \frac{p^2}{\mu \tilde{V}} \left( \frac{r}{p} \right)^2 (e + \cos \theta), \\ \frac{d\sigma}{d\theta} &= 2a_t \frac{p^2}{e\mu \tilde{V}} \left( \frac{r}{p} \right)^2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

По предположению  $a_t = \text{const}$  или  $a_t(\theta) = a_t(-\theta)$ ; тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta = \frac{2}{\mu} \int_0^{2\pi} a_t \frac{p^2}{eV} \frac{\sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = 0,$$

так как в правой части под интегралом стоит произведение четной и нечетной функций. Следовательно, постоянное или являющееся

четной функцией от угла  $\theta$  возмущающее касательное ускорение не приводит к вековому уходу линии апсид.

Рассмотрим теперь изменение эксцентриситета за один виток, предполагая, что  $a_i/g \ll e \ll 1$ . В этом случае с точностью до  $e^2$  имеем

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \approx 1 - e \cos \theta, \quad \left(\frac{r}{p}\right)^2 \approx 1 - 2e \cos \theta, \quad \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{r}{p}\right)^2 \approx 1 - 3e \cos \theta,$$

$$(1 - 3e \cos \theta)(e + \cos \theta) = e + \cos \theta - 3e \cos^2 \theta$$

и

$$\frac{de}{d\theta} \approx 2a_i \frac{p^2}{\mu} (e + \cos \theta - 3e \cos^2 \theta).$$

Проинтегрируем полученное уравнение от 0 до  $2\pi$ , осредняя  $a_i$  за один оборот, и получим приращение эксцентриситета

$$\Delta e = -2a_i \frac{\pi e p^2}{\mu}.$$

Видно, что при  $a_i > 0$  эксцентриситет орбиты уменьшается, а при  $a_i < 0$  он увеличивается (вековое возмущение).

Необходимо сделать три замечания.

1. Полученный результат является следствием принятых предположений, что  $a_i = \text{const}$  или  $a_i(\theta) = a_i(-\theta)$  и  $a_i/g \ll e \ll 1$ . В дальнейшем при анализе эволюции орбиты под действием торможения в атмосфере (п. 8.3.3) будет показано, что в процессе эволюции эксцентриситет орбиты убывает, а не возрастает, хотя  $a_i < 0$ . Это связано с тем, что плотность атмосферы  $\rho$  убывает с высотой и нельзя считать  $a_i = \text{const}$ . Поскольку торможение в атмосфере зависит от скоростного напора  $q = \rho V^2/2$ , нельзя считать, что  $a_i(\theta) = a_i(-\theta)$ .

2. В п. 8.2.2 было рассмотрено движение КА по логарифмической спирали при разгоне с помощью касательного ускорения ( $a_i > 0$ ). Было показано, что величина эксцентриситета оскулирующей орбиты не меняется ( $e = \text{const}$ ). В рассмотренном движении  $a_i/g \sim e$  и нарушено условие  $a_i/g \ll 1$ . Величина  $a_i$  убывает с увеличением расстояния до притягивающего центра.

3. В § 8.4 будет исследована в точной постановке задача о разгоне КА под действием постоянного по величине касательного ускорения ( $a_i > 0$ ). Будет показано, что при таком движении эксцентриситет оскулирующей орбиты возрастает, так как условие  $a_i/g \ll e$  не выполняется.

Уравнение для параметра орбиты при сделанных допущениях записывается в виде

$$\frac{dp}{d\theta} \approx 2a_i \frac{p^3}{\mu} (1 - 3e \cos \theta),$$

и после интегрирования получим

$$\Delta p = 4a_i \frac{\pi p^3}{\mu}.$$

Следовательно, при наличии возмущающего касательного ускорения возникает вековое возмущение параметра орбиты одинакового знака с  $a_t$ .

**8.2.5. Задача поворота плоскости орбиты.** Пусть действует только возмущающее бинормальное ускорение  $a_w$ , т. е. ускорение, нормальное к плоскости оскулирующей орбиты. Тогда система уравнений для оскулирующих элементов принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 0, \quad \frac{de}{dt} = 0, \quad \frac{dt_{\pi}}{dt} = 0 \quad \left( \frac{d\sigma}{dt} = 0 \right), \\ \frac{di}{dt} &= a_w \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= a_w \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} \quad (\sin i \neq 0) \\ \frac{d\omega}{dt} &= -a_w \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \operatorname{ctg} i \sin u. \end{aligned}$$

Отсюда  $p = \text{const}$ ,  $e = \text{const}$ ,  $t_{\pi} = \text{const}$  ( $\sigma = \text{const}$ ). Следовательно, возмущающее бинормальное ускорение не изменяет геометрической формы оскулирующей орбиты и ее ориентации в оскулирующей плоскости.

Рассмотрим задачу поворота плоскости орбиты с помощью бинормальной силы, создающей ускорение  $a_w$ . Если величина  $a_w$  не зависит от положения КА на орбите, наибольший эффект в смысле максимальной скорости поворота  $di/dt$  достигается в точках орбиты, где максимально произведение  $r \cos u$ .

Для более детального анализа ограничимся случаем круговой орбиты, который исследован в работах [14, 34]. При круговой орбите  $r = p$  и

$$\frac{di}{dt} = a_w \frac{\cos u}{V_{\text{кр}}},$$

где  $V_{\text{кр}}$  — круговая скорость. Будем считать, что бинормальное ускорение  $a_w$  создается двигателем КА, а минимизируемый функционал — это характеристическая скорость

$$V_x = \int_0^T |a_w| dt.$$

Здесь  $T$  — нефиксированное время поворота плоскости круговой орбиты на заданный угол  $\Delta i$ . Видно, что наибольший эффект достигается от включения двигателя вблизи линии узлов, где  $|\cos u| \approx 1$  и скорость поворота  $|di/dt|$  максимальна. Вычислим, используя известные соотношения,

$$|\Delta i| = \frac{1}{V_{\text{кр}}} \left| \int_0^T a_w \cos u dt \right| \leq \frac{1}{V_{\text{кр}}} \int_0^T |a_w| dt,$$

или

$$|\Delta i| \leq \frac{V_x}{V_{кр}}.$$

Отсюда оценка функционала снизу

$$V_x \geq V_{кр} |\Delta i|.$$

Покажем, что эта оценка дает точную нижнюю грань [14]. Будем выбирать знак бинормального ускорения из условия

$$\text{sign } a_w = \text{sign } \cos u.$$

При этом будем предполагать включение двигателя, создающего ускорение  $a_w$ , в малой окрестности линии узлов, где выполняется неравенство

$$1 - |\cos u| \leq \varepsilon.$$

Здесь  $\varepsilon$  — малая величина. В такой постановке закон изменения  $|a_w(t)|$  может быть произвольным, если только обеспечивается нужный знак ускорения  $a_w$ .

С учетом принятого управления можно записать

$$\Delta i = \frac{1}{V_{кр}} \int_0^T |a_w| |\cos u| dt \geq \frac{1-\varepsilon}{V_{кр}} \int_0^T |a_w| dt,$$

или

$$\Delta i \geq \frac{1-\varepsilon}{V_{кр}} V_x.$$

Отсюда имеем оценку сверху

$$V_x \leq \frac{V_{кр}}{1-\varepsilon} \Delta i.$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим

$$V_x \leq V_{кр} \Delta i,$$

где  $\Delta i > 0$ . Последнее обеспечивается выбранным управлением. Таким образом, точная нижняя грань искомого функционала

$$V_x = V_{кр} \Delta i.$$

Итак, для оптимального в смысле минимизации характеристической скорости поворота плоскости круговой орбиты за неограниченное время двигатель должен включаться вблизи линии узлов на одно и то же время и иметь максимальную по величине тягу. Направление вектора тяги при двух последовательных включениях (в восходящем и нисходящем узлах) меняется на противоположное. На каждом из активных участков за счет работы двигателя плоскость круговой орбиты поворачивается на одинаковый угол. Активные участки разделены пассивными участками одинаковой длительности. Поскольку время поворота плоскости орбиты не задано, то в пределе длительность активных участков должна стремиться к

нулю, число их неограниченно возрастает, как и время маневра, а длительность пассивных участков должна стремиться к половине периода обращения.

Заметим, что поворот плоскости орбиты с помощью последовательности бинормальных импульсов скорости не является энергетически оптимальным. Действительно, при одноимпульсном повороте плоскости круговой орбиты на угол  $\Delta i$ , выполняемом на линии узлов, требуется приращение скорости

$$\Delta V = 2V_{кр} \sin \frac{\Delta i}{2}.$$

Понятно, что  $\Delta V < \Delta V_x$ , так как  $2 \sin(\Delta i/2) < \Delta i$ . Лишь при малых углах поворота  $\Delta i$  оба маневра становятся энергетически эквивалентными.

В пп. 5.6.2 и 5.6.3 было показано, что дальнейшее уменьшение суммарного приращения скорости для поворота плоскости движения обеспечивается за счет использования трехимпульсного биэллиптического маневра.

### § 8.3. Эволюция орбиты ИСЗ под действием атмосферы

В период подготовки первых запусков искусственных спутников Земли (ИСЗ) возникли задачи прогнозирования их движения и определения времени существования на орбите с учетом тормозящего действия верхней атмосферы. Последняя задача наиболее важна для ИСЗ, имеющих относительно низкие орбиты с перигеем около 200 км, где влияние атмосферы наиболее ощутимо.

В точной постановке задачи прогнозирования движения и определения времени существования ИСЗ решаются численным интегрированием уравнений возмущенного движения на быстродействующей ЭВМ. Однако качественная картина эволюции и многие количественные оценки могут быть получены на основе приближенного подхода, когда рассматриваются упрощенные уравнения возмущенного движения.

Для прогнозирования движения ИСЗ необходимо знать характер изменения плотности верхней атмосферы и коэффициент аэродинамического сопротивления ИСЗ.

Распределение плотности верхней атмосферы по высоте зависит от многих причин и может изменяться достаточно быстро по времени. Одним из главных факторов, влияющих на распределение плотности верхней атмосферы, является солнечный нагрев. Наряду с систематическими циклическими вариациями плотности могут иметь место случайные вариации, порождаемые случайными (непредсказуемыми) изменениями солнечной активности [4, 64]. В целом картина вариаций плотности верхней атмосферы оказывается весьма сложной и трудно прогнозируемой.

На основе наблюдения за движением многих ИСЗ в период с 1964 года по 1982 год и обобщения опыта проведения баллисти-



ческих расчетов по прогнозу движения ИСЗ создан для высот 120—1500 км ГОСТ 25645.115-84 «Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли» [10]. Для расчета движения ниже 120 км (вход аппарата в атмосферу) используют модель плотности согласно ГОСТ 4401-81 [57], а также различные модели динамической атмосферы.

Существуют специальные методики определения безразмерного коэффициента аэродинамического сопротивления  $C_x$  в зависимости от формы ИСЗ и углов его ориентации относительно вектора скорости набегающего потока. В некоторых случаях для проведения оценочных расчетов можно принять  $C_x = 2—2,5$  независимо от формы ИСЗ [62].

**8.3.1. Изотермическая модель атмосферы.** Для приближенных расчетов пользуются упрощенной моделью атмосферы, которая строится на некоторых допущениях. Из условия вертикального равновесия атмосферы имеем

$$dp = -\rho g dh, \quad (8.3.1)$$

где  $dp$  — изменение давления воздуха при изменении высоты  $h$  на величину  $dh$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести. Согласно уравнению состояния идеального газа

$$\rho = \frac{pM}{RT}. \quad (8.3.2)$$

Здесь  $M = 28,964420$  кг/кмоль — молярная масса воздуха,  $R = 8314,32$  Дж/(К · кмоль) — универсальная газовая постоянная,  $T$  — термодинамическая температура (К). После подстановки (8.3.2) в (8.3.1) получим

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gM}{RT} dh.$$

Интегрируя это уравнение от начальной высоты  $h_0$  до текущей высоты  $h$ , найдем

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\int_{h_0}^h \frac{gM}{RT} dh\right), \quad (8.3.3)$$

где  $p_0 = p(h_0)$ , а затем с учетом (8.3.2)

$$\rho(h) = \rho_0 \frac{MT_0}{M_0 T} \exp\left(-\int_{h_0}^h \frac{gM}{RT} dh\right). \quad (8.3.4)$$

Здесь  $\rho_0$ ,  $M_0$ ,  $T_0$  соответствуют высоте  $h_0$ . Будем пренебрегать в уравнении (8.3.4) изменением  $g$ ,  $M$ ,  $T$  по высоте (так называемая *изотермическая модель атмосферы*, поскольку  $T = \text{const}$ ). Тогда, вводя обозначение

$$H = \frac{RT}{gM}. \quad (8.3.5)$$

получим

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{h-h_0}{H}\right). \quad (8.3.6)$$

Чтобы установить физический смысл величины  $H$ , запишем уравнение состояния (8.3.2) для высоты  $h_0$ , т. е.

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT},$$

а затем с помощью соотношения (8.3.5) приведем его к виду

$$p_0 = \rho_0 g H.$$

Следовательно, величина  $H$  равна высоте столба однородной атмосферы, имеющей плотность  $\rho_0$ , который при  $h = h_0$  имеет такое же давление, что и рассматриваемая изотермическая атмосфера. Величину  $H$  называют *высотой однородной атмосферы*. Согласно

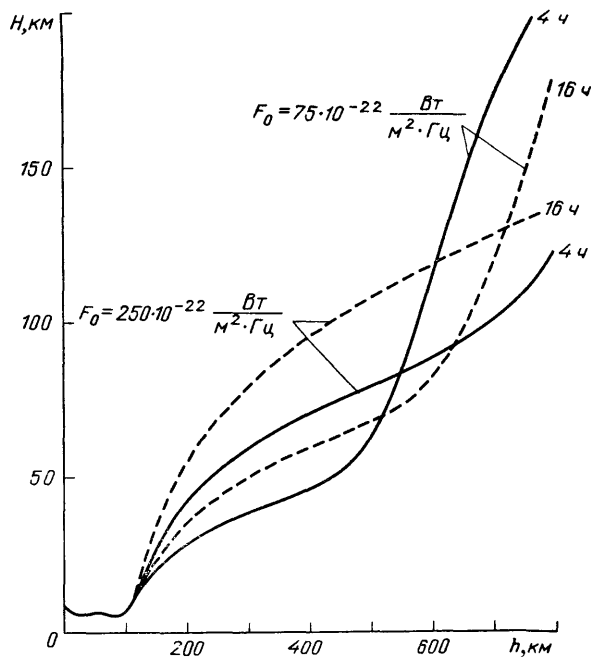


Рис. 8.6. Высота однородной атмосферы для различных уровней солнечной радиации и времен суток [69]

формуле (8.3.6), при изменении высоты  $h$  на величину  $H$  плотность уменьшается в  $e \approx 2,7$  раз. Эта формула может быть использована для аппроксимации плотности в некотором диапазоне высот. Высота однородной атмосферы  $H$  существенно зависит от расстояния до поверхности Земли (рис. 8.6). С увеличением высоты величина  $H$

увеличивается, достигая значений  $H = 100 - 200$  км для высот  $h = 600 - 800$  км. С ростом  $H$  скорость убывания плотности атмосферы уменьшается.

Величина  $H$  зависит также от уровня солнечной активности  $F_0$  и местного времени (рис. 8.6). Величина  $F_0$  показывает уровень плотности потока радиоизлучения Солнца на частоте 2800 МГц (длина волны 10,7 см).

Если известны высоты, на которых движется ИСЗ, то за счет выбора соответствующей величины  $H$  можно даже на основе изотермической модели получить зависимость плотности от высоты, достаточно близкую к истинной.

**8.3.2. Упрощенная задача торможения ИСЗ в атмосфере на эллиптической орбите с малым эксцентриситетом.** Сила аэродинамического ускорения, направленная против вектора скорости ИСЗ относительно атмосферы, создает возмущающее касательное ускорение

$$a_t = -\sigma_x \rho V^2, \quad (8.3.7)$$

или с учетом (2.3.8) и (8.2.11)

$$a_t = -\sigma_x \rho \frac{\mu}{p} \tilde{V}^2, \quad (8.3.7a)$$

где

$$\sigma_x = \frac{C_x S}{2m} \quad (8.3.8)$$

— коэффициент аэродинамического ускорения,  $m$  — масса ИСЗ.

Если ограничиться моделью центрального поля притяжения Земли, то ИСЗ в верхних слоях атмосферы будет иметь только возмущающее касательное ускорение ( $a_s = a_w = 0$ ). Отсюда  $d\Omega/dt = 0$ ,  $di/dt = 0$ . Следовательно, сопротивление атмосферы не приводит к изменению положения плоскости орбиты ИСЗ.

Покажем, что сопротивление атмосферы приводит к уменьшению эксцентриситета, т. е. эллиптическая орбита в процессе эволюции под действием сопротивления атмосферы стремится к круговой. С этой целью подставим ускорение (8.3.7a) в уравнение (8.2.12) для производной эксцентриситета оскулирующей орбиты:

$$\frac{de}{d\vartheta} = -2\rho\sigma_x \rho \left(\frac{r}{p}\right)^2 \tilde{V} (e + \cos \vartheta).$$

Предполагая начальную орбиту ИСЗ квазикруговой, получим с учетом малости эксцентриситета

$$\left(\frac{r}{p}\right)^2 \tilde{V} \approx 1 - e \cos \vartheta$$

и

$$\frac{de}{d\vartheta} = -2\rho\sigma_x \rho (\cos \vartheta + e \sin^2 \vartheta).$$

Проинтегрируем это уравнение, осредняя параметр орбиты  $p$  за один оборот

$$\Delta e = -2\rho\sigma_x \left( \int_0^{2\pi} \rho \cos \vartheta d\vartheta + \int_0^{2\pi} \rho e \sin^2 \vartheta d\vartheta \right).$$

Очевидно, второй интеграл всегда больше нуля. Определим знак первого интеграла. Будем полагать, что плотность атмосферы зависит только от радиуса  $r$ . Отсюда имеем одинаковую плотность атмосферы в точках орбиты, симметричных относительно линии апсид. Обозначим через  $\rho^+$  плотность атмосферы в точке  $\vartheta = \vartheta^*$  и через  $\rho^-$  — в точке  $\vartheta = \pi - \vartheta^*$ . Тогда

$$\int_0^{2\pi} \rho \cos \vartheta d\vartheta = 2 \int_0^{\pi} \rho \cos \vartheta d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/2} (\rho^+ - \rho^-) \cos \vartheta d\vartheta.$$

Но плотность атмосферы убывает с высотой, поэтому  $\rho^+ - \rho^- > 0$ , и первый интеграл также положителен. Следовательно,  $\Delta e < 0$ , т. е. под действием сопротивления атмосферы эксцентриситет орбиты ИСЗ убывает и эллиптическая орбита стремится к круговой.

Рассмотрим интеграл энергии в виде

$$K + \Pi = E,$$

где  $K = V^2/2$  — кинетическая энергия единицы массы,  $\Pi = -\mu/r$  — потенциальная энергия единицы массы,  $E = h/2$  — полная энергия единицы массы. Изменение энергии в процессе торможения

$$\Delta K + \Delta \Pi = \Delta E, \quad (8.3.9)$$

причем  $\Delta E < 0$ , так как под воздействием атмосферы полная энергия убывает. В случае квазикруговой орбиты ИСЗ

$$V^2 \approx \frac{\mu}{r},$$

отсюда

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{2r} = 0,$$

или

$$K + \frac{1}{2} \Pi = 0.$$

Поэтому для квазикруговой орбиты

$$\Delta K = -\frac{1}{2} \Delta \Pi. \quad (8.3.10)$$

После подстановки (8.3.10) в (8.3.9) найдем величину уменьшения полной энергии

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \Delta \Pi + \Delta \Pi = \frac{1}{2} \Delta \Pi.$$

Таким образом, при торможении в атмосфере ИСЗ, движущегося по квазикруговой орбите, половина потенциальной энергии переходит в кинетическую, а вторая половина тратится на преодоление сопротивления атмосферы. Отсюда следует, что при торможении в атмосфере ИСЗ на квазикруговой орбите его скорость возрастает. При разгоне с помощью касательной силы ИСЗ на квазикруговой орбите происходит обратное: разгоняющая сила увеличивает потенциальную энергию, а кинетическая энергия убывает. Общая энергия ИСЗ при этом возрастает.

**8.3.3. Эволюция эллиптической орбиты при движении ИСЗ в неподвижной атмосфере.** Рассмотрим задачу эволюции произвольной эллиптической орбиты ИСЗ под действием сопротивления атмосферы в предположении, что поле притяжения Земли является центральным, атмосфера сферически-симметричная и неподвижная, а сила сопротивления атмосферы направлена против вектора скорости ИСЗ. Как показано в работе [49], сжатие Земли не влияет на время существования ИСЗ, поскольку не вызывает вековых возмущений параметра  $p$  и эксцентриситета  $e$  орбиты.

Воспользуемся уравнениями движения в оскулирующих элементах вида (8.1.12) — (8.1.14), (8.1.19), (8.1.21):

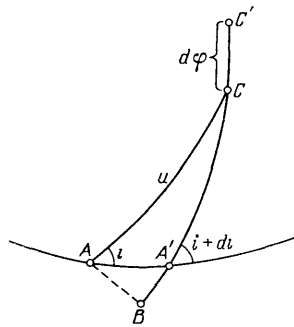


Рис. 8.7. К определению связи между изменениями аргумента широты и времени

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2a_n r \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ a_r \sin \vartheta + a_n e \frac{r}{p} + a_n \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta \right], \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -a_r \cos \vartheta + a_n \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - a_w e \frac{t}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right], \\ \frac{d\Omega}{dt} &= a_w \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i}, \\ \frac{di}{dt} &= a_w \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r}{p} \cos u. \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

Уравнение для времени пролета перигентра опущено, так как в дальнейшем оно не используется. Правые части системы (8.3.11) не зависят явно от времени, поэтому целесообразно перейти к новому независимому переменному — аргументу широты  $u$ . Для этого найдем соотношение, связывающее  $u$  и  $t$ . В каждый момент времени справедливо условие

$$r^2 d\varphi = \sqrt{\mu p} dt, \quad (8.3.12)$$

где  $d\varphi$  — полное угловое перемещение радиуса-вектора за время  $dt$ . Из построений на рис. 8.7 имеем

$$d\varphi = \overline{BC'} - \overline{BC} = \overline{BC'} - \overline{AC} = \overline{BA'} + \overline{A'C'} - \overline{AC}. \quad (8.3.13)$$

Здесь  $\overline{AC}$  и  $\overline{BC'}$  — проекции дуг оскулирующих эллипсов на сферу единичного радиуса, соответствующих моментам времени  $t$  и  $t + dt$ . Но

$$\begin{aligned} \overline{AA'} &= d\Omega, & \overline{BA'} &\approx d\Omega \cos i, \\ \overline{AC} &= u, & \overline{A'C'} &= u + du \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

и после подстановки (8.3.14) в (8.3.12) получим

$$r^2 (d\Omega \cos i + du) = \sqrt{\mu p} dt,$$

или

$$r^2 \left( \frac{d\Omega}{dt} \cos i + \frac{du}{dt} \right) = \sqrt{\mu p}.$$

С учетом производной  $d\Omega/dt$  найдем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \left( 1 - a_w \frac{r^3}{\mu p} \operatorname{ctg} i \sin u \right).$$

Тогда можно записать [49]:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{du} &= 2a_n \frac{r^3 \gamma}{\mu}, \\ \frac{de}{du} &= \frac{r^2 \gamma}{\mu} \left[ a_r \sin \vartheta + a_n e \frac{r}{p} + a_n \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta \right], \\ \frac{d\omega}{du} &= \frac{r^2 \gamma}{e\mu} \left[ -a_r \cos \vartheta + a_n \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - a_w e \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right], \\ \frac{d\Omega}{du} &= a_w \frac{r^3 \gamma}{\mu p} \frac{\sin u}{\sin i}, \\ \frac{di}{du} &= a_w \frac{r^3 \gamma}{\mu p} \cos u, \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

где

$$\vartheta = u - \omega, \quad \gamma = \frac{1}{1 - a_w \frac{r^3}{\mu p} \operatorname{ctg} i \sin u}. \quad (8.3.16)$$

Как уже отмечалось, сопротивление неподвижной атмосферы, когда  $a_w = 0$ , не вызывает вековых возмущений долготы восходящего узла и наклона орбиты, т. е.  $\Omega = \text{const}$  и  $i = \text{const}$ . Поэтому в системе (8.3.15) останутся только три первых уравнения. Кроме того, при  $a_w = 0$  имеем  $\gamma = 1$ .

Найдем теперь радиальную и трансверсальную составляющие ускорения от силы аэродинамического сопротивления при движении в атмосфере:

$$\begin{aligned} a_r &= -\sigma_x \rho V V_r = -\sigma_x \rho V \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta, \\ a_n &= -\sigma_x \rho V V_n = -\sigma_x \rho V \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (8.3.17)$$

Для описания зависимости плотности от высоты можно воспользоваться любой моделью, например,

$$\rho = \rho_0 \Delta, \quad (8.3.18)$$

где  $\rho_0$  — плотность атмосферы на начальной фиксированной высоте,  $\Delta$  — относительная плотность атмосферы, задаваемая конечной формулой в виде функции от высоты.

После подстановки (8.3.17) и (8.3.18) в (8.3.15) получим с учетом уравнения орбиты

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$$

и соотношения для скорости ИСЗ

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}$$

систему трех уравнений, описывающих эволюцию орбиты ИСЗ в неподвижной атмосфере ( $\gamma = 1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{du} &= -2\sigma_x \rho_0 \Phi(p, e, \omega, u), \\ \frac{de}{du} &= -2\sigma_x \rho_0 \Psi(p, e, \omega, u), \\ \frac{d\omega}{du} &= -2\sigma_x \rho_0 X(p, e, \omega, u), \end{aligned} \quad (8.3.19)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(p, e, \omega, u) &= \frac{p^3 \Delta \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2}, \\ \Psi(p, e, \omega, u) &= \frac{p \Delta \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2} (e + \cos \vartheta), \\ X(p, e, \omega, u) &= \frac{p \Delta \sin \vartheta \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{e (1 + e \cos \vartheta)^2}, \\ &(\vartheta = u - \omega). \end{aligned} \quad (8.3.20)$$

Непосредственное интегрирование системы (8.3.19) требует большого времени счета, так как шаг по аргументу широты должен быть ограниченным, а число оборотов ИСЗ на орбите может ока-

заться достаточно большим. Чтобы избежать увеличения времени счета, целесообразно ввести два уровня интегрирования: в пределах одного оборота ИСЗ на орбите и по числу оборотов. Интегрируя уравнения (8.3.19) в пределах одного оборота, получим

$$\begin{aligned}\Delta p &= -2\sigma_x \rho_0 \int_0^{2\pi} \Phi(p, e, \omega, u) du, \\ \Delta e &= -2\sigma_x \rho_0 \int_0^{2\pi} \Psi(p, e, \omega, u) du, \\ \Delta \omega &= -2\sigma_x \rho_0 \int_0^{2\pi} X(p, e, \omega, u) du.\end{aligned}\quad (8.3.21)$$

В пределах одного оборота величины  $p$ ,  $e$ ,  $\omega$  меняются мало, поэтому при вычислении интегралов (8.3.21) их можно принять постоянными. В таком случае  $X$  оказывается нечетной функцией истинной аномалии, т. е.

$$X(2\pi - \vartheta) = -X(\vartheta),$$

поскольку относительная плотность сферически-симметричной модели атмосферы зависит только от высоты:

$$\Delta = f\left(\frac{p}{1 + e \cos \vartheta} - R_3\right).$$

Здесь  $R_3$  — средний радиус Земли. Тогда можно записать

$$\int_0^{2\pi} X(u) du = \int_{-\omega}^{2\pi-\omega} X(\vartheta) d\vartheta = \int_0^{2\pi} X(\vartheta) d\vartheta = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta \omega = 0, \quad (8.3.22)$$

и в рассматриваемой постановке задачи действие атмосферы не вызывает векового ухода линии апсид.

С учетом малости изменения параметра и эксцентриситета за один оборот можно принять, что изменения этих величин за один оборот равны производным от указанных элементов орбиты по числу  $N$  оборотов ИСЗ на орбите, где  $N = u/2\pi$ . Тогда, учитывая (8.3.22) и полагая  $\omega = \text{const}$ , получим

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dN} &= -2\sigma_x \rho_0 \int_0^{2\pi} \Phi(p, e, u) du, \\ \frac{de}{dN} &= -2\sigma_x \rho_0 \int_0^{2\pi} \Psi(p, e, u) du.\end{aligned}\quad (8.3.23)$$



Обозначим  $n = 2N\sigma_x$  — приведенное число оборотов, и от уравнений (8.3.23) перейдем к следующим:

$$\frac{de}{dp} = \frac{\int_0^{2\pi} \Psi(p, e, u) du}{\int_0^{2\pi} \Phi(p, e, u) du}, \quad \frac{dn}{dp} = - \frac{1}{\rho_0 \int_0^{2\pi} \Phi(p, e, u) du}. \quad (8.3.24)$$

Задача об эволюции орбиты в атмосфере сведена к интегрированию двух уравнений (8.3.24), правые части которых выражены через определенные интегралы от функций  $\Psi(p, e, u)$  и  $\Phi(p, e, u)$ . Важно подчеркнуть, что правые части (8.3.24) не зависят от характеристик ИСЗ. Поэтому достаточно один раз проинтегрировать систему (8.3.24) с учетом принятой модели изменения относительной плотности  $\Delta$  по высоте. Затем легко совершить переход от  $n$  к  $N$  по формуле  $N = n/(2\sigma_x)$ , т. е. вычислить количество оборотов любого ИСЗ с учетом его коэффициента аэродинамического сопротивления  $C_x$ , массы  $m$  и площади миделева сечения  $S$ .

При заданных значениях  $p$  и  $e$  интегралы, входящие в правые части (8.3.24), можно согласно [49] вычислять с шагом  $\Delta u = 6^\circ$ , а саму систему (8.3.24) интегрировать с шагом  $\Delta p = 5$  км для высот апогея  $h_a \leq 700$  км и с шагом  $\Delta p = 10$  км для высот  $h_a > 700$  км. В этом случае методическая ошибка в определении времени движения ИСЗ из-за приближенного интегрирования не превышает 2—5 %, что значительно меньше точности знания фактического состояния плотности атмосферы и коэффициента аэродинамического сопротивления ИСЗ.

Начальные данные для системы уравнений (8.3.24) удобно задавать через начальные высоты апогея  $h_{a0}$  и перигея  $h_{п0}$ , с которыми начальные значения параметра орбиты  $p_0$  и эксцентриситета  $e_0$  связаны формулами

$$e_0 = \frac{h_{a0} - h_{п0}}{h_{a0} + h_{п0} + 2R}, \quad p_0 = (h_{a0} + R)(1 - e_0),$$

где  $R_3$  — средний радиус Земли.

Зафиксируем максимальную начальную высоту апогея  $h_a$  и будем варьировать начальной высотой перигея  $h_{п}$ . Получим однопараметрическое семейство интегральных кривых. Каждая точка этих кривых может рассматриваться в качестве начальной.

Для примера в работе [49] приведена зависимость  $n(h_a, h_{п})$  для модели атмосферы с относительной плотностью

$$\Delta = \frac{\kappa}{\left(1 + \frac{h - h_0}{H}\right)^k}.$$

Коэффициенты модели  $\kappa$ ,  $h_0$ ,  $H$ ,  $k$ , выбранные согласно работе [44], представлены в табл. 8.2. Для высот  $h > 900$  км принят такой же

закон изменения относительной плотности, как в диапазоне высот 250—900 км. Вычисленная для этой модели атмосферы зависимость  $n(h_a, h_n)$  построена на рис. 8.8 пунктиром. Сплошные линии определяют изменение высоты перигея  $h_n$  в зависимости от высоты

Т а б л и ц а 8 2

Коэффициенты модели относительной плотности атмосферы [49]

Высота, км	Коэффициенты			
	$\kappa$	$H$ , км	$h_0$ , км	$k$
100—150	1	55	100	8
150—250	$5\,667 \cdot 10^{-3}$	100	150	7
250—900	$4,428 \cdot 10^{-5}$	215	250	6

апогея  $h_a$  при торможении ИСЗ в атмосфере. Зная начальные высоты апогея и перигея, можно с помощью построенных зависимостей определить приведенное число оборотов ИСЗ  $n$ , а затем по формуле

$$N = n \frac{m}{C_x S} \quad (8.3\ 25)$$

установить ожидаемое число оборотов ИСЗ с учетом его характеристик  $m$ ,  $C_x$ ,  $S$  и тем самым определить время существования.

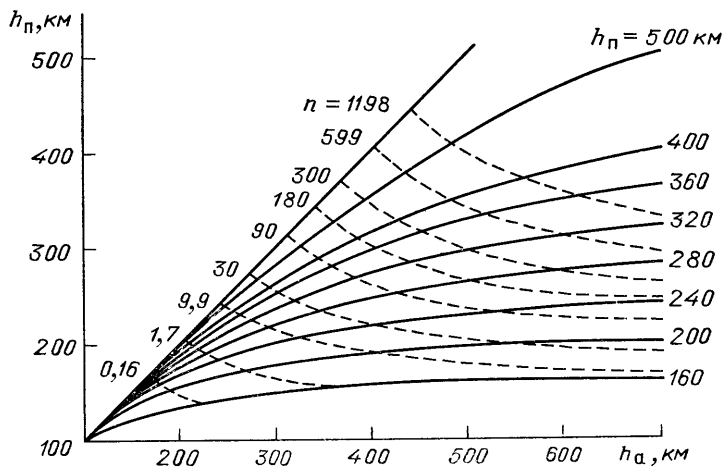


Рис 8.8 Характеристики эволюции эллиптических орбит под действием атмосферы

Принято считать, что ИСЗ прекратил свое существование, когда элементы его орбиты в процессе эволюции под влиянием атмосферы принимают некоторые значения, которые отвечают так называемой *критической орбите*. Под критической орбитой понимают такую орбиту, на которой ИСЗ может сделать только один полный оборот

вокруг Земли. Обычно критическую орбиту задают минимальной возможной высотой  $h_{\min}$  или минимальным периодом обращения  $T_{\min}$ . Для заданной модели плотности атмосферы характеристики критической орбиты зависят от коэффициента  $\sigma_x = C_x S / (2m)$ . Расчетами установлено, что при изменении величины  $\sigma_x$  в широком диапазоне

$$0,0001 \text{ м}^2/\text{кг} \leq \sigma_x \leq 0,1 \text{ м}^2/\text{кг}$$

величины  $h_{\min}$  и  $T_{\min}$  меняются сравнительно мало [62]:

$$108 \text{ км} \leq h_{\min} \leq 188 \text{ км},$$

$$86,5 \text{ мин} \leq T_{\min} \leq 88,1 \text{ мин}.$$

При этом большей величине  $\sigma_x$  отвечают ббльшие значения  $h_{\min}$  и  $T_{\min}$ . Ниже высот 110—120 км плотность атмосферы начинает резко увеличиваться, а сила аэродинамического сопротивления резко возрастает. Отсюда для любой модели атмосферы можно в первом приближении принять, что снижение ИСЗ до высот 110—120 км (или уменьшение периода обращения до 86,5—86,7 мин) означает окончание его времени существования.

Совместное рассмотрение построенных на рис. 8.8 зависимостей  $n(h_a, h_p)$  и  $h_p(h_a)$  позволяет оценить время, в течение которого высоты апогея и перигея изменяются в заданных пределах. Из анализа построенных зависимостей видно, что высоты апогея и перигея монотонно убывают, причем апогей убывает быстрее. Наиболее значительна эта разница для сильно вытянутых эллиптических орбит. Следовательно, при большом отличии высот апогея и перигея эволюция орбиты в атмосфере в течение длительного промежутка времени сводится практически к уменьшению высоты апогея при почти постоянной высоте перигея. Это отвечает постепенной трансформации эллиптической орбиты в круговую ( $e \rightarrow 0$ ). Отмеченный факт проявляется на рис. 8.8 в том, что кривые семейства  $h_p(h_a)$  приближаются к прямой  $h_p = h_a$ , которая соответствует круговой орбите. По мере уменьшения эксцентриситета уменьшается также разница скорости убывания высот апогея и перигея.

Построенные зависимости позволяют определить наиболее целесообразную орбиту, обеспечивающую требуемое время существования ИСЗ. Видно, что время существования ИСЗ быстро возрастает с увеличением высоты перигея. Однако для некоторых ракет-носителей увеличение высоты конца активного участка, практически совпадающей с высотой перигея, часто нецелесообразно из-за резкого падения массы выводимой полезной нагрузки, т. е. массы ИСЗ. В таких случаях выгоднее увеличивать высоту апогея при допустимой высоте перигея, что также приводит к уменьшению массы выводимой полезной нагрузки, но уже не в такой степени, как при увеличении высоты перигея. Использование вытянутых эллиптических орбит позволяет добиться значительного увеличения времени существования ИСЗ сравнительно простым путем.

Качественная картина эволюции эллиптической орбиты ИСЗ протекает следующим образом. Сначала высоты апогея и перигея орбиты меняются медленно, так как ИСЗ движется в очень разреженных слоях атмосферы. По мере уменьшения высот апогея и перигея темп эволюции орбиты возрастает. В конце эволюции высота орбиты резко уменьшается, и ИСЗ прекращает свое существование, круто снижаясь в плотных слоях атмосферы. Таким образом, основное время существования ИСЗ приходится на высокие слои атмосферы с наиболее разреженной плотностью.

Отметим также, что наибольшее значение для времени существования ИСЗ имеет плотность атмосферы в районе начального перигея, так как плотность атмосферы быстро падает с увеличением высоты, а начальный перигей эволюционирует медленно. Отсюда возникает возможность уточнения оценки времени существования ИСЗ при изменении данных о плотности атмосферы вблизи перигея: время существования примерно обратно пропорционально плотности атмосферы в области начального перигея. Для пересчета числа оборотов ИСЗ за время его существования можно воспользоваться формулой

$$N^* = N \frac{\rho_0 \sqrt{H}}{\rho_0^* \sqrt{H^*}},$$

где звездочкой отмечены уточненные плотность и высота однородной атмосферы, а остальные параметры отвечают исходной модели, по которой определены зависимости  $n(h_{\text{п}}, h_{\text{а}})$  и  $h_{\text{п}}(h_{\text{а}})$ . Так, модельная атмосфера [44] оказалась в 1,5—2 раза более разреженной, чем фактическая атмосфера на этих высотах по наблюдениям за движением ИСЗ.

Изменения высот перигея и апогея в процессе эволюции орбиты протекают с существенно различающимися скоростями. Покажем, что изменения обеих величин оказывают практически одинаковое влияние на время существования ИСЗ. С этой целью рассмотрим полное приращение  $n$  вдоль интегральной кривой  $n(h_{\text{п}}, h_{\text{а}})$ :

$$dn = \frac{\partial n}{\partial h_{\text{а}}} dh_{\text{а}} + \frac{\partial n}{\partial h_{\text{п}}} dh_{\text{п}},$$

или

$$dn = dn_1 + dn_2.$$

Можно записать

$$dn = dn_1(1 + D),$$

где

$$D = \frac{\frac{\partial n}{\partial h_{\text{п}}} dh_{\text{п}}}{\frac{\partial n}{\partial h_{\text{а}}} dh_{\text{а}}}.$$

Оценим величину  $D$ . При смещении вдоль изолинии  $n = \text{const}$  имеем  $dn = 0$ , тогда

$$\frac{\partial n}{\partial h_a} \delta h_a + \frac{\partial n}{\partial h_{\Pi}} \delta h_{\Pi} = 0,$$

откуда

$$\frac{\delta h_{\Pi}}{\delta h_a} = - \frac{\frac{\partial n}{\partial h_a}}{\frac{\partial n}{\partial h_{\Pi}}}$$

и

$$D = - \frac{\frac{dh_{\Pi}}{dh_a}}{\frac{\delta h_{\Pi}}{\delta h_a}}.$$

Обозначим

$$\text{tg } \alpha = \frac{dh_{\Pi}}{dh_a}, \quad \text{tg } \beta = \frac{\delta h_{\Pi}}{\delta h_a}.$$

Расчетным путем было установлено, что

$$\frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta} \approx 0,8 \div 1.$$

Это видно также на рис. 8.8 по наклону кривых  $h_{\Pi}(h_a)$  и  $n(h_{\Pi}, h_a)$  в точках их пересечения. Тогда

$$dn \approx 2dn_1.$$

Таким образом, время существования ИСЗ практически одинаково зависит от тех изменений высот апогея и перигея, которые происходят в процессе эволюции эллиптической орбиты при торможении в атмосфере.

**8.3.4. Влияние вращения атмосферы на эволюцию орбиты.** Будем считать, что атмосфера полностью захвачена суточным вращением Земли. Тогда скорость движения атмосферы определяется формулой

$$V_{\text{вр}} = \omega_3 r \cos \varphi, \quad (8.3.26)$$

где  $\omega_3$  — угловая скорость вращения Земли,  $r = R_3 + h$ ,  $R_3$  — радиус Земли,  $h$  — высота рассматриваемой точки,  $\varphi$  — ее широта.

Ускорение, порождаемое силой сопротивления при движении ИСЗ во вращающейся атмосфере, вычисляется по формуле

$$\mathbf{a} = -\sigma_x \rho V_{\text{отн}} V_{\text{отн}}, \quad (8.3.27)$$

где

$$\mathbf{V}_{\text{отн}} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_{\text{вр}} \quad (8.3.28)$$

— скорость ИСЗ относительно воздуха,  $\mathbf{V}$  — абсолютная скорость ИСЗ,  $V_{\text{отн}} = |\mathbf{V}_{\text{отн}}|$ . Величину скорости движения атмосферы будем

вычислять по формуле (8.3.26). Вектор  $V_{вп}$  направлен с запада на восток вдоль параллели.

Найдем радиальную, трансверсальную и бинормальную проекции вектора  $V_{отн}$  (рис. 8.9):

$$\begin{aligned} V_{отн r} &= V_r, \\ V_{отн n} &= V_n - \omega_3 r \cos \varphi \sin A, \\ V_{отн w} &= \omega_3 r \cos \varphi \cos A. \end{aligned} \quad (8.3.29)$$

Здесь  $V_r$ ,  $V_n$  — радиальная и трансверсальная составляющие абсолютной скорости ИСЗ,  $A$  — азимут движения в рассматриваемой

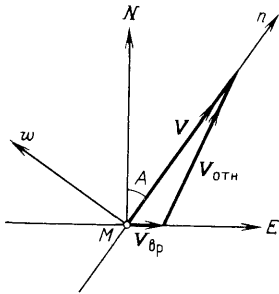


Рис. 8.9. Учет вращения атмосферы

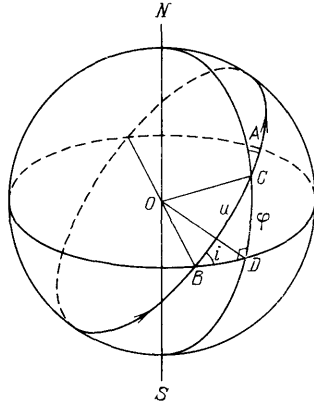


Рис. 8.10. Геометрия орбитального движения

точке (отсчитывается от направления на север  $N$  по ходу часовой стрелки). Согласно (2.3.5) и (2.3.7)

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta, \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta).$$

Из сферического треугольника  $DBC$  на рис. 8.10 имеем

$$\cos \varphi \sin A = \cos i,$$

$$\cos \angle BDC = 0 = -\cos i \cos A + \sin i \sin A \cos u.$$

Отсюда

$$\cos A = \frac{\sin i \sin A \cos u}{\cos i}$$

и далее

$$\cos \varphi \cos A = \frac{\sin i \cos \varphi \sin A \cos u}{\cos i},$$

или

$$\cos \varphi \cos A = \sin i \cos u.$$

С учетом полученных соотношений составляющие относительной скорости (8.3.29) можно представить в виде

$$\begin{aligned} V_{\text{отн } r} &= V_r, \\ V_{\text{отн } n} &= V_n - \omega_3 r \cos i, \\ V_{\text{отн } w} &= \omega_3 r \sin i \cos u. \end{aligned} \quad (8.3.30)$$

Тогда величина относительной скорости будет вычисляться по формуле

$$V_{\text{отн}} = \sqrt{V_r^2 + (V_n - \omega_3 r \cos i)^2 + \omega_3^2 r^2 \sin^2 i \cos^2 u},$$

или

$$V_{\text{отн}} = \sqrt{V^2 - 2V_n \omega_3 r \cos i + \omega_3^2 r^2 (1 - \sin^2 i \sin^2 u)}. \quad (8.3.31)$$

Отношение  $\omega_3 r/V$  является малой величиной по сравнению с 1, отсюда можно пренебречь квадратом этой величины

$$V_{\text{отн}} \approx V \sqrt{1 - 2 \frac{V_n}{V} \frac{\omega_3 r}{V} \cos i}$$

и затем

$$V_{\text{отн}} \approx V \left(1 - \frac{V_n}{V} \frac{\omega_3 r}{V} \cos i\right). \quad (8.3.32)$$

Проектируя теперь ускорение (8.3.27) на радиус-вектор, трансверсаль и бинормаль, получим с учетом (8.3.30), (8.3.32) и принятой точности до первого порядка малой величины  $\omega r/V$ :

$$\begin{aligned} a_r &= -\sigma_x \rho V_{\text{отн}} V_{\text{отн } r} = -\sigma_x \rho V V_r \left(1 - \frac{V_n}{V} \frac{\omega_3 r}{V} \cos i\right), \\ a_n &= -\sigma_x \rho V_{\text{отн}} V_{\text{отн } n} = -\sigma_x \rho V V_n \left(1 - \frac{V_n^2 + V^2}{V V_n} \frac{\omega_3 r}{V} \cos i\right), \\ a_w &= -\sigma_x \rho V_{\text{отн}} V_{\text{отн } w} = -\sigma_x \rho V^2 \frac{\omega_3 r}{V} \sin i \cos u. \end{aligned} \quad (8.3.33)$$

Оценим эволюцию параметра и эксцентриситета орбиты ИСЗ с учетом вращения атмосферы. Используя первое уравнение системы (8.3.15) и трансверсальное возмущающее ускорение согласно (8.3.33), найдем производную параметра орбиты по аргументу широты:

$$\frac{dp}{du} = 2a_{n0} \frac{r^3 \gamma}{\mu} \left(1 - \frac{V_n^2 + V^2}{V V_n} \frac{\omega_3 r}{V} \cos i\right)$$

Здесь  $a_{n0}$  — возмущающее трансверсальное ускорение от невращающейся атмосферы, вычисляемое по формуле (8.3.17). Упростим полученную производную с учетом того, что торможение ИСЗ происходит в основном вблизи перигея, где  $V_n \approx V$  ( $V_r \approx 0$ ). Тогда

$$\frac{dp}{du} = 2a_{n0} \frac{r^3 \gamma}{\mu} (1 - 2\delta \cos i). \quad (8.3.34)$$

где

$$\delta = \frac{\omega_3 r}{V}$$

— малая величина ( $\delta \approx 0,05$ ). Для производной параметра орбиты по числу оборотов имеем

$$\frac{dp}{dN} = \frac{dp}{dN} \Big|_0 (1 - 2\delta \cos i). \quad (8.3.35)$$

Здесь  $dp/dN|_0$  — осредненная производная при невращающейся атмосфере. Если  $0 < i < 90^\circ$ , то

$$\left| \frac{dp}{dN} \right| < \left| \frac{dp}{dN} \Big|_0 \right|,$$

а при  $90^\circ < i < 180^\circ$

$$\left| \frac{dp}{dN} \right| > \left| \frac{dp}{dN} \Big|_0 \right|.$$

В наибольшей степени влияние вращения атмосферы сказывается при движении ИСЗ в плоскости экватора на восток ( $i = 0$ ) или на запад ( $i = 180^\circ$ ). Для полярной орбиты ( $i = 90^\circ$ ) вращение атмосферы не вносит дополнительных изменений в характер эволюции параметра орбиты.

Рассмотрим производную эксцентриситета по аргументу широты, определяемую вторым уравнением системы (8.3.15). Слагаемое  $a_r \sin \theta$  имеет второй порядок малости, так как вблизи перигея, где происходит основное торможение ИСЗ, величина радиальной скорости, а следовательно и возмущающее радиальное ускорение, имеет первый порядок малости. Вблизи перигея  $\sin \theta$  также является величиной первого порядка малости. Отсюда

$$\frac{de}{du} = a_n \frac{r^3 \gamma}{\mu} \left[ e \frac{r}{p} + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos \theta \right],$$

и по аналогии с производной параметра орбиты можно записать

$$\frac{de}{dN} = \frac{de}{dN} \Big|_0 (1 - 2\delta \cos i), \quad (8.3.36)$$

где  $de/dN|_0$  — осредненная производная для невращающейся атмосферы. Из оценок следует также, что отличие возмущений параметра орбиты и эксцентриситета за счет вращения атмосферы не превышает 10—12 % от аналогичных возмущений, вычисленных для неподвижной атмосферы. Примерно на такую величину изменяется скоростной напор при переходе от абсолютного движения к относительному.

Далее можно найти

$$\frac{de}{dp} = \frac{de}{dp} \Big|_0, \quad (8.3.37)$$



т. е. эволюция формы орбиты с учетом вращения атмосферы подобна эволюции в предположении невращающейся атмосферы.

Из-за влияния вращения атмосферы при движении ИСЗ в восточном направлении время существования больше, чем при движении в западном направлении. В наибольшей степени этот эффект проявляется, если плоскость орбиты близка к экваториальной. Различие времен существования, вычисленных с учетом вращения атмосферы ( $T_{\text{сущ}}$ ) и без учета вращения атмосферы ( $T_{\text{сущ}0}$ ), не превышает тех же 10—12 %.

Для орбит, плоскости которых не совпадают с экваториальной, учет вращения атмосферы приводит к меньшей коррекции времени существования, а в случае полярной орбиты указанный эффект практически не влияет на время существования.

Вращение атмосферы порождает бинормальную составляющую возмущающего ускорения  $a_w$ . Отсюда возникают вековые возмущения долготы восходящего узла  $\Omega$ , наклона  $i$ , а также дополнительное возмущение аргумента перигея  $\omega$ . Можно провести оценку изменения этих элементов орбиты за все время существования ИСЗ, поскольку они, как и вековые возмущения орбиты, непосредственно влияющие на время существования, пропорциональны плотности атмосферы  $\rho$  и коэффициенту  $\sigma_x$ . Полученные на основании расчетов оценки имеют следующие величины [49]:

$$|\Delta\Omega| < 0,2^\circ, \quad |\Delta i| < 0,1^\circ, \quad |\Delta\omega| < 0,2^\circ.$$

Видно, что изменения угловых величин малы, причем они верны для ИСЗ с различными значениями  $\sigma_x$  и при различных начальных условиях движения. Таким образом, учет вращения атмосферы чрезвычайно мало сказывается на вековых уходах долготы восходящего узла, наклона и аргумента перигея.

#### § 8.4. Движение КА под действием постоянного касательного ускорения [48]

В связи с перспективой использования электрореактивных двигателей для космических перелетов рассмотрим движения космических аппаратов под действием малой тяги. Более простыми оказываются схемы двигательных установок, развивающих постоянную по величине тягу. Если исследуемый участок движения связан с относительно небольшой потерей массы рабочего тела, то можно принять, что ускорение, сообщаемое аппарату электрореактивным двигателем, является постоянным. Ввиду этого исследование движения космических аппаратов с постоянным реактивным ускорением представляет несомненный интерес.

Электрореактивные двигатели способны сообщать космическим аппаратам весьма малые ускорения, порядка нескольких мм/с<sup>2</sup>. Поэтому использование малой тяги для разгона возможно лишь после выведения аппарата на орбиту спутника, что должно производить-

ся при помощи двигателей «большой тяги». Дальнейший разгон за счет тяги электрореактивного двигателя приведет к движению КА по спиралевидной траектории.

Проведенные оценки и решение модельных задач показывают, что при разгоне по спиралевидным траекториям вектор тяги не должен сильно отклоняться от касательной к траектории. Поэтому расчет движения с касательной силой дает возможность составить достаточно правильное представление об энергетических затратах, необходимых для разгона КА.

Часто разгон КА по спиралевидной орбите считают закончившимся при достижении местной параболической скорости, и рекомендуется рассматривать последующий участок межпланетного полета как гелиоцентрический с нулевой планетоцентрической скоростью в начале движения. Такая схема может приводить к ошибке в величине потребного суммарного импульса в сторону завышения, причем величина ошибки может превышать половину местной параболической скорости в точке стыковки [13].

Более целесообразным представляется рассмотрение разгона с орбиты спутника не до параболической, а до гиперболических скоростей в рамках единой схемы движения в поле притягивающего центра. Такая схема позволяет производить более аккуратную стыковку с гелиоцентрическим участком движения за счет выбора рационального места стыковки. Кроме того, указанная схема позволяет произвести достаточно полный расчет энергетических затрат для межпланетного перелета в случае, когда тяга не очень мала и набор скорости относительно планеты, необходимой для перелета, происходит полностью вблизи планеты, в области, размеры которой малы по сравнению с расстоянием между планетами. Движение предполагаем плоским.

**8.4.1. Преобразование уравнений движения.** Систему уравнений для оскулирующих элементов можно с учетом (8.1.38), (8.2.9), (8.2.10) привести к виду

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2p}{V} a_t, \quad (8.4.1)$$

$$\frac{de}{dt} = 2 \frac{e + \cos \vartheta}{V} a_t, \quad (8.4.2)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \frac{2 \sin \vartheta}{eV} a_t, \quad (8.4.3)$$

где радиус  $r$  и скорость  $V$  определяются формулами невозмущенного движения

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \vartheta}. \quad (8.4.4)$$

Система (8.4.1)–(8.4.3) является замкнутой системой уравнений для переменных  $p$ ,  $e$ ,  $\vartheta$ . Так как правые части не зависят явно от времени, то можно исключить  $t$ . Параметр  $p$  меняется в про-

цессе разгона монотонно, как это видно из уравнения (8.4.1). Поэтому можно принять  $p$  в качестве нового независимого переменного, и получим систему двух уравнений

$$\frac{de}{dp} = \frac{e + \cos \vartheta}{p}, \quad (8.4.5)$$

$$\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{V \sqrt{\mu p}}{2r pa_t} - \frac{\sin \vartheta}{ep}. \quad (8.4.6)$$

Получив решение системы (8.4.5), (8.4.6), т. е. определив  $e$  и  $\vartheta$  в зависимости от  $p$ , найдем время  $t$  и угол  $\sigma$  при помощи квадратур из уравнений

$$\frac{dt}{dp} = \frac{V}{2pa_t}, \quad (8.4.7)$$

$$\frac{d\sigma}{dp} = \frac{\sin \vartheta}{ep}. \quad (8.4.8)$$

Для уменьшения числа параметров перейдем к безразмерным переменным. Пусть  $L$  — постоянная, имеющая размерность длины. Введем безразмерный фокальный параметр  $z$  и величину  $v$  соотношениями

$$p = Lz, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} v. \quad (8.4.9)$$

Тогда уравнение (8.4.6) можно привести к виду

$$\frac{d\vartheta}{dz} = \frac{v(1 + e \cos \vartheta)^2}{z^3} \frac{\mu}{2L^2 a_t} - \frac{\sin \vartheta}{ez}. \quad (8.4.10)$$

Выберем величину  $L$  так, чтобы имело место равенство

$$\frac{\mu}{2L^2 a_t} = 1, \quad (8.4.11)$$

откуда следует

$$a_t = \frac{1}{2} \frac{\mu}{L^2}. \quad (8.4.12)$$

Видим, что, при выборе  $L$  согласно (8.4.11), на расстоянии  $L$  от центра притяжения касательное ускорение равно половине гравитационного ускорения.

Уравнение (8.4.10) примет вид

$$\frac{d\vartheta}{dz} = \frac{v(1 + e \cos \vartheta)^2}{z^3} - \frac{\sin \vartheta}{ez}. \quad (8.4.13)$$

Для дальнейшего удобно вместо переменной  $\vartheta$  рассматривать переменную  $\cos \vartheta$ . Имеем

$$\frac{d \cos \vartheta}{dz} = - \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dz}.$$

Запишем уравнения для  $e$  и  $\cos \vartheta$ :

$$\begin{aligned} \frac{de}{dz} &= \frac{e + \cos \vartheta}{z}, \\ \frac{d \cos \vartheta}{dz} &= \frac{1 - \cos^2 \vartheta}{ez} - \frac{v(1 + e \cos \vartheta)^2 \sin \vartheta}{z^3}, \end{aligned} \quad (8.4.14)$$

где

$$v = \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \vartheta}, \quad \sin \vartheta = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}. \quad (8.4.15)$$

Уравнения для  $t$  и  $\sigma$  также приведем к безразмерной форме. Введем безразмерное время  $\tau$  при помощи соотношения

$$t = \frac{L^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \tau, \quad (8.4.16)$$

тогда вместо уравнений (8.4.7), (8.4.8) получим

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{\sin \vartheta}{ez}, \quad \frac{d\tau}{dz} = \frac{v}{z^{3/2}}. \quad (8.4.17)$$

Уравнения (8.4.14) и (8.4.17) являются безразмерными уравнениями задачи.

В соответствии с постановкой задачи ищется движение, начинающееся с круговой орбиты. Однако на круговой орбите, т. е. при  $e = 0$ , уравнения задачи имеют особенность. Если строить решение, начинающееся с круговой орбиты, то возникнут трудности. Но в построении такого решения нет необходимости. Более того, целесообразно избежать этого, так как решение, начинающееся с кругового, ввело бы через граничные условия параметр — радиус начальной орбиты, и решение зависело бы от этого параметра.

Представляется более целесообразным не требовать строгого выполнения начального условия  $e = 0$  и постараться построить такое решение уравнений, которое было бы универсальным в том смысле, что было бы близким к решению, начинающемуся с круговой орбиты любого не слишком большого радиуса. Такое решение, свободное от несущественного влияния начальных условий, позволило бы производить достаточно аккуратную оценку энергетических затрат на разгон КА.

**8.4.2. Построение решения.** Будем искать такое решение системы (8.4.14), что  $e \rightarrow 0$  и  $\cos \vartheta \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow 0$ . При выполнении этого условия оскулирующая орбита будет тем ближе к круговой, чем меньше  $z$ .

Чтобы правая часть второго из уравнений (8.4.14) была ограниченной, должно иметь место соотношение

$$e = z^2 U(z), \quad (8.4.18)$$

где  $U(z)$  — функция, равная единице при  $z = 0$ . Из первого уравнения (8.4.14) находим

$$\cos \vartheta = z \frac{de}{dz} - e. \quad (8.4.19)$$

Положив

$$\cos \vartheta = z^2 W(z) \quad (8.4.20)$$

и используя (8.4.18), получим связь между функциями  $U$  и  $W$

$$W = U + z \frac{dU}{dz}. \quad (8.4.21)$$

Будем искать  $U$  и  $W$  в виде рядов по степеням  $z$ . Пусть

$$U(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots \quad (8.4.22)$$

Тогда согласно (8.4.21)

$$W(z) = 1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 \dots \quad (8.4.23)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях в формуле (8.4.21), найдем

$$\beta_j = (1 + j) \alpha_j. \quad (8.4.24)$$

Соотношение (8.4.24) дает локальную связь между коэффициентами функций  $U$  и  $W$ .

Формула (8.4.21) дает одну связь между  $U$  и  $W$ . Для получения другой связи подставим выражения (8.4.18) и (8.4.20) во второе уравнение (8.4.14). Получим, умножая обе части равенства на  $z^3 U$ ,

$$z^4 \left( 2W + z \frac{dW}{dz} \right) U = (1 - z^4 W^2) - \sqrt{1 - z^4 W^2} v (1 + z^4 U W)^2 U. \quad (8.4.25)$$

В формуле (8.4.25) множитель при  $U$  во втором слагаемом в правой части равенства остается конечным при  $z \rightarrow 0$ . Множитель при  $U$  в левой части обращается в нуль при  $z = 0$ . Разрешая (8.4.25) относительно  $U$ , множитель при котором остается конечным, получим

$$U = \frac{(1 - z^4 W^2) - z^4 \left( 2W + z \frac{dW}{dz} \right) U}{\sqrt{1 - z^4 W^2} v (1 + z^4 U W)^2}, \quad (8.4.26)$$

где обозначено

$$v = \sqrt{1 + z^4 U (U + 2W)}.$$

Соотношение (8.4.26) помогает понять структуру рядов для  $U$  и  $W$ . Видим, что в разложении правой части (8.4.26) в ряд по  $z$  отсутствуют члены с первой, второй и третьей степенью  $z$ . Значит, в ряде (8.4.22) после свободного члена сразу идет член с  $z^4$ . В силу (8.4.24) то же верно и для ряда (8.4.23). Используя теперь формулу (8.4.26), получим, что следующими ненулевыми членами разложения в рядах (8.4.22) и (8.4.23) будут члены, содержащие  $z^8$ ,

и т. д. Будем поэтому сразу искать асимптотические ряды для  $U$  и  $W$  в виде

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{4k}, \quad W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k z^{4k}. \quad (8.4.27)$$

В силу соотношения (8.4.24) имеем

$$w_k = (1 + 4k) u_k. \quad (8.4.28)$$

Определение коэффициентов  $u_k$  и  $w_k$  удобно выполнить итеративным путем, используя формулу (8.4.26). Структура этой формулы такова, что, подставив в правую часть ряды  $U$  и  $W$  с  $l$  верными коэффициентами, получим ряд  $U$  с  $l+1$  верными коэффициентами, а по формуле (8.4.28) или непосредственно по формуле (8.4.21) определим  $W$  с  $l+1$  верными коэффициентами.

Так, подставив вначале произвольные ряды вида (8.4.27), найдем значение  $u_0 = 1$  и, согласно (8.4.28) или (8.4.21), найдем  $w_0 = 1$ , что уже было получено ранее. Подставив  $U$  и  $W$  с верными значениями  $u_0$  и  $w_0$ , вычислим аналогично верные значения  $u_1$  и  $w_1$ , и т. д.

Описанный процесс удобен для вычислений на ЭВМ. Задавшись вначале любыми  $u_k$  и  $w_k$  (например, равными нулю) и производя цикл вычислений по формулам (8.4.26) и (8.4.21) необходимое число раз, получим любое желаемое число членов в рядах для  $U$  и  $W$ .

Для вычислений с рядами целесообразно иметь подпрограммы операций над рядами, такие как сложение рядов, умножение, деление, извлечение корня, дифференцирование с домножением на  $z$ . Ряды должны размещаться в памяти в виде последовательности коэффициентов. Выражение  $z^4$  или константу также можно считать рядом, в котором только один коэффициент отличен от нуля. Однако для экономии памяти и числа операций целесообразно ввести операции умножения ряда на степень величины  $z^4$  и на константу.

Процедура определения коэффициентов по рекуррентным формулам более регулярна, чем применяемый обычно при «ручных» вычислениях метод сравнения коэффициентов при одинаковых степенях. Поэтому использование рекуррентных соотношений может оказаться весьма удобным при использовании ЭВМ для построения асимптотических разложений. На долю ЭВМ выпадает при этом основная часть работы. Для составления задания на программирование нужно лишь привести уравнения задачи к рекуррентному виду, допускающему применение итеративного процесса.

Вычисленные значения коэффициентов даны в табл. 8.3 п. 8.4.5. Все коэффициенты — целые числа, величина их быстро возрастает по мере роста индекса. Тем не менее для малых значений  $z$  отрезок ряда может представлять функции  $U$  и  $W$ , а значит, и функции  $e$  и  $\cos \vartheta$  достаточно точно.

Асимптотические ряды для  $e$  и  $\cos \vartheta$  строятся однозначно. Это указывает на то, что существует только одно решение уравнений

(8.4.14), удовлетворяющее условию  $e \rightarrow 0$  и  $\cos \vartheta \rightarrow 0$ , т. е. при подходе к притягивающему центру.

Построив ряды, можно вычислить значение  $e$  и  $\cos \vartheta$  при некотором конечном значении  $z$  и дальше вести интегрирование системы (8.4.14) численно, используя значения, вычисленные при помощи рядов, в качестве начальных условий.

Второе из уравнений (8.4.14) содержит в правой части разность двух величин, каждая из которых неограниченно растет при  $z \rightarrow 0$ , но разность их вдоль искомого решения ограничена. Это означает, что при вычислении правой части уравнения (8.4.14) для малых  $z$  имеет место потеря точности и численное интегрирование может дать большую погрешность. Поэтому интегрирование следует начинать при возможно больших значениях  $z$ . С другой стороны, вычисления по рядам дают тем более надежный результат, чем меньше  $z$ , и с этой точки зрения начальное значение  $z$  следует брать поменьше. Расчеты показали, что стыковка рядов с численным интегрированием при  $z = 0,1$  является достаточно удачной, обеспечивая необходимую точность и в начальных данных, и при интегрировании.

Численный расчет позволяет построить искомое решение уравнений (8.4.14) для любых значений  $z$ . Вместе с тем целесообразно получить асимптотические формулы, представляющие решение при достаточно больших  $z$ . Следует отметить, что асимптотика решения уравнений (8.4.14) при больших  $z$  не может строиться однозначно, так как при ее построении нельзя использовать условия поведения решения вблизи центра при малых  $z$ . Поэтому асимптотика при больших  $z$  должна являться асимптотикой не частного, а общего решения уравнений (8.4.14) и должна содержать необходимое число свободных параметров. Ниже будет показано, что построенные разложения действительно содержат две произвольные константы, распорядившись которыми можно построить асимптотическое представление любого частного решения. Фактическое определение коэффициентов произведено для построенного ранее частного решения.

**8.4.3. Асимптотика на большом удалении от центра притяжения.** Исследуем асимптотику величин  $e$  и  $\cos \vartheta$  по  $z$  при больших  $z$ . Будем искать разложения в виде рядов по целым степеням  $z$ . По мере удаления от центра в процессе разгона эксцентриситет оскулирующей орбиты неограниченно растет. Поэтому примем, что ряд для  $e$  может содержать как отрицательные, так и положительные степени  $z$ . Величина  $\cos \vartheta$  ограничена, и ряд не может содержать положительных степеней  $z$ . Итак, примем

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{z^h}, \quad \cos \vartheta = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{b_h}{z^h}.$$

Первое из уравнений (8.4.14) дает

$$z \frac{de}{dz} - e - \cos \vartheta = 0. \quad (8.4.29)$$

Подставляя разложения, получим

$$\sum_{n=1} (n-1) c_n z^n - \sum_{k=0} \frac{(k+1) a_k + b_k}{z^k} = 0.$$

Видим, что при  $n > 1$  все коэффициенты  $c_n$  должны быть равны нулю. Коэффициент  $c_1$  может быть произвольным. Обозначим  $c_1 = \alpha$ . Имеем также соотношение

$$a_k(k+1) + b_k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (8.4.30)$$

дающее связь между коэффициентами  $a_k$  и  $b_k$ . Ряды для  $e$  и  $\cos \vartheta$  запишем в виде

$$e = \alpha z + a_0 + \sum_{k=1} \frac{a_k}{z^k}, \quad (8.4.31)$$

$$\cos \vartheta = b_0 + \sum_{k=1} \frac{b_k}{z^k}. \quad (8.4.32)$$

Оценим коэффициент  $b_0$ . Для этого рассмотрим второе из уравнений (8.4.14). Выражение в левой части и первое слагаемое в правой части имеют порядок по  $z$  не ниже чем  $1/z^2$ , что следует из формул (8.4.31) и (8.4.32). Значит, порядок второго слагаемого правой части не ниже  $1/z^2$ . Но выражение

$$\frac{v \sin \vartheta}{z^3} \sim \frac{1}{z^2},$$

поэтому выражение  $1 + e \cos \vartheta$  должно быть ограничено с ростом  $z$ . Величина  $e$  возрастает, значит,  $\cos \vartheta$  должен убывать. Отсюда следует, что  $b_0 = 0$ . Из (8.4.30) получаем, что  $a_0 = 0$ .

Итак, разложения для  $e$  и  $\cos \vartheta$  имеют вид

$$e = \alpha z + A, \quad \cos \vartheta = B, \quad (8.4.33)$$

где  $A$  и  $B$  — ряды по отрицательным степеням  $z$

$$A = \sum_{k=1} \frac{a_k}{z^k}, \quad B = \sum_{k=1} \frac{b_k}{z^k}. \quad (8.4.34)$$

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $a_k$  и  $b_k$  подлежат определению. Для каждого частного решения уравнений (8.4.14) они должны определяться однозначно. Асимптотика общего решения уравнений (8.4.14) должна содержать две произвольные константы. Ниже будет показано, какие из коэффициентов удобно принять за произвольные постоянные, и будет дан метод вычисления всех других параметров разложений, как только два произвольных параметра выбраны.

Постараемся привести уравнения (8.4.14) к рекуррентному виду, допускающему применение итеративного процесса для вычисления коэффициентов.



Преобразуем первое из уравнений (8.4.14). Записав его в виде (8.4.29) и подставляя  $e$  и  $\cos \vartheta$  из (8.4.33), получим

$$z \left( \alpha + \frac{dA}{dz} \right) - (\alpha z + A) - B = 0,$$

откуда следует соотношение между  $A$  и  $B$ :

$$z \frac{dA}{dz} - A = B. \tag{8.4.35}$$

Позднее будет установлено, что в процессе итераций соотношение (8.4.35) нужно будет использовать для вычисления  $A$  через  $B$ . Поэтому разрешим его относительно  $A$ .

Введем операцию почленного умножения ряда на последовательность чисел. Операция дифференцирования с домножением на  $z$  для ряда по отрицательным степеням  $z$  является операцией умножения на последовательность отрицательных натуральных чисел. Запишем

$$z \frac{dA}{dz} = \Delta \circ A, \tag{8.4.36}$$

где  $\Delta$  означает последовательность

$$\Delta = \{-1, -2, \dots\} = \{-k\} \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{8.4.37}$$

Тождественное преобразование есть почленное умножение на последовательность

$$E = \{1, 1, \dots\}, \tag{8.4.38}$$

все члены которой равны единице. Уравнение (8.4.35) примет вид

$$\Delta \circ A - E \circ A = B,$$

или

$$(\Delta - E) \circ A = B, \tag{8.4.39}$$

где  $\Delta - E$  есть последовательность, члены которой получаются вычитанием членов последовательностей  $\Delta$  и  $E$ . Рассмотрим теперь последовательность  $(\Delta - E)^*$ , члены которой суть числа, обратные членам, составляющим  $(\Delta - E)$ . Тогда

$$(\Delta - E) \circ (\Delta - E)^* = E,$$

и можно записать

$$A = (\Delta - E)^* \circ B. \tag{8.4.40}$$

Уравнение (8.4.40) дает выражение  $A$  через  $B$ . Последовательность  $(\Delta - E)^*$  имеет вид

$$(\Delta - E)^* = \left\{ \frac{1}{-k-1} \right\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{8.4.41}$$

Видим, что для вычисления ряда  $A$  нужно выполнить почленное умножение ряда  $B$  на последовательность, закон формирования которой дается формулой (8.4.41).

Обратимся ко второму уравнению (8.4.14). Преобразуя его и используя (8.4.33), получим

$$\sqrt{1 - B^2} \frac{ve}{z^2} (1 + eB)^2 + ez \frac{dB}{dz} - 1 + B^2 = 0. \quad (8.4.42)$$

Уравнение (8.4.42) используем для вычисления  $B$ . Первые два коэффициента определим особо. Вычисления с целью определения последующих коэффициентов сведем к регулярной процедуре.

Преобразуем первое слагаемое уравнения (8.4.42). Имеем согласно (8.4.15) и (8.4.33)

$$v = \sqrt{1 + e^2 + 2eB} = e \sqrt{1 + \frac{1 + 2eB}{e^2}}.$$

Формулу (8.4.33) для  $e$  запишем в форме

$$e = \alpha z \left( 1 + \frac{A}{\alpha z} \right).$$

Тогда получим

$$\sqrt{1 - B^2} \frac{ve}{z^2} = \alpha^2 (1 + V_1), \quad (8.4.43)$$

где  $V_1$  — выражение, начинающееся с членов  $\sim 1/z^2$ .

Второе слагаемое уравнения (8.4.42) перепишем в виде

$$ez \frac{dB}{dz} = \alpha z^2 \frac{dB}{dz} + z \frac{dB}{dz} A.$$

Перенесем в правую часть уравнения (8.4.42) члены, порядок которых заведомо не ниже  $1/z^2$ . Получим

$$\alpha^2 (1 + eB)^2 + \alpha z^2 \frac{dB}{dz} - 1 = -B^2 - \alpha^2 (1 + eB)^2 V_1 - z \frac{dB}{dz} A. \quad (8.4.44)$$

Выделим в ряде  $B$  коэффициент  $b_1$

$$B = \frac{b_1 + B_1}{z}, \quad (8.4.45)$$

где  $B_1$  — ряд, начинающийся с члена  $b_2/z$ . Имеем

$$1 + eB = 1 + \alpha b_1 + \alpha B_1 + AB.$$

В уравнении (8.4.44) первое слагаемое в левой части приведем к виду

$$\alpha^2 (1 + eB)^2 = \alpha^2 (1 + \alpha b_1)^2 + 2\alpha^2 (1 + \alpha b_1) (\alpha B_1 + AB) + \alpha^2 (\alpha B_1 + AB)^2. \quad (8.4.46)$$

Второе слагаемое будет равно

$$\alpha z^2 \frac{dB}{dz} = -\alpha b_1 - \alpha B_1 + \alpha z \frac{dB_1}{dz}. \quad (8.4.47)$$

Подставим (8.4.46) и (8.4.47) в уравнение (8.4.44). Приравнявая свободные члены, получим соотношение

$$(1 + \alpha b_1) [\alpha^2 (1 + \alpha b_1) - 1] = 0,$$

которое будет удовлетворено, если положить

$$\alpha^2 (1 + \alpha b_1) = 1. \tag{8.4.48}$$

Разрешая относительно  $b_1$ , находим

$$b_1 = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^3}. \tag{8.4.49}$$

Соотношение (8.4.48) или (8.4.49) дает связь между коэффициентами  $\alpha$  и  $b_1$ . Задав один из них, можно вычислить другой.

Упростим уравнение (8.4.44), используя соотношение (8.4.48) и перенося в правую часть члены, имеющие порядок заведомо не ниже  $1/z^2$ . Получим

$$z \frac{dB_1}{dz} + B_1 = \tilde{V}, \tag{8.4.50}$$

где

$$\tilde{V} = -\frac{1}{\alpha} \left\{ B(B + 2A) + z \frac{dB}{dz} A + \alpha^2 (\alpha B_1 + AB)^2 + \alpha^2 (1 + eB)^2 V_1 \right\}. \tag{8.4.51}$$

Величину  $V_1$  надлежит вычислять по формуле

$$V_1 = \left( 1 + \frac{A}{\alpha z} \right)^2 \sqrt{1 + \frac{1 + 2eB}{e^2}} \sqrt{1 - B^2} - 1, \tag{8.4.52}$$

которая следует из (8.4.43).

Правая часть уравнения (8.4.50) имеет порядок  $1/z^2$ . Легко проверить, что левая часть имеет тот же порядок, так как члены, содержащие коэффициент  $b_2$ , взаимно уничтожаются. Это означает, что коэффициент  $b_2$  можно задать произвольно.

Введем ряд  $B_2$  соотношением

$$B_1 = \frac{b_2 + B_2}{z}, \tag{8.4.53}$$

где  $B_2$  начинается с члена  $b_3/z$ . Уравнение (8.4.50) примет вид

$$\frac{dB_2}{dz} = \tilde{V}.$$

Домножим обе части на  $z$  и используем операцию

$$\Delta = z \frac{d}{dz},$$

получим

$$\Delta \circ B_2 = z \tilde{V}. \tag{8.4.54}$$

Отсюда, разрешая относительно  $B_2$ , найдем

$$B_2 = \Delta^* \circ z\tilde{V}. \quad (8.4.55)$$

Так как  $B_2$  есть ряд по отрицательным степеням  $z$ , начинающийся с члена порядка  $1/z$ , операция  $\Delta$  в формуле (8.4.54) сводится к почленному умножению на такую же последовательность (8.4.37), которая использовалась для ряда  $A$  в формулах (8.4.36) — (8.4.39) в процессе преобразования первого уравнения (8.4.14). В силу этого последовательность  $\Delta^*$  имеет вид

$$\Delta^* = \left\{ \frac{1}{-k} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Формула (8.4.55) является рекуррентной, так как позволяет вычислять старшие коэффициенты через младшие. Так, например, коэффициент  $b_3$ , входящий в первое слагаемое ряда  $B_2$ , равное  $b_3/z$ , вычисляется через коэффициенты  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , как это видно из формул (8.4.51) и (8.4.52).

Как было выяснено, коэффициенты  $b_1$  и  $b_2$  можно задавать произвольно. Все остальные коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$  и  $\alpha$  могут быть вычислены. Поэтому коэффициенты  $b_1$  и  $b_2$  можно выбрать в качестве параметров асимптотических разложений. Более удобно, однако, выбрать вместо  $b_1$  параметр  $\alpha$ , так как  $b_1$  просто вычисляется через  $\alpha$  по (8.4.49).

Укажем последовательность вычислений по полученным выше формулам. Зададимся значениями  $\alpha$  и  $b_2$ . Затем по (8.4.49) определим  $b_1$ . Тем самым ряд  $B$  будет известен с двумя верными коэффициентами. Вычислим также ряд  $V_1$  по формуле

$$V_1 = z \left( B - \frac{b_1}{z} \right),$$

полученной на основании (8.4.45).

Далее будем проводить стандартный итерационный цикл. Определим  $A$  по формуле (8.4.40), вычислим  $V_1$  и  $\tilde{V}$  по формулам (8.4.52) и (8.4.51), определим  $B_2$  по формуле (8.4.55), а  $V_1$  и  $B$  соответственно по формулам (8.4.53) и (8.4.45). Затем снова определим  $A$  по (8.4.40) и т. д. Повторяем цикл столько раз, сколько надо, чтобы вычислить необходимое число верных коэффициентов разложения. Каждая итерация продвигает расчет на один индекс, добавляя в каждом ряду один верный коэффициент.

Так же как и при построении асимптотики у центра притяжения, вычисления рационально вести, используя набор подпрограмм операций с рядами. Целесообразно не создавать такие подпрограммы заново для каждого частного вида разложений, а построить их для разложений некоторого более общего вида, включающих как частные случаи разложения данной задачи вблизи центра и вдали от него.

Будем считать, что операции производятся с рядами по степеням элемента  $\xi$ , где  $\xi = z^r$ , а  $r$  — действительное число, в частности

целое. Для разложений вблизи центра по степеням  $z^4$  имеем  $r = 4$ . При больших  $z$  разложение идет по степеням  $z^{-1}$  и  $r = -1$ .

По аналогии с числами ряды можно записывать как в нормализованном, так и в ненормализованном виде. При нормализованной записи каждый ряд  $X$  по степеням элемента  $\xi$  считаем представленным в форме

$$X = \xi^m \sum_{i=0} x_i \xi^i.$$

Число  $m$  назовем *порядком* ряда. Ряд, оставшийся после выделения нормализующего множителя  $\xi^m$ , начинается с константы. Коэффициенты  $x_i$  аналогичны разрядам в многоразрядном числе. Совокупность коэффициентов  $x_i$  назовем *мантиссой* ряда.

Операции с нормализованными рядами аналогичны операциям с нормализованными числами. Некоторые из них удобно выполнять примерно по той же логической схеме, как операции в арифметическом устройстве вычислительной машины с параллельным сумматором. Так, при операции сложения рядов вначале производится выравнивание порядков, т. е. сдвиг мантиссы ряда с большим порядком в сторону более высоких степеней  $\xi$  на величину разности порядков. Затем производится почленное сложение мантисс. При умножении рядов порядки их складываются, а мантиссы перемножаются по простому правилу. При умножении ряда на выражение  $\xi^s$  к порядку ряда прибавляется число  $s$ .

Операция деления может быть сведена к операции умножения на ряд, возведенный в степень  $-1$ . Возведение в степень, целую или дробную, удобно вести по формуле бинома, возводя в степень выражение  $(1 + Q)$ , где  $Q$  — ряд, имеющий порядок не меньше единицы.

Операция дифференцирования по  $\xi$  с домножением на  $\xi$  сводится к почленному умножению мантиссы ряда на последовательность чисел

$$\{m + i\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $m$  — порядок ряда. Операции дифференцирования по  $z$  с домножением на  $z$  отвечает последовательность

$$\Delta = \{r(m + i)\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (8.4.56)$$

В частности, для рядов типа  $U$  и  $W$ , даваемых формулами (8.4.27), имеем  $r = 4$ ,  $m = 0$ ; получим

$$\Delta = \{4i\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (8.4.57)$$

Для рядов типа  $A$  и  $B$ , даваемых формулами (8.4.34), имеем  $r = -1$ ,  $m = 1$  и последовательность

$$\Delta = \{-(1 + i)\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

что совпадает с последовательностью (8.4.37).

Перейдем к определению констант асимптотических разложений  $\alpha$  и  $b_2$ . Для достаточно большого  $z$  величины  $e$  и  $\cos \vartheta$  представимы разложениями (8.4.33), (8.4.34), которые перепишем в виде

$$e = \alpha z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2 + A_2}{z^2}, \quad \cos \vartheta = \frac{b_1}{z} + \frac{b_2 + B_2}{z^2}, \quad (8.4.58)$$

где через  $A_2$  по аналогии с  $B_2$  обозначен ряд, начинающийся с члена  $a_3/r$ . Описанный выше итерационный алгоритм позволяет вычислить все коэффициенты в правых частях (8.4.58), если задать  $\alpha$  и  $b_2$ . Следовательно, значения правых частей при некотором  $z$  будут функциями величин  $\alpha$  и  $b_2$ . Пусть значения  $e$  и  $\cos \vartheta$  известны из численного интегрирования. Тогда соотношения (8.4.58) можно рассматривать как систему уравнений для определения  $\alpha$  и  $b_2$ .

Разрешим систему (8.4.58) относительно главной части зависимости разложений от параметров  $\alpha$  и  $b_2$ . Умножая второе уравнение (8.4.58) на  $1/3$  и складывая с первым, получим

$$e + \frac{\cos \vartheta}{3} = \alpha z + \left(a_1 + \frac{1}{3} b_1\right) \frac{1}{z} + \left(a_2 + \frac{1}{3} b_2\right) \frac{1}{z^2} + \left(A_2 + \frac{1}{3} B_2\right) \frac{1}{z^3}. \quad (8.4.59)$$

В силу соотношений (8.4.30) и (8.4.49) имеем

$$a_1 + \frac{1}{3} b_1 = -\frac{1-\alpha^2}{6\alpha^3}, \quad a_2 + \frac{1}{3} b_2 = 0. \quad (8.4.60)$$

Используя (8.4.60) и разрешая (8.4.59) относительно  $\alpha$  в старшем члене разложения, находим

$$\alpha = \left(e + \frac{\cos \vartheta}{3}\right) \frac{1}{z} + \frac{1-\alpha^2}{6\alpha^3} \frac{1}{z^2} - \left(A_2 + \frac{1}{3} B_2\right) \frac{1}{z^3}. \quad (8.4.61)$$

Первое слагаемое в правой части — основное, второе и третье — поправки.

В качестве первого этапа положим третье слагаемое равным нулю. Производя итерации, определим  $\alpha$ .

Разрешив второе уравнение (8.4.58) относительно  $b_2$ , получим

$$b_2 = z^2 \cos \vartheta - \frac{1-\alpha^2}{\alpha^3} z - B_2. \quad (8.4.62)$$

На первом этапе определим  $b_2$ , полагая  $B_2 = 0$ .

Взяв полученные значения  $\alpha$  и  $b_2$  при помощи рекуррентных формул, рассмотренных ранее, определим ряды  $A$  и  $B$ , а также ряды  $A_2$  и  $B_2$ . Значения рядов  $A_2$  и  $B_2$  при выбранном значении  $z$  подставим в формулы (8.4.61) и (8.4.62) и определим уточненные значения  $\alpha$  и  $b_2$ . После этого снова определим  $A_2$  и  $B_2$  и т. д. до сходимости.

Описанный двойной итерационный процесс дает решение задачи об определении параметров асимптотических разложений, отвечающих искомому частному решению уравнений (8.4.14).

Отметим, что ряд  $A_2$  можно просто получить из ряда  $A$  по формуле

$$A_2 = z^2(F \circ A),$$

где

$$F = \{0, 0, 1, 1, 1, \dots\}.$$

В последовательности  $F$  первый и второй члены равны нулю, последующие равны единице.

Отметим также, что если асимптотическое разложение достаточно точно представляет  $e$  и  $\cos \vartheta$  в некоторой области значений  $z$ , то результат определения параметров  $\alpha$  и  $b_2$  не должен зависеть от выбора точки сопряжения в пределах указанной области. Это обстоятельство может быть использовано для проверки надежности определения параметров разложения.

**8.4.4. Определение  $\sigma$  и  $\tau$ .** Для угла  $\sigma$  и времени  $\tau$  были получены уравнения (8.4.17). Определим асимптотические разложения для  $\sigma$  и  $\tau$  вблизи центра и вдали от центра. Вблизи центра имеем

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{1}{z^3} \frac{\sqrt{1-z^4W^2}}{U}.$$

Положим для выделения особенности

$$\sigma = \frac{1}{z^2} S + \sigma_0, \quad (8.4.63)$$

где  $\sigma_0$  — произвольная постоянная, и будем искать  $S$  в виде ряда по степеням  $z^4$ . Величина  $S$  будет определяться уравнением

$$z \frac{dS}{dz} - 2S = \frac{\sqrt{1-z^4W^2}}{U},$$

или

$$(\Delta - 2E)^* \circ S = \frac{\sqrt{1-z^4W^2}}{U},$$

откуда для определения  $S$  найдем формулу

$$S = (\Delta - 2E)^* \circ \frac{\sqrt{1-z^4W^2}}{U}. \quad (8.4.64)$$

Ряды  $U$  и  $W$  по степеням  $z^4$  считаем известными.

В уравнении для  $\tau$  вблизи центра произведем замену

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{z}} T + \tau_0, \quad (8.4.65)$$

после чего получим для  $T$  уравнение

$$z \frac{dT}{dz} - \frac{1}{2} T = v. \quad (8.4.66)$$

Ряд  $T$  определим по формуле

$$T = \left( \Delta - \frac{1}{2} E \right)^* \circ \sqrt{1 + z^4 U (U + 2W)}. \quad (8.4.67)$$

Для рядов  $S$  и  $T$  имеем в формуле (8.4.56)  $r = 4$ ,  $m = 0$  и последовательность  $\Delta$  будет определяться по формуле (8.4.57). Поэтому разрешающие последовательности в формулах (8.4.64) и (8.4.67) будут

$$(\Delta - 2E)^* = \left\{ \frac{1}{4i-2} \right\}, \quad \left( \Delta - \frac{1}{2} E \right)^* = \left\{ \frac{1}{4i - \frac{1}{2}} \right\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

При помощи формул (8.4.64) и (8.4.67) рассчитаем ряды  $S$  и  $T$ . Для любого значения  $z$  можем определить  $\sigma$  и  $\tau$  по формулам (8.4.63) и (8.4.65) с точностью до произвольных пока постоянных  $\sigma_0$  и  $\tau_0$ .

Перейдем к разложениям при больших  $z$ . Имеем

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{1}{z^2} \frac{\sqrt{1-B^2}}{\alpha + \frac{A}{z}}.$$

Положим

$$\sigma = \frac{1}{z} \tilde{S} + \sigma_1. \quad (8.4.68)$$

Найдем

$$z \frac{d\tilde{S}}{dz} - \tilde{S} = \frac{\sqrt{1-B^2}}{\alpha + \frac{A}{z}}$$

и для определения  $\tilde{S}$  получим соотношение

$$\tilde{S} = (\Delta - E)^* \circ \frac{\sqrt{1-B^2}}{\alpha + \frac{A}{z}}. \quad (8.4.69)$$

В уравнении для  $\tau$  замена

$$\tau = \sqrt{z} \tilde{T} + \tau_1 \quad (8.4.70)$$

приведет к соотношению

$$\tilde{T} = \left( \Delta + \frac{1}{2} E \right)^* \circ \left[ \left( \alpha + \frac{A}{z} \right) \sqrt{1 + \frac{1+2eB}{e^2}} \right]. \quad (8.4.71)$$

Если ряды  $A$ ,  $B$  и  $e$  известны, то по формулам (8.4.69) и (8.4.71) определим ряды  $\tilde{S}$  и  $\tilde{T}$  и по формулам (8.4.68) и (8.4.70) рассчитаем величины  $\sigma$  и  $\tau$  с точностью до констант  $\sigma_1$  и  $\tau_1$ .

Ряды  $\tilde{S}$  и  $\tilde{T}$  таковы, что в формуле (8.4.56) для последовательности  $\Delta$  имеем  $r = -1$ ,  $m = 0$ . Разрешающие последовательности в формулах для определения  $\tilde{S}$  и  $\tilde{T}$  могут быть легко выписаны.



Формулы (8.4.63), (8.4.65), (8.4.68) и (8.4.70) показывают, что вблизи центра  $\sigma$  и  $\tau$  не ограничены. На больших расстояниях от центра  $\sigma$  остается конечным,  $\tau$  растет как  $\sqrt{z}$ .

Выделим частное решение уравнений (8.4.17). За начальное направление для отсчета углов примем направление радиуса-вектора для бесконечно большого  $z$ . Тогда при  $z \rightarrow \infty$  получим, что полярный угол  $\varphi = \vartheta + \sigma \rightarrow 0$ . Но  $\cos \vartheta \rightarrow 0$  и  $\vartheta \rightarrow \pi/2$ . Отсюда следует, что константа  $\sigma_1$ , равная предельному значению  $\sigma$ , будет  $\sigma_1 = -\pi/2$ . Зная ее, можно вычислить значения  $\sigma$  для достаточно больших  $z$  по асимптотической формуле (8.4.68) и найти начальные условия для численного интегрирования первого уравнения (8.4.17). Доведем интегрирование в сторону уменьшения  $z$  до значения  $z$ , для которого справедливо асимптотическое разложение (8.4.63) вблизи центра. Сравнивая расчеты по формуле (8.4.63) с результатами интегрирования, найдем константу этого разложения  $\sigma_0$ .

Для величины  $\tau$  поступим иначе. Зададимся значением  $\tau = 0$  в точке, где  $e = 1$ , т. е. в точке, где достигается местная параболическая скорость. Проводя численное интегрирование второго уравнения (8.4.17) в сторону уменьшения и в сторону увеличения  $z$  и сравнивая результаты интегрирования с расчетом по асимптотическим формулам (8.4.65) и (8.4.70), определим константы этих формул  $\tau_0$  и  $\tau_1$ .

Значения коэффициентов асимптотических разложений для  $\sigma$  и  $\tau$  приведены ниже.

**8.4.5. Результаты расчета и примеры.** При малых  $z$  были получены асимптотические формулы (8.4.18) и (8.4.20) для величин  $e$  и  $\cos \vartheta$ , где  $U$  и  $W$  вычисляются по (8.4.27).

Для величин  $\sigma$  и  $\tau$  имеем формулы (8.4.63), (8.4.65), где  $S$  и  $T$  ряды того же типа, что и ряды  $U$  и  $W$ :

$$S = \sum_{k=0} s_k z^{4k}, \quad T = \sum_{k=0} t_k z^{4k}.$$

Константы в формулах (8.4.63) и (8.4.65) равны

$$\sigma_0 = -3,40942, \quad \tau_0 = 1,34571.$$

Коэффициенты рядов приведены в табл. 8.3.

При больших  $z$  имеем асимптотические формулы (8.4.33), (8.4.34) для  $e$  и  $\cos \vartheta$ , а также формулы (8.4.68), (8.4.70) для  $\sigma$  и  $\tau$ , где

$$\tilde{S} = \sum_{k=0} \frac{\tilde{s}_k}{z^k}, \quad \tilde{T} = \sum_{k=0} \frac{\tilde{t}_k}{z^k}.$$

Значения констант равны

$$\alpha = 0,766490, \quad \sigma_1 = -1,57080, \quad \tau_1 = -1,611.$$

Коэффициенты рядов  $A$ ,  $B$ ,  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{T}$  даны в табл. 8.4.

Таблица 8.3

Коэффициенты разложений у центра по степеням  $z^4$ 

$k$	$A$	$B$	$S$	$T$
0	$1,0 \cdot 10^0$	$1,0 \cdot 10^0$	$-0,5 \cdot 10^0$	$-2,0 \cdot 10^0$
1	$-6,0 \cdot 10^0$	$-3,0 \cdot 10^1$	$2,75 \cdot 10^0$	$4,285714 \cdot 10^{-1}$
2	$3,53 \cdot 10^2$	$3,177 \cdot 10^3$	$-4,835417 \cdot 10^1$	$-5,75 \cdot 10^0$
3	$-5,0216 \cdot 10^4$	$-6,528080 \cdot 10^5$	$4,292169 \cdot 10^3$	$3,604946 \cdot 10^2$
4	$1,271935 \cdot 10^7$	$2,162289 \cdot 10^8$	$-8,098106 \cdot 10^5$	$-5,110699 \cdot 10^4$
5	$-5,007378 \cdot 10^9$	$-1,051549 \cdot 10^{11}$	$2,555165 \cdot 10^8$	$1,281759 \cdot 10^7$
6	$2,829338 \cdot 10^{12}$	$7,073346 \cdot 10^{13}$	$-1,204903 \cdot 10^{11}$	$-5,010652 \cdot 10^9$
7	$-2,173519 \cdot 10^{15}$	$-6,303206 \cdot 10^{16}$	$7,935154 \cdot 10^{13}$	$2,819974 \cdot 10^{12}$

Таблица 8.4

Коэффициенты разложений вдали от центра по степеням  $\frac{1}{z}$ 

$k$	$A$	$B$	$\tilde{S}$	$\tilde{T}$
0	—	—	$-1,30465 \cdot 10^0$	$1,53298 \cdot 10^0$
1	$-4,58000 \cdot 10^{-1}$	$9,16000 \cdot 10^{-1}$	0	0
2	$6,80189 \cdot 10^{-1}$	$-2,04057 \cdot 10^0$	$-7,74093 \cdot 10^{-2}$	$-7,40216 \cdot 10^{-1}$
3	$-8,45172 \cdot 10^{-1}$	$3,38069 \cdot 10^0$	$-3,20210 \cdot 10^{-1}$	$5,44150 \cdot 10^{-1}$
4	$8,85247 \cdot 10^{-1}$	$-4,42624 \cdot 10^0$	$1,05876 \cdot 10^0$	$-3,77374 \cdot 10^{-1}$
5	$-4,86283 \cdot 10^{-1}$	$2,91770 \cdot 10^0$	$-2,39421 \cdot 10^0$	$-1,23027 \cdot 10^{-2}$
6	$-9,64784 \cdot 10^{-1}$	$6,75349 \cdot 10^0$	$4,44336 \cdot 10^0$	$8,58759 \cdot 10^{-1}$
7	$4,43942 \cdot 10^0$	$-3,55154 \cdot 10^1$	$-6,81926 \cdot 10^0$	$-2,41946 \cdot 10^0$
8	$-1,10624 \cdot 10^1$	$9,95619 \cdot 10^1$	$7,74454 \cdot 10^0$	$4,80913 \cdot 10^0$
9	$2,11182 \cdot 10^1$	$-2,11182 \cdot 10^2$	$-2,45367 \cdot 10^0$	$-7,51642 \cdot 10^0$
10	$-3,13216 \cdot 10^1$	$3,44538 \cdot 10^2$	$-1,89947 \cdot 10^1$	$8,38035 \cdot 10^0$
11	$2,90194 \cdot 10^1$	$-3,48233 \cdot 10^2$	$7,31602 \cdot 10^1$	$-1,84542 \cdot 10^0$
12	$1,76253 \cdot 10^1$	$-2,29129 \cdot 10^2$	$-1,79535 \cdot 10^2$	$-2,32322 \cdot 10^1$
13	$-1,71363 \cdot 10^2$	$2,39908 \cdot 10^3$	$3,41319 \cdot 10^2$	$8,44939 \cdot 10^1$
14	$5,27883 \cdot 10^2$	$-7,91825 \cdot 10^3$	$-4,90991 \cdot 10^2$	$-2,00619 \cdot 10^2$

В табл. 8.5 представлены полученные численным интегрированием величины  $e$ ,  $\cos \vartheta$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\tilde{h}$  в зависимости от  $z$  в диапазоне  $0,1 \leq z \leq 20$ . Графики указанных величин построены на рис. 8.11.

Величина

$$\tilde{h} = \frac{e^2 - 1}{z}$$

есть безразмерное значение удвоенной полной энергии.

Т а б л и ц а 8.5

Изменение характеристик движения по  $z$  вдоль орбиты

$z$	$e$	$\cos \theta$	$\sigma$	$\tau$	$\tilde{h}$
0,10	0,009994	0,009970	-53,3820	-4,97871	-9,99900
0,12	0,014382	0,014313	-38,0922	-4,42574	-8,44161
0,14	0,019556	0,019382	-28,8661	-3,99908	-7,14013
0,16	0,025503	0,025128	-22,8710	-3,65360	-6,24594
0,18	0,032207	0,031475	-18,7539	-3,36729	-5,54979
0,20	0,039646	0,038332	-15,8022	-3,12493	-4,99214
0,22	0,047793	0,045597	-13,6115	-2,91623	-4,53507
0,24	0,056615	0,053158	-11,9390	-2,73398	-4,15331
0,26	0,066076	0,060904	-10,6313	-2,57297	-3,82936
0,28	0,076137	0,068730	-9,58789	-2,42927	-3,55073
0,30	0,086757	0,076539	-8,74073	-2,29994	-3,30824
0,32	0,097896	0,084250	-8,04234	-2,18264	-3,09505
0,34	0,109512	0,091795	-7,45886	-2,07556	-2,90590
0,36	0,121566	0,099118	-6,96556	-1,97723	-2,73673
0,38	0,134020	0,106179	-6,54409	-1,88645	-2,58431
0,4	0,146838	0,112949	-6,18056	-1,80226	-2,44610
0,45	0,180027	0,110190	-5,39184	-1,61006	-2,15020
0,5	0,215315	0,142001	-4,93070	-1,45562	-1,90728
0,55	0,251470	0,153636	-4,50292	-1,31363	-1,70321
0,6	0,288902	0,163344	-4,20657	-1,19254	-1,52756
0,7	0,365541	0,178381	-3,73868	-0,98117	-1,23769
0,8	0,443994	0,188657	-3,41258	-0,80437	-1,00359
0,9	0,523513	0,195430	-3,17267	-0,65205	-0,80659
1,0	0,603641	0,199643	-2,98886	-0,51783	-0,63562
1,2	0,764699	0,202929	-2,72567	-0,28806	-0,34603
1,4	0,925942	0,202030	-2,54612	-0,09406	-0,10188
1,6	1,08688	0,198833	-2,41563	0,07546	0,11332
1,8	1,24734	0,194388	-2,31640	0,22720	0,30881
2,0	1,40726	0,189299	-2,23832	0,36543	0,49019
2,2	1,56666	0,183923	-2,17524	0,49306	0,61110
2,4	1,72556	0,178472	-2,12318	0,61211	0,82398
2,6	1,88401	0,173075	-2,07947	0,72406	0,98058
2,8	2,04205	0,167807	-2,04223	0,83004	1,13213
3,0	2,19972	0,162713	-2,01012	0,93090	1,27959
3,5	2,59250	0,150857	-1,94631	1,16480	1,63459
4,0	2,98367	0,140292	-1,89878	1,37817	1,97558
4,5	3,37360	0,130929	-1,86198	1,57570	2,30692
5,0	3,76253	0,122627	-1,83263	1,76056	2,63133
6,0	4,53820	0,108656	-1,78875	2,10061	3,26588
8,0	6,08385	0,088240	-1,73408	2,69644	4,50165
10,0	7,62514	0,074166	-1,70136	3,21638	5,71428
12,0	9,16399	0,063919	-1,67957	3,68410	6,91490
14,0	10,7014	0,056140	-1,66402	4,11294	8,10847
16,0	12,2377	0,050040	-1,65236	4,51134	9,29756
18,0	13,7733	0,045130	-1,64329	4,88505	10,4836
20,0	15,3085	0,041095	-1,63604	5,23819	11,6675

Безразмерные значения расстояния  $\rho$  и скорости  $v/\sqrt{z}$  согласно (8.4.4), (8.4.9) могут быть вычислены по формулам

$$\rho = \frac{z}{1 + e \cos \vartheta}, \quad \frac{v}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \vartheta}}{\sqrt{z}}. \quad (8.4.72)$$

На рис. 8.12 дано изменение по безразмерному времени  $\tau$  величин  $\rho$ ,  $v/\sqrt{z}$ ,  $\tilde{h}$  и углов — истинной аномалии оскулирующего движения  $\vartheta$  и полярного угла  $\varphi$ . Угол  $\varphi = \vartheta + \sigma$  отсчитывается от направления радиуса, отвечающего бесконечно большому  $z$ , в сторону

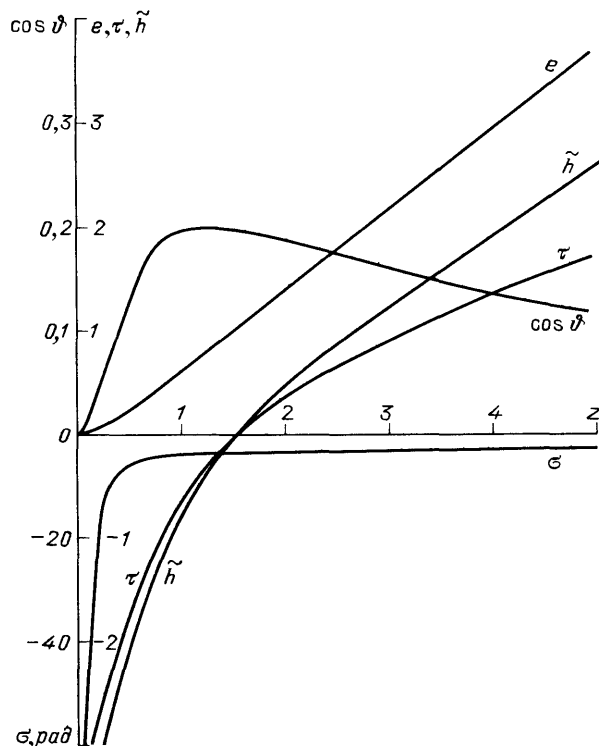


Рис. 8.11. Изменение характеристик движения вдоль орбиты

движения при раскрутке. Значение  $\tau = 0$  отвечает параболической точке ( $\tilde{h} = 0$ ). Видим, что скорость движения сначала убывает, при прохождении района параболической точки достигает минимума, а затем растет. Характер изменения по времени вне окрестности параболической точки близок к линейному, причем быстрота убывания и быстрота возрастания приблизительно одинаковы. Энергия растет монотонно. Быстрота роста энергии меньше там, где меньше скорость движения.

На рис. 8.13 изображена траектория движения в различных масштабах. По осям отложено  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Отмечены значения  $z$ .

Для определения размерного расстояния и скорости имеем, согласно (8.4.4), (8.4.9) и (8.4.11), формулы

$$s = \rho L, \quad V = \frac{v}{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{\mu}{L}}, \quad L = \sqrt{\frac{\mu}{2a_t}}. \quad (8.4.73)$$

Вычислим значения этих величин в параболической точке. Из расчетов имеем

$$\rho_{\text{пар}} = 1,24259, \quad \left(\frac{v}{\sqrt{z}}\right)_{\text{пар}} = 1,26846.$$

Видно, что расстояние до параболической точки и скорость в ней для данного притягивающего центра ( $\mu$ ) зависят только от величины ускорения  $a_t$ .

Покажем, как можно пользоваться построенным решением для оценки характеристик движения при разгоне с круговой орбиты до

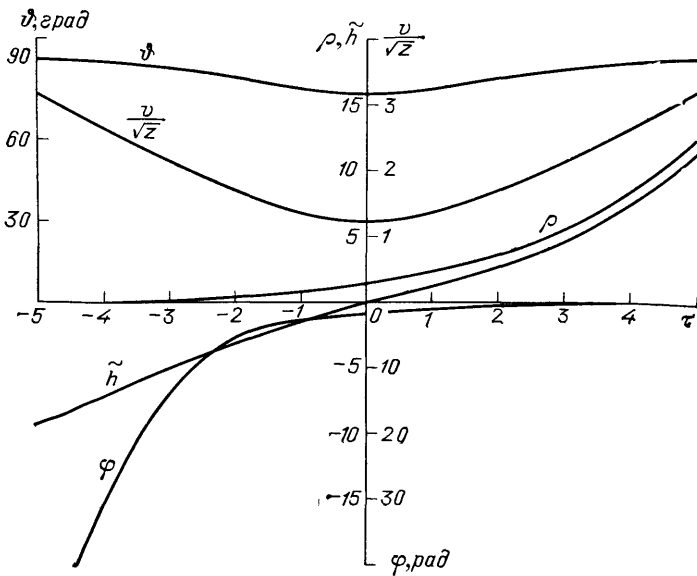


Рис. 8.12. Зависимость параметров движения от безразмерного времени

заданной энергии. Радиус начальной круговой орбиты  $r_0$  приравняем значению большой полуоси  $a$  для оскулирующего движения, т. е. примем в начальной точке

$$a_{\text{н}} = r_0.$$

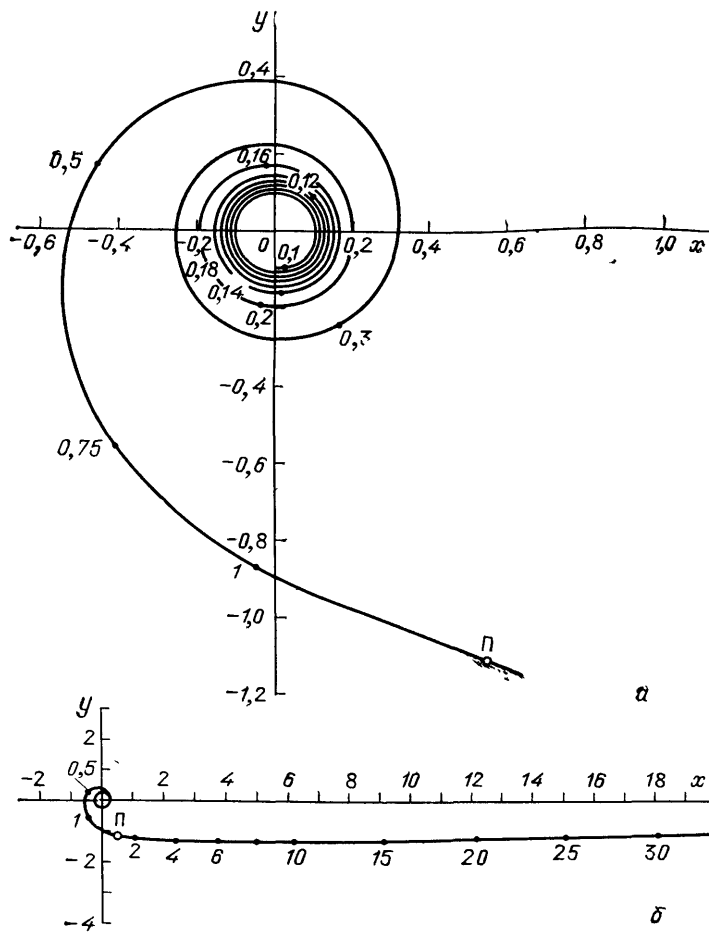


Рис. 8.13. Траектория движения КА под действием малой тяги: П — точка перехода через параболическую скорость; разметка по траектории — значения параметра  $z$

Безразмерное значение большой полуоси вычислим по формуле

$$\tilde{a}_H = \frac{a_H}{L}, \quad \text{где } L = \sqrt{\frac{\mu}{2a_t}}$$

Далее имеем соотношение

$$\tilde{h} = -\frac{1}{\tilde{a}_H}$$

Интерполируя по табл. 8.5 или производя вычисления по асимптотическим формулам, определим начальные значения других параметров:  $z_H$ ,  $\cos \theta_H$ ,  $\sigma_H$  и  $\tau_H$ .

В конечной точке считаем заданной полную энергию. Так как разгон происходит до гиперболических скоростей, то в качестве энергетической характеристики удобно принять величину  $V_\infty$  — скорость на бесконечности для оскулирующего гиперболического движения в конечной точке. Имеем формулы

$$h_k = V_\infty^2, \quad \tilde{h}_k = V_\infty^2 \frac{L}{\mu} = \frac{V_\infty^2}{\sqrt{2\mu a_t}}.$$

Интерполируя по таблицам или используя асимптотические формулы, найдем  $z_k$  и определим величины  $\cos \vartheta_k$ ,  $\sigma_k$ ,  $\tau_k$ . По формулам (8.4.72) вычислим  $\rho_k$  и  $(v/\sqrt{z})_k$ .

Размерное расстояние  $r_k$  и скорость  $V_k$  в конечной точке получим из формулы (8.4.73).

За время разгона угол  $\sigma$  изменится на величину

$$\Delta\sigma = \sigma_k - \sigma_n,$$

что приближенно соответствует углу поворота радиуса-вектора. Так как  $\vartheta \approx 90^\circ$  при малых и при больших  $z$ , то оценка угла поворота по углу  $\sigma$  достаточно точна. Если рассматривать разгон до энергий, близких к параболической, то погрешность будет несколько больше. Однако, как это видно из рис. 8.12, ошибка всегда будет меньше  $12^\circ$ .

Изменение  $\tau$  за время разгона

$$\Delta\tau = \tau_k - \tau_n.$$

Согласно (8.4.16) полное время разгона определяется по формуле

$$\Delta t = \Delta\tau \frac{L^{3/2}}{\sqrt{\mu}}.$$

Расход рабочего тела связан со значением интеграла

$$I = \int_{t_n}^{t_k} a_t^2 dt.$$

Имеем в рассматриваемом случае

$$I = a_t^2 \Delta t.$$

Если входной величиной для расчета является энергия, подобно тому, как это было выше, то в области пригодности асимптотических формул удобно использовать разложения, которые давали бы основные безразмерные характеристики движения непосредственно по значению энергии. Такие разложения могут быть достаточно просто получены при помощи итерационного процесса с использованием операций с рядами. Приведем результат.

Для малых  $z$  получим разложения по безразмерной большой полуоси  $\tilde{a}$ :

$$z = \tilde{a} F_z, \quad \sigma = \sigma_0 - \frac{1}{2\tilde{a}^2} F_\sigma,$$

$$e = \tilde{a}^2 F_e, \quad \tau = \tau_0 - \frac{2}{\sqrt{\tilde{a}}} F_\tau,$$

где  $F$  — ряды вида

$$F = \sum_{k=0} f_k \tilde{a}^{4k}.$$

Во всех рядах свободные члены равны единице. Величины  $\sigma_0$  и  $\tau_0$  те же, что и в формулах (8.4.63), (8.4.65). Коэффициенты рядов  $F$  приведены в табл. 8.6.

Таблица 8.6

Коэффициенты разложений у центра по степеням  $\tilde{a}^3$

$k$	$F_z$	$F_e$	$F_\sigma$	$F_\tau$
0	$1,0 \cdot 10^0$	$1,0 \cdot 10^0$	$1,0 \cdot 10^0$	$1,0 \cdot 10^0$
1	$-1,0 \cdot 10^0$	$-8,0 \cdot 10^0$	$-3,5 \cdot 10^0$	$2,85714 \cdot 10^{-1}$
2	$1,6 \cdot 10^1$	$4,22 \cdot 10^2$	$7,87083 \cdot 10^1$	$-4,0 \cdot 10^0$
3	$-9,08 \cdot 10^2$	$-5,626 \cdot 10^4$	$-7,63309 \cdot 10^2$	$2,27565 \cdot 10^2$
4	$1,19272 \cdot 10^5$	$1,37710 \cdot 10^7$	$1,49385 \cdot 10^6$	$-3,01208 \cdot 10^4$
5	$-2,86203 \cdot 10^7$	$-5,31789 \cdot 10^9$	$-4,80915 \cdot 10^8$	$7,24860 \cdot 10^6$
6	$1,09036 \cdot 10^{10}$	$2,96929 \cdot 10^{12}$	$2,29546 \cdot 10^{11}$	$-2,76252 \cdot 10^9$
7	$-6,03846 \cdot 10^{12}$	$-2,26298 \cdot 10^{15}$	$-1,52396 \cdot 10^{14}$	$1,52903 \cdot 10^{12}$

Для больших  $z$  имеем

$$z = \frac{\tilde{h}}{\alpha^2} \Phi_z, \quad \sigma = \sigma_1 - \frac{\alpha}{\tilde{h}} \Phi_\sigma,$$

$$e = \frac{\tilde{h}}{\alpha} \Phi_e, \quad \tau = \tau_1 + 2\sqrt{\tilde{h}} \Phi_\tau, \quad \rho = \tilde{h} \Phi_\rho,$$

где  $\alpha$ ,  $\sigma_1$ ,  $\tau_1$  имеют приведенные ранее значения, а  $\Phi$  — ряды по обратным степеням  $\tilde{h}$ , имеющие вид

$$\Phi = \sum_{k=0} \frac{\varphi_k}{\tilde{h}^k}.$$

Свободные члены рядов равны единице. Коэффициенты рядов даны в табл. 8.7.

В качестве иллюстрации рассмотрим разгон с круговой орбиты, отстоящей от поверхности Земли на 500 км. Примем  $a_n = 6870$  км. Пусть разгон совершается до энергий, отвечающих скорости на бесконечности  $V_\infty = 3$  км/с и 5 км/с, что соответствует примерно условиям полета к Венере и к Марсу по баллистическим орбитам.



Таблица 8.7  
Коэффициенты разложений вдали от центра по степеням  $\frac{1}{h}$

$k$	$\Phi_z$	$\Phi_e$	$\Phi_\sigma$	$\Phi_\tau$	$\Phi_p$
0	$1,0 \cdot 10^0$	$1,0 \cdot 10^0$	$1,0 \cdot 10^0$	$1,0 \cdot 10^0$	$1,0 \cdot 10^0$
1	0	0	0	0	$5,39864 \cdot 10^{-1}$
2	$-1,0 \cdot 10^0$	$7,93754 \cdot 10^{-1}$	$-9,79520 \cdot 10^{-1}$	$3,33333 \cdot 10^{-1}$	$8,51054 \cdot 10^{-1}$
3	$3,59909 \cdot 10^{-1}$	$-1,79955 \cdot 10^{-1}$	$4,09681 \cdot 10^{-1}$	$-1,07973 \cdot 10^{-1}$	$-4,59452 \cdot 10^{-1}$
4	$1,77980 \cdot 10^0$	$-7,04922 \cdot 10^{-1}$	$1,62168 \cdot 10^0$	$-2,94228 \cdot 10^{-1}$	$-3,97789 \cdot 10^{-1}$
5	$-1,71210 \cdot 10^0$	$6,38979 \cdot 10^{-1}$	$-1,76062 \cdot 10^0$	$3,15623 \cdot 10^{-1}$	$8,35495 \cdot 10^{-1}$
6	$-3,25580 \cdot 10^0$	$9,56211 \cdot 10^{-1}$	$-2,66999 \cdot 10^0$	$3,37129 \cdot 10^{-1}$	$1,05716 \cdot 10^{-1}$
7	$6,24974 \cdot 10^0$	$-1,94612 \cdot 10^0$	$5,93488 \cdot 10^0$	$-8,42072 \cdot 10^{-1}$	$-1,63041 \cdot 10^0$
8	$4,59955 \cdot 10^0$	$-9,44194 \cdot 10^{-1}$	$2,95874 \cdot 10^0$	$-1,87305 \cdot 10^{-1}$	$8,78038 \cdot 10^{-1}$
9	$-1,98663 \cdot 10^1$	$5,37837 \cdot 10^0$	$-1,75680 \cdot 10^1$	$2,07467 \cdot 10^0$	$3,00838 \cdot 10^0$
10	$4,66398 \cdot 10^{-1}$	$-1,27347 \cdot 10^0$	$3,89160 \cdot 10^0$	$-9,66117 \cdot 10^{-1}$	$-4,13386 \cdot 10^0$
11	$5,59258 \cdot 10^1$	$-1,33000 \cdot 10^1$	$4,59461 \cdot 10^1$	$-4,55248 \cdot 10^0$	$-4,44742 \cdot 10^0$
12	$-4,00056 \cdot 10^1$	$1,28783 \cdot 10^1$	$-4,31351 \cdot 10^1$	$5,72991 \cdot 10^0$	$1,35937 \cdot 10^1$
13	$-1,35472 \cdot 10^2$	$2,76494 \cdot 10^1$	$-1,01232 \cdot 10^2$	$8,01971 \cdot 10^0$	$1,86623 \cdot 10^0$
14	$3,14653 \cdot 10^2$	$-5,64634 \cdot 10^1$	$1,98010 \cdot 10^2$	$-2,13120 \cdot 10^1$	$-3,75803 \cdot 10^1$

Расчет проведен для серии значений касательного ускорения  $a_t$  в диапазоне

$$0,3 \text{ мм/с}^2 \leq a_t \leq 1000 \text{ мм/с}^2.$$

Принято  $\mu = 398\,600 \text{ км}^3/\text{с}^2$ . Результаты сведены в табл. 8.8.

Радиус сферы действия Земли относительно Солнца  $r_d \approx 900$  тыс. км. Данные табл. 8.8 показывают, что почти для всех принятых значений  $a_t$ , кроме наименьшего  $a_t = 0,3 \text{ мм/с}^2$ , параболическая точка лежит внутри сферы действия. Для  $a_t = 0,3 \text{ мм/с}^2$  параболическая точка лежит вблизи границы сферы действия.

Т а б л и ц а 8.8

Разгон с орбиты спутника Земли до заданной энергии при различной величине касательного ускорения  $a_t$

$a_t$ , мм/с <sup>2</sup>	$r_{\text{пар}}$ , тыс. км	$t_{\text{пар}}$ , сут	$V_{\infty}=3 \text{ км/с}$		$V_{\infty}=5 \text{ км/с}$		$\Delta\sigma$ , обороты
			$r_k$ , тыс. км	$t_+$ , сут	$r_k$ , тыс. км	$t_+$ , сут	
0,3	1012,8	275,7	15480	94,12	42120	171,2	1120
1	554,7	80,80	4776	26,02	12754	49,09	336,3
3	320,3	26,16	1673	7,814	4319	15,45	112,3
10	175,4	7,508	556,8	2,000	1339	4,242	33,87
30	101,3	2,365	220,0	0,5518	472,7	1,265	11,45
100	55,47	0,649	88,54	0,1285	159,8	0,3204	3,587
300	32,03	0,192	42,48	0,03292	64,45	0,0875	1,314
1000	17,54	0,048	20,55	0,00722	26,60	0,0202	0,479

$t_{\text{пар}}$  — время разгона до параболической скорости,

$t_+$  — время полета после достижения параболической скорости.

Табл. 8.8 показывает также, что для значительной части диапазона  $a_t$ , исключая самые малые значения, весь участок разгона или расположен внутри сферы действия, или лишь несколько выходит за ее границы. Так, при разгоне до  $V_{\infty} = 3 \text{ км/с}$  с ускорением  $a_t = 3 \text{ мм/с}^2$  расстояние точки конца разгона от Земли  $r_k = 1673$  тыс. км, а при разгоне до  $V_{\infty} = 5 \text{ км/с}$  и  $a_t = 10 \text{ мм/с}^2$  имеем  $r_k = 1339$  тыс. км. При меньших  $V_{\infty}$  или больших  $a_t$  разгон будет завершаться на более близких расстояниях к Земле. Более подробное обсуждение результатов расчета траекторий разгона КА под действием постоянного касательного ускорения приведено в работе [48].

Задача оптимального разгона КА с помощью малой тяги в предположении, что ускорение КА может быть переменным по величине и может отклоняться от касательной к траектории, исследована в работе [24]. Показано, что вблизи от притягивающего центра и вдали от него оптимальный разгон происходит под действием ускорения, близкого к постоянному касательному и одинаковому по

величине для начального и конечного участков разгона. Оптимальное движение на среднем участке может существенно отличаться от касательного. Установлено, что при разгоне до  $V_\infty = 3-5$  км/с с помощью ускорения величиной  $0,3-300$  мм/с<sup>2</sup> получаемый выигрыш в расходе рабочего тела в случае оптимального управления не превышает соответственно  $1-7\%$  по сравнению с разгоном посредством касательного ускорения. Отсюда видно, что второй способ дает достаточно точную оценку потребных затрат.

### § 8.5. Движение в нецентральном поле притяжения

Точную траекторию движения ИСЗ можно определить одним из методов численного интегрирования. Например, методом Адамса, Рунге — Кутта и др. Шаг интегрирования обычно выбирают в диапазоне  $10-60$  с. Поле притяжения Земли описывают зональными, тессеральными и секториальными гармониками до 8-го порядка включительно в разложении потенциала поля по сферическим функциям. Если высота орбиты меньше  $1000$  км, то возмущения от Луны и Солнца можно не учитывать. Для более высоких орбит уже необходимо учитывать эти возмущения. Плотность атмосферы на высотах до  $1500$  км задают в соответствии с динамической моделью верхней атмосферы с поправкой на текущий индекс солнечной активности [10].

Для качественного анализа движения ИСЗ в нецентральном поле притяжения приходится упрощать модель поля, чтобы иметь возможность установить основные закономерности, не прибегая к численному интегрированию.

В главе 1 отмечалось, что наиболее существенный вклад в отличие поля притяжения Земли от центрального вносит вторая зональная гармоника, которая по крайней мере на три порядка больше остальных гармоник. Вместе с тем сама вторая зональная гармоника тоже на три порядка меньше основной составляющей поля притяжения Земли, поэтому ее можно рассматривать как возмущение центрального поля притяжения.

**8.5.1. Составляющие возмущающего ускорения от сжатия Земли.** Если в разложении потенциала Земли (1.3.25) учесть только вторую зональную гармонику (1.3.20), коэффициент которой  $J_2$  вычисляется по формуле (1.4.10), то получим модель потенциала поля притяжения Земли в виде

$$U = \frac{fM}{r} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{C-A}{MR_0^2} \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \right], \quad (8.5.1)$$

или с учетом (1.4.14) и (1.4.17)

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \left( \alpha - \frac{q}{2} \right) \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \right], \quad (8.5.2)$$

где  $\mu$  — произведение постоянной притяжения на массу Земли,  $r$  — расстояние от центра Земли,

$$\alpha = \frac{R_3 - R_{\text{п}}}{R_3} = \frac{1}{298,25} \quad (8.5.3)$$

— полярное сжатие Земли,

$$q = \frac{\omega_3^2 R_3^3}{\mu} = \frac{\omega_3^2 R_3}{g_3} \quad (8.5.4)$$

— отношение центростремительного ускорения к ускорению силы притяжения на экваторе,  $R_3$  и  $R_{\text{п}}$  — экваториальный и полярный радиусы Земли,  $\varphi$  — геоцентрическая широта рассматриваемой точки.

Используя потенциал (8.5.2), вычислим радиальную составляющую ускорения

$$g_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{\mu R_3^2}{r^4} \left( \alpha - \frac{q}{2} \right) (3 \sin^2 \varphi - 1), \quad (8.5.5)$$

направленную по радиусу, соединяющему центр Земли и рассматриваемую точку, и меридиональную составляющую

$$g_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{\mu R_3^2}{r^4} \left( \alpha - \frac{q}{2} \right) \sin 2\varphi, \quad (8.5.6)$$

направленную по касательной к меридиану, т. е. лежащую в плоскости меридиана и нормальную к  $g_r$ .

Радиальную составляющую часто представляют в виде суммы двух слагаемых,

$$g_r = g + \Delta g_r, \quad (8.5.7)$$

где

$$g = -\frac{\mu}{r^2} \quad (8.5.8)$$

— ускорение силы притяжения для модели сферической невращающейся Земли.

Обозначим

$$\delta = \mu R_3^2 \left( \alpha - \frac{q}{2} \right); \quad (8.5.9)$$

тогда

$$\Delta g_r = \frac{\delta}{r^4} (3 \sin^2 \varphi - 1) \quad (8.5.10)$$

и

$$g_\varphi = -\frac{r \delta}{r^4} \sin 2\varphi. \quad (8.5.11)$$

По существу, поправки  $\Delta g_r$  и  $g_\varphi$  являются возмущающими ускорениями, которые порождаются отклонением поля от центрального. Возмущающее ускорение  $\Delta g_r$  в северном полушарии меняет знак с «-» на «+» при увеличении геоцентрической широты от значения

$\varphi = 0$  (экватор) до  $\varphi = \pi/2$  (Северный полюс). В южном полушарии имеет место симметричная картина. Отсюда следует, что на экваторе  $\Delta g_r < 0$  и  $|g_r| > |g|$ . На полюсе соответственно  $|g_r| < |g|$ . Возмущающее ускорение  $g_\varphi$  согласно (8.5.11) в северном полушарии отрицательно, т. е. направлено к экватору, а в южном полушарии — положительно и также направлено к экватору.

Меридиональное возмущающее ускорение  $g_\varphi$  можно разложить на трансверсальную и бинормальную составляющие, если известен азимут движения  $A$  в рассматриваемой точке траектории:

$$a_n = g_\varphi \cos A, \quad a_w = g_\varphi \sin A. \quad (8.5.12)$$

Теперь можно записать радиальную, трансверсальную и бинормальную составляющие возмущающего ускорения, порождаемые отличием поля притяжения от центрального:

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\delta}{r^4} (3 \sin^2 \varphi - 1), \\ a_n &= - \frac{\delta}{r^4} \sin 2\varphi \cos A, \\ a_w &= - \frac{\delta}{r^4} \sin 2\varphi \sin A. \end{aligned} \quad (8.5.13)$$

В соотношениях (8.5.13) перейдем от широты  $\varphi$  и азимута  $A$  к наклонению орбиты  $i$  и аргументу широты  $u$ . Из сферического прямоугольного треугольника  $BCD$  (рис. 8.10) следует, что

$$\sin \varphi = \sin i \sin u,$$

а ранее при выводе составляющих относительной скорости (8.3.30) были получены равенства

$$\begin{aligned} \cos i &= \cos \varphi \sin A, \\ \cos \varphi \cos A &= \sin i \cos u. \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\delta}{r^4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1), \\ a_n &= - \frac{\delta}{r^4} \sin^2 i \sin 2u, \\ a_w &= - \frac{\delta}{r^4} \sin 2i \sin u. \end{aligned} \quad (8.5.14)$$

**8.5.2. Вековые гравитационные возмущения элементов эллиптической орбиты.** Для анализа вековых возмущений элементов орбиты воспользуемся уравнениями движения в оскулирующих элементах (8.3.14). При этом вместо времени  $t$  в качестве независимой переменной рассмотрим истинную аномалию  $\phi$ . Предполагая орбиту

эллиптической, будем считать, что для нее выполняется неравенство

$$\frac{1}{g} \sqrt{a_r^2 + a_n^2 + a_w^2} \ll e.$$

Тогда можно принять

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{d\sigma}{dt} \approx \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2},$$

откуда

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}.$$

Для производной параметра орбиты  $p$  имеем уравнение

$$\frac{dp}{d\vartheta} = 2a_n \frac{r^3}{\mu} = -\frac{2\delta}{\mu r} \sin^2 i \sin 2u. \quad (8.5.15)$$

Проинтегрируем это уравнение от 0 до  $2\pi$ , осредняя параметр орбиты  $p$  и наклонение  $i$  за один оборот и учитывая, что  $u = \vartheta + \omega$ :

$$\Delta p = -\frac{2\delta}{\mu p} \sin^2 i \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \vartheta) \sin 2(\vartheta + \omega) d\vartheta = 0.$$

Отсюда  $p = \text{const}$ , т. е. параметр орбиты не имеет вековых гравитационных возмущений.

Легко проверить также отсутствие векового ухода эксцентриситета при действии гравитационных возмущений. Действительно, гравитационные силы имеют потенциал, следовательно, существует интеграл энергии, согласно которому величина большой полуоси  $a = \text{const}$ . Но

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}},$$

откуда  $e = \text{const}$ . Таким образом, гравитационные возмущения не влияют на форму орбиты.

Рассмотрим теперь производную угла наклона плоскости орбиты к экватору:

$$\frac{di}{d\vartheta} = -\frac{\delta}{2\mu pr} \sin 2i \sin 2u,$$

или

$$\frac{di}{d\vartheta} = -\frac{\delta \sin 2i}{2\mu p^2} (1 + e \cos \vartheta) \sin 2(\vartheta + \omega). \quad (8.5.16)$$

Интегрируя за один оборот, найдем

$$\Delta i = -\frac{\delta \sin 2i}{2\mu p^2} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \vartheta) \sin 2(\vartheta + \omega) d\vartheta = 0.$$

Согласно полученному условию  $i = \text{const}$ : угол между вектором кинетического момента  $\mathbf{C}$  и плоскостью экватора будет постоянным. С учетом установленного ранее постоянства параметра орбиты ( $p = \text{const}$ ), имеем  $|\mathbf{C}| = \text{const}$ , и может происходить только поворот вектора кинетического момента. Покажем, что вектор  $\mathbf{C}$  описывает коническую поверхность. Проинтегрируем производную

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = -\frac{2\delta}{\mu p r} \cos i \sin^2 u \quad (8.5.17)$$

за один оборот при обычных предположениях. Тогда

$$\Delta\Omega = -\frac{2\delta}{\mu p^2} \cos i \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \vartheta) \sin^2(\vartheta + \omega) d\vartheta,$$

или

$$\frac{d\Omega}{dN} = -\frac{2\pi\delta}{\mu p^2} \cos i. \quad (8.5.18)$$

Из соотношения (8.5.18) видно, что сжатие Земли вызывает смещение восходящего узла орбиты в направлении, противоположном направлению движения ИСЗ. Так, у орбит с наклоном  $0 < i < 90^\circ$  под действием меридиональной составляющей возмущающего гравитационного ускорения происходит *регрессия*, т. е. уменьшение долготы восходящего узла  $\Omega$  (смещение в западном направлении). В случае полярной орбиты ( $i = 90^\circ$ ) положение восходящего узла не меняется. Для орбит с наклоном  $90^\circ < i < 180^\circ$  восходящий узел смещается в восточном направлении. Смещение долготы восходящего узла при  $i = \text{const}$  приводит к движению вектора кинетического момента по конической поверхности.

Определим вековой уход линии апсид, которым пренебрегли в первом приближении при переходе от  $t$  к  $\vartheta$  в производных. С учетом (8.1.20)

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \frac{r^2}{e\mu} \left[ a_n \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - a_r \cos \vartheta \right],$$

а после подстановки радиальной и трансверсальной составляющих возмущающего гравитационного ускорения из (8.5.14) получим

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = -\frac{\delta}{e\mu r^2} \left[ \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin^2 i \sin 2u \sin \vartheta + (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1) \cos \vartheta \right].$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\vartheta} = & -\frac{\delta}{e\mu p^2} \{ (2 + 3e \cos \vartheta + e^2 \cos^2 \vartheta) \sin^2 i \sin 2(\vartheta + \omega) \sin \vartheta + \\ & + (1 + 2e \cos \vartheta + e^2 \cos^2 \vartheta) [3 \sin^2 i \sin^2(\vartheta + \omega) - 1] \cos \vartheta \}. \end{aligned} \quad (8.5.19)$$

Проинтегрируем эту производную за один оборот. Предварительно вычислим входящие сюда интегралы, которые отличны от нуля:

$$\int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin 2(\vartheta + \omega) d\vartheta = \frac{\pi}{2} \cos 2\omega,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \sin^2(\vartheta + \omega) d\vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cos 2\omega,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta = \pi.$$

Отсюда

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\vartheta} d\vartheta = -\frac{\delta}{\mu p^2} \left[ \frac{3}{2} \pi \sin^2 i \cos 2\omega + 6 \sin^2 i \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cos 2\omega \right) - 2\pi \right]$$

и после очевидных упрощений получим осредненную производную по числу оборотов

$$\frac{d\sigma}{dN} = \frac{\pi\delta}{\mu p^2} (3 \cos^2 i - 1). \quad (8.5.20)$$

Теперь можно определить осредненную производную аргумента перигея по числу оборотов:

$$\frac{d\omega}{dN} = \frac{d\sigma}{dN} - \frac{d\Omega}{dN} \cos i = \frac{\pi\delta}{\mu p^2} (5 \cos^2 i - 1). \quad (8.5.21)$$

Будем называть *критическим* такой угол наклона плоскости орбиты к экватору  $i_{\text{крит}}$ , при котором  $d\omega/dN = 0$ . Имеем

$$i_{\text{крит1}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = 63^\circ 26', \quad i_{\text{крит2}} = \pi - i_{\text{крит1}} = 116^\circ 34'. \quad (8.5.22)$$

Если  $i < i_{\text{крит1}}$  или  $i > i_{\text{крит2}}$ , то  $d\omega/dN > 0$ , и перигей смещается по направлению движения ИСЗ. В случае  $i_{\text{крит1}} < i < i_{\text{крит2}}$  имеем  $d\omega/dN < 0$ , и перигей смещается в направлении, противоположном направлению движения ИСЗ.

Наибольшая скорость смещения перигея имеет место в случае экваториальной орбиты ИСЗ ( $i = 0$ ):

$$\left( \frac{d\omega}{dN} \right)_{\text{max}} = \frac{4\pi\delta}{\mu p^2}.$$

Заметим, что для экваториального ИСЗ понятие восходящего узла теряет смысл, поэтому эволюцию восходящего узла не следует рассматривать.

Вековые возмущения долготы восходящего узла и положения перигея носят долгопериодический характер, так как по истечении достаточно большого промежутка времени, когда суммарное пере-



мещение достигает угла  $2\pi$ , долгота восходящего узла и перигей возвращаются к своим исходным положениям.

Из-за прецессии плоскости движения ИСЗ под действием гравитационных возмущений эллиптическая орбита перестает быть замкнутой, т. е. ИСЗ не возвращается в прежнее положение через один оборот. Поэтому понятие периода обращения требует дополнительного уточнения. Будем называть *периодом обращения* промежуток времени между двумя последовательными прохождениями ИСЗ через некоторую заданную поверхность. В зависимости от выбора поверхности меняется величина периода и его определение. Так, *драконическим периодом обращения* называют промежуток времени между двумя последовательными прохождениями плоскости экватора в восходящем узле.

*Сидерическим периодом обращения* называют промежуток времени движения от некоторой точки  $M_0$  до точки  $M_1$ . Последняя является точкой пересечения орбиты с плоскостью, содержащей радиус  $OM_0$  и перпендикулярной к плоскости оскулирующей орбиты (рис. 8.14). Величина сидерического периода в общем случае зависит от выбора начальной точки  $M_0$ .

Существует период обращения, соответствующий некоторой геоцентрической широте. Это — промежуток времени между двумя последовательными пересечениями орбиты с конической поверхностью, вершина которой совпадает с центром Земли, а направляющая — с параллелью, соответствующей заданной широте. Величина такого периода обращения в общем случае зависит от рассматриваемой геоцентрической широты. В частности, если широта равна нулю, имеем драконический период.

*Аномалистическим периодом обращения* называют промежуток времени между двумя последовательными прохождениями через перигей орбиты.

Наконец, *оскулирующим периодом* обращения, или *невозмущенным* периодом обращения, называют период обращения по оскулирующей орбите, т. е. по невозмущенной орбите, по которой начал бы двигаться ИСЗ, если бы в рассматриваемый момент времени все возмущения исчезли.

**8.5.3. Возмущения квазикруговой орбиты ИСЗ.** Оценим изменения долготы восходящего узла и аргумента перицентра в случае сравнительно низкой квазикруговой орбиты ИСЗ, когда можно принять  $e \approx 0$  и  $R_s \approx r$ . Тогда согласно (8.5.9), (8.5.18), имеем

$$\frac{d\Omega}{dN} \approx -2\pi \left( \alpha - \frac{q}{2} \right) \cos i$$

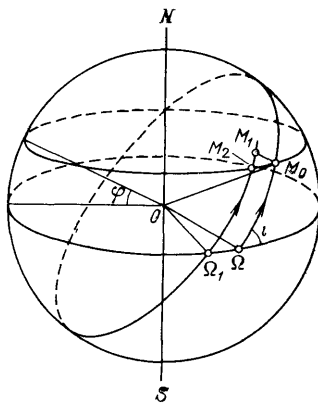


Рис. 8.14. К определению периода обращения для возмущенной орбиты

и

$$\frac{d\omega}{dN} \approx \pi \left( \alpha - \frac{q}{2} \right) (5 \cos^2 i - 1).$$

Заметим, что в случае точной круговой орбиты вековое возмущение аргумента перицентра теряет смысл.

Для Земли

$$\alpha - \frac{q}{2} \approx \frac{1}{612};$$

следовательно,

$$\frac{d\Omega}{dN} \approx -0,59 \cos i \text{ град/об}, \quad \frac{d\omega}{dN} \approx 0,29 (5 \cos^2 i - 1) \text{ град/об}.$$

Рассмотрим эволюцию квазикруговой орбиты ИСЗ с наклоном  $i = 65^\circ$ :

$$\frac{d\Omega}{dN} = -0,25 \text{ град/об}, \quad \frac{d\omega}{dN} = -0,03 \text{ град/об}.$$

Предположим, что средняя высота орбиты  $\sim 300$  км, тогда оскулирующий период  $\sim 1,5$  час и за сутки ИСЗ совершает 16 оборотов. Каждые сутки долгота восходящего узла смещается к западу на угол  $\Delta\Omega = -4^\circ$ , а перигей смещается к югу на угол  $\Delta\omega = -0,48^\circ$ . Эти перемещения происходят относительно абсолютной (звездной) системы координат.

Если наклонение орбиты ИСЗ  $i = 51,5^\circ$ , то

$$\frac{d\Omega}{dN} = -0,37 \text{ град/об}, \quad \frac{d\omega}{dN} = 0,27 \text{ град/об}.$$

За сутки долгота восходящего узла смещается к западу на угол  $\Delta\Omega = -5,92^\circ$ , а перигей перемещается к северу на угол  $\Delta\omega = 4,32^\circ$ .

### § 8.6. Возмущающее действие небесных тел

Движение спутника вокруг центрального притягивающего тела может возмущаться из-за наличия других небесных тел. Будем полагать, что непритягивающий спутник массой  $m_3$  вращается вокруг центрального притягивающего тела массой  $m_1$ , а второе притягивающее тело массой  $m_2$ , внешнее по отношению к орбите спутника, возмущает его движение вокруг центрального тела. Как и прежде, будем обозначать небесные тела по их массам.

Будем также полагать, что расстояние апоцентра орбиты спутника мало по сравнению с расстоянием между центральным телом и возмущающим. Пусть изменения элементов орбиты спутника за один его оборот малы. В этом случае оскулирующая орбита спутни-

ка в течение одного оборота почти не отличается от эллиптической орбиты с фиксированными элементами. Эти фиксированные для данного оборота элементы будем определять в момент пролета перигея и называть *элементами орбиты спутника*. При сделанных предположениях можно в рамках задачи возмущенного движения спутника относительно центрального притягивающего тела получить простые формулы для приближенного анализа эволюции достаточно широкого класса орбит спутника и установления основных закономерностей.

**8.6.1. Составляющие возмущающего ускорения от внешнего небесного тела.** Введем векторы, определяющие взаимное положение

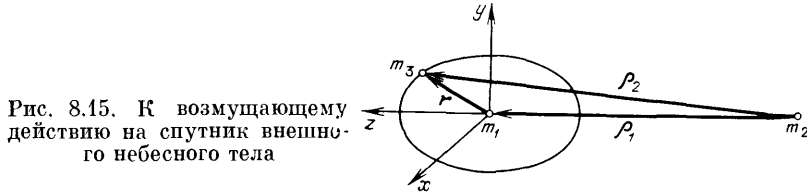


Рис. 8.15. К возмущающему действию на спутник внешнего небесного тела

центрального притягивающего тела  $m_1$ , возмущающего тела  $m_2$  и спутника  $m_3$  (рис. 8.15):

$$\vec{\rho}_1 = m_2 m_1, \quad \vec{\rho}_2 = m_2 m_3, \quad \vec{r} = m_1 m_3.$$

Если  $\mu_2$  — произведение постоянной притяжения на массу возмущающего тела, то

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\mu_2}{\rho_1^3} \frac{\rho_1}{\rho_1}$$

— ускорение центрального тела под действием возмущающего тела и

$$\mathbf{a}_2 = -\frac{\mu_2}{\rho_2^3} \frac{\rho_2}{\rho_2}$$

— ускорение спутника под действием возмущающего тела. Отсюда возмущающее ускорение спутника в его движении относительно центрального тела

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = -\mu_2 \left( \frac{\rho_2}{\rho_2^3} - \frac{\rho_1}{\rho_1^3} \right). \quad (8.6.1)$$

Построим правую прямоугольную систему координат  $m_1xyz$ , причем ось  $m_1z$  направим по продолжению вектора  $\rho_1$ , соединяющего

$m_2$  и  $m_1$ . В этой системе координат

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \rho_1 = (0, 0, \rho_1), \quad \rho_2 = (x, y, \rho_1 + z)$$

и составляющие возмущающего ускорения

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{\mu_2}{\rho_2^3} x, \\ a_y &= -\frac{\mu_2}{\rho_2^3} y, \\ a_z &= -\frac{\mu_2}{\rho_2^3} (\rho_1 + z) + \frac{\mu_2}{\rho_1^3} = -\frac{\mu_2}{\rho_2^3} z + \mu_2 \rho_1 \left( \frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3} \right). \end{aligned}$$

Предположим, что  $r/\rho_1 \ll 1$ . Тогда, пренебрегая квадратом этого отношения, можно записать

$$\begin{aligned} \rho_2^2 &= x^2 + y^2 + (\rho_1 + z)^2 = r^2 + \rho_1^2 + 2\rho_1 z = \\ &= \left( \frac{r^2}{\rho_1^2} + 1 + \frac{2z}{\rho_1} \right) \rho_1^2 \approx \left( 1 + \frac{2z}{\rho_1} \right) \rho_1^2. \end{aligned}$$

Отсюда с принятой точностью

$$\left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^3 = \left( 1 + \frac{2z}{\rho_1} \right)^{-3/2} = 1 - \frac{3z}{\rho_1} + \frac{15}{2} \frac{z^2}{\rho_1^2} - \dots \approx \left( 1 - \frac{3z}{\rho_1} \right).$$

Преобразуем теперь составляющие возмущающего ускорения:

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{\mu_2}{\rho_1^3} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^3 x \approx -\frac{\mu_2}{\rho_1^3} \left( 1 - \frac{3z}{\rho_1} \right) x \approx -\frac{\mu_2}{\rho_1^3} x, \\ a_y &\approx -\frac{\mu_2}{\rho_1^3} y, \\ a_z &\approx -\frac{\mu_2}{\rho_1^3} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^3 z + \frac{\mu_2}{\rho_1^3} \left[ 1 - \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^3 \right] \approx \\ &\approx -\frac{\mu_2}{\rho_1^3} z + \frac{\mu_2}{\rho_1^3} \left( 1 - 1 + \frac{3z}{\rho_1} \dots \right) \approx \frac{2\mu_2}{\rho_1^3} z. \end{aligned} \tag{8.6.2}$$

Под действием возмущающего ускорения  $a_z$  спутник стремится удалиться от центрального притягивающего тела, а под действием возмущающих ускорений  $a_x, a_y$  — приблизиться к нему.

Дифференциальные уравнения силовых линий поля определяются из условий

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z},$$

или, принимая во внимание (8.6.2),

$$-\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}. \quad (8.6.3)$$

С учетом симметрии можно ограничиться рассмотрением только плоскости  $m_1xz$  (или  $m_1yz$ ). Интегрируя (8.6.3), получим

$$x^2z = \text{const.}$$

Силовые линии в плоскости  $m_1xz$  показаны на рис. 8.16.

По составляющим возмущающего ускорения найдем его потенциал

$$U = \frac{\mu_2}{\rho_1^3} \left( z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right),$$

или

$$U = \frac{\mu_2}{\rho_1^3} \left( \frac{3}{2} z^2 - \frac{r^2}{2} \right).$$

Если принять плоскость  $m_1xy$  в качестве опорной, то можно записать

$$U = \frac{\mu_2 r^2}{2\rho_1^3} (3 \sin^2 \varphi - 1), \quad (8.6.4)$$

где

$$\sin \varphi = \frac{z}{r},$$

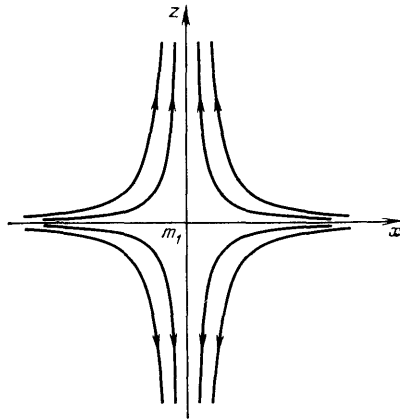


Рис. 8.16. Силовые линии в плоскости  $m_1xz$

$\varphi$  — «широта» спутника  $m_3$  относительно плоскости  $m_1xy$ . Соотношение (8.6.4) аналогично формуле для дополнительной составляющей потенциала поля притяжения тела, имеющего полярное сжатие, если полюса совпадают с осью  $m_1z$ .

Найдем радиальную и меридиональную составляющие возмущающего ускорения

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\mu_2 r}{\rho_1^3} (3 \sin^2 \varphi - 1), \\ a_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{3\mu_2 r}{\rho_1^3} \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8.6.5)$$

Далее, используя полученные ранее соотношения,

$$\sin \varphi = \sin i \sin u,$$

$$\cos \varphi \cos A = \sin i \cos u,$$

$$\cos \varphi \sin A = \cos i,$$

вычислим радиальную, трансверсальную и бинормальную составляющие возмущающего ускорения

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\mu_2 r}{\rho_1^3} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1), \\ a_n &= a_\varphi \cos A = \frac{3\mu_2 r}{2\rho_1^3} \sin^2 i \sin 2u, \\ a_w &= a_\varphi \sin A = \frac{3\mu_2 r}{2\rho_1^3} \sin 2i \sin u. \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

Здесь  $i$  — «наклонение» орбиты относительно «экваториальной» плоскости  $m_1xy$ ,  $u$  — «аргумент широты», отсчитываемый от восходящего узла орбиты, лежащего в плоскости  $m_1xy$ ,  $A$  — текущий «азимут», т. е. угол между плоскостью орбиты и плоскостью, проходящей через ось  $m_1z$  и текущее положение спутника.

В рассматриваемом случае величина возмущающего ускорения

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_n^2 + a_w^2} = \frac{\mu_2 r}{\rho_1^3} \sqrt{3 \sin^2 \varphi + 1} \quad (8.6.7)$$

зависит от положения спутника относительно плоскости  $m_1xy$ . Если спутник пересекает «полярную» ось  $m_1z$ , то  $\sin^2 \varphi = 1$  и возмущающее ускорение достигает максимальной возможной величины

$$\max |\mathbf{a}| = \frac{2\mu_2 r}{\rho_1^3}.$$

Минимальная величина возмущающего ускорения имеет место в момент пересечения «экваториальной» плоскости  $m_1xy$ , когда  $\varphi = 0$ :

$$\min |\mathbf{a}| = \frac{\mu_2 r}{\rho_1^3}.$$

При всех других положениях спутника имеем

$$\min |\mathbf{a}| \leq |\mathbf{a}| \leq \max |\mathbf{a}|,$$

или

$$\frac{\mu_2 r}{\rho_1^3} \leq |\mathbf{a}| \leq \frac{2\mu_2 r}{\rho_1^3}.$$

Определим соотношение между величинами минимального возмущающего ускорения и ускорения от притяжения центрального тела:

$$\frac{\min |\mathbf{a}|}{g} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{r^3}{\rho_1^3}.$$

В качестве примера сравним возмущения околоземного спутника

под действием Луны и Солнца:

$$\frac{a_{\text{Л}}}{a_{\text{С}}} = \frac{\mu_{\text{Л}}}{\mu_{\text{С}}} \left( \frac{\rho_{\text{С}}}{\rho_{\text{Л}}} \right)^3 \approx 2,2.$$

Следовательно, влияние Луны на движение околоземного спутника оказывается в два с лишним раза сильнее, чем влияние Солнца.

**8.6.2. Эволюция орбиты под действием внешнего возмущающего тела.** В работе [39] была исследована задача эволюции орбиты под действием внешнего возмущающего тела. Даже в рамках первого приближения для приращений элементов оскулирующей орбиты удалось выявить основные качественные и количественные эффекты.

Воспользуемся полученными в [39] дважды осредненными (за период обращения спутника и за период обращения внешнего возмущающего тела) уравнениями для изменения элементов оскулирующей орбиты спутника:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dn} &= 0, \\ \frac{de}{dn} &= \frac{1}{2} e \sqrt{\varepsilon} \sin^2 i \sin 2\omega, \\ \frac{di}{dn} &= -\frac{1}{4} \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \sin 2i \sin 2\omega, \\ \frac{d\Omega}{dn} &= -\frac{\cos i}{\sqrt{\varepsilon}} \left[ (1-\varepsilon) \sin^2 \omega + \frac{1}{5} \varepsilon \right], \\ \frac{d\omega}{dn} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[ (\cos^2 i - \varepsilon) \sin^2 \omega + \frac{2}{5} \varepsilon \right]. \end{aligned} \quad (8.6.8)$$

Здесь  $n = AN$ ,  $N$  — число оборотов спутника;

$$A = \frac{15}{2} \pi \frac{\mu_2}{\mu_1} \left( \frac{a}{p_2} \right)^3 \sqrt{\varepsilon_2^3};$$

$a$ ,  $e$  — большая полуось и эксцентриситет оскулирующей орбиты спутника;  $\varepsilon = 1 - e^2$ ;  $p_2$ ,  $e_2$  — параметр и эксцентриситет орбиты внешнего возмущающего тела;  $\varepsilon_2 = 1 - e_2^2$ ;  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  — произведение постоянной притяжения на массу соответственно центрального и возмущающего тел. Наклонение орбиты спутника  $i$ , угловое расстояние  $\omega$  его перицентра от восходящего узла и долгота восходящего узла  $\Omega$  отсчитываются в системе координат, связанной с центральным телом, оси которой не вращаются в абсолютном пространстве, а координатная плоскость, выбранная в качестве опорной, совпадает с плоскостью движения внешнего возмущающего тела. В уравнениях (8.6.8) предполагается, что  $e \leq 1$ .

Вместо долготы восходящего узла  $\Omega$  и углового расстояния от узла  $\omega$  при анализе часто оказывается удобнее перейти к долготе  $\lambda$  и широте  $\varphi$  вектора Лапласа, направленного от центрального тела в перицентр орбиты спутника. Широтой  $\varphi$  будем называть угол

между вектором Лапласа и опорной плоскостью, совпадающей с плоскостью орбиты внешнего возмущающего тела. Долгота  $\lambda$  определяет угловое расстояние между первой координатной осью, лежащей в плоскости орбиты внешнего возмущающего тела, и проекцией вектора Лапласа на эту плоскость. Связь  $\lambda$ ,  $\varphi$  и  $\omega$ ,  $i$ ,  $\Omega$  легко установить с помощью формул сферической тригонометрии:

$$\sin \varphi = \sin i \sin \omega, \quad \cos(\lambda - \Omega) = \frac{\cos \omega}{\cos \varphi}.$$

Используя эти формулы совместно с (8.6.8), можно заменить производные  $d\Omega/dn$ ,  $d\omega/dn$  на

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dn} &= \sqrt{\varepsilon} \frac{\sin i \cos \omega}{\cos \varphi} \left( \frac{2}{5} - \sin^2 \varphi \right), \\ \frac{d\lambda}{dn} &= \frac{1}{5} \sqrt{\varepsilon} \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi} (1 - 4 \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (8.6.9)$$

Кроме того, вместо уравнения для эксцентриситета  $de/dn$  можно рассматривать уравнение для  $\varepsilon = 1 - e^2$ :

$$\frac{d\varepsilon}{dn} = - (1 - \varepsilon) \sqrt{\varepsilon} \sin^2 i \sin 2\omega. \quad (8.6.10)$$

Согласно первому уравнению системы (8.6.8) имеем  $a = \text{const}$ . Тогда с помощью уравнения связи  $r_n = a(1 - e)$  получим

$$\frac{dr_n}{dn} = - a \frac{de}{dn}, \quad (8.6.11)$$

где  $de/dn$  определяется вторым уравнением системы (8.6.8). Отсюда следует вывод об увеличении  $r_n$ , когда  $\omega$  принадлежит второй или четвертой четвертям, и об уменьшении  $r_n$ , когда  $\omega$  принадлежит первой или третьей четвертям.

Исследуем систему (8.6.8). Кроме интеграла  $a = \text{const}$ , эта система имеет еще два интеграла [39]

$$\varepsilon \cos^2 i = C_1, \quad (8.6.12)$$

$$(1 - \varepsilon) \left( \frac{2}{5} - \sin^2 i \sin^2 \omega \right) = C_2, \quad (8.6.13)$$

в чем нетрудно убедиться, дифференцируя (8.6.12), (8.6.13) с учетом производных (8.6.8). Постоянные интегрирования определяются начальными значениями  $\varepsilon_0$ ,  $i_0$ ,  $\omega_0$ :

$$C_1 = \varepsilon_0 \cos^2 i_0, \quad (8.6.12a)$$

$$C_2 = (1 - \varepsilon_0) \left( \frac{2}{5} - \sin^2 i_0 \sin^2 \omega_0 \right). \quad (8.6.13a)$$

Заметим, что интеграл (8.6.12) имеет простой физический смысл. Действительно,

$$\varepsilon = 1 - e^2 = \frac{p}{a} = \frac{C^2}{\mu_1 a},$$



где  $C$  — постоянная интеграла площадей. Отсюда условие (8.6.12) эквивалентно равенству  $C \cos i = \text{const}$ , т. е. проекция вектора орбитального кинетического момента спутника на нормаль к плоскости движения внешнего возмущающего тела, осредненная за один оборот этого тела, не меняется при эволюции орбиты спутника.

Согласно (8.6.12) постоянная  $C_1$  всегда положительна и удовлетворяет ограничениям

$$0 \leq C_1 \leq 1.$$

Из соотношения (8.6.13) имеем, что знак постоянной  $C_2$  зависит от множителя, стоящего во второй скобке, причем

$$-\frac{3}{5} \leq C_2 \leq \frac{2}{5}.$$

Если рассмотреть плоскость параметров  $C_2, C_1$ , то область их возможных согласованных значений будет иметь вид, показанный на рис. 8.17. Следуя работе [39], обсудим граничные значения постоянных, соответствующих предельным случаям.

*Случай 1.* Если начальное наклонение  $i_0 = 0$  или  $i_0 = \pi$ , то с учетом (8.6.12а), (8.6.13а) получим

$$C_2 = \frac{2}{5}(1 - C_1).$$

Этому соотношению на рис. 8.17 отвечает отрезок прямой  $AB$ . Принимая во внимание (8.6.8) и (8.6.9), в рассматриваемом случае имеем

$$i = i_0, \quad e = e_0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{d\lambda}{dn} = \pm \frac{1}{5} \sqrt{\varepsilon_0},$$

где знак «+» берется при  $i_0 = 0$ , а знак «-» берется при  $i_0 = \pi$ . Таким образом, если плоскость орбиты спутника в начальный момент времени совпадает с плоскостью движения внешнего возмущающего тела, то все элементы орбиты спутника, кроме долготы линии апсид  $\lambda$ , остаются в среднем неизменными. При этом линия апсид поворачивается в плоскости движения внешнего возмущающего тела в среднем с постоянной скоростью.

*Случай 2.* Если начальные условия удовлетворяют соотношениям

$$\sin^2 \omega_0 = 1, \quad \cos^2 i_0 = \frac{3}{5} \varepsilon_0,$$

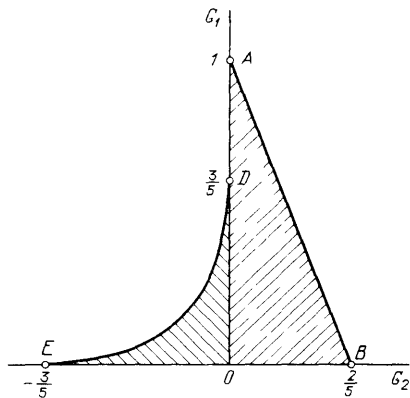


Рис. 8.17. Области возможных значений постоянных  $C_1$  и  $C_2$

то с учетом (8.6.12а), (8.6.13а) получим

$$C_2 = -\frac{3}{5} \left(1 - \sqrt{\frac{5}{3} C_1}\right)^2$$

— кривую  $ED$  на рис. 8.17. При таких начальных условиях  $\cos \omega_0 = 0$  и

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{5}{3} C_1}, \quad i = i_0, \quad \omega = \omega_0 = \pm \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi = \varphi_0 \left(\text{где } \sin^2 \varphi_0 = 1 - \frac{3}{5} \varepsilon_0\right),$$

$$\frac{d\lambda}{dn} = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \left(\frac{4}{5} \varepsilon_0 - 1\right).$$

Здесь знак «+» при  $\cos i_0 > 0$  и знак «-» при  $\cos i_0 < 0$ . В этом случае вся эволюция в среднем сводится к повороту орбиты спутника вокруг нормали к плоскости движения возмущающего тела.

*Случай 3.* Пусть начальные условия удовлетворяют соотношениям

$$\sin^2 \varphi_0 = \sin^2 i_0 \sin^2 \omega_0 = \frac{2}{5},$$

тогда  $C_2 = 0$  и имеем линию  $OA$  на рис. 8.17. Принимая во внимание первое уравнение (8.6.9), получим  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ . Далее, с учетом (8.6.12), (8.6.13), (8.6.12а) определим два интеграла:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\cos^2 i_0}{\cos^2 i}, \quad \sin^2 i \sin^2 \omega = \frac{2}{5}.$$

Второй интеграл используем для приведения производной  $d\omega/dn$  к виду

$$\frac{d\omega}{dn} = \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\sin^2 \omega - \frac{2}{5}\right).$$

Из второго интеграла следует, что  $\sin^2 \omega \geq 2/5$ , причем знак равенства возможен только в случае  $\sin^2 i = 1$ ,  $i = \pm \pi/2$ . Отсюда

$$\frac{d\omega}{dn} \geq 0.$$

Производная  $d\omega/dn$  обращается в нуль только в точках

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{5}, & \omega_2 &= -\omega_1, \\ \omega_3 &= \pi - \omega_1, & \omega_4 &= \pi + \omega_1. \end{aligned} \quad (8.6.14)$$

Эти точки выделяют два интервала, на которых может существовать решение:

$$\omega_1 < \omega < \omega_3, \quad \omega_4 < \omega < 2\pi + \omega_2.$$

С учетом положительности производной  $d\omega/dn > 0$  на первом интервале имеем  $\omega \rightarrow \omega_3$ , а на втором интервале  $\omega \rightarrow \omega_2$ .

С помощью двух найденных интегралов можно качественно оценить эволюцию орбиты с ростом  $\omega$ . Пока на первом интервале  $\omega < \pi/2$  (или  $\omega < 3\pi/2$  на втором интервале), с ростом  $\omega$  параметр  $\varepsilon$  уменьшается, а эксцентриситет орбиты увеличивается, так как  $e = \sqrt{1 - \varepsilon}$ . Когда  $\omega = \pi/2$  (или  $3\pi/2$ ), эксцентриситет достигает своей максимальной величины

$$e_{\max} = \sqrt{1 - \frac{5}{3} \varepsilon_0 \cos^2 i_0}.$$

В указанной точке  $i = \arcsin \sqrt{2/5}$  (или  $i = \pi - \arcsin \sqrt{2/5}$ ). При дальнейшем увеличении  $\omega$  эксцентриситет орбиты уменьшается, в связи с чем эллиптическая орбита стремится к круговой, а наклонение орбиты  $i \rightarrow \pi/2$ .

*Случай 4.* Большой практический интерес представляет случай, когда плоскость начальной орбиты спутника ортогональна плоскости движения внешнего возмущающего тела, т. е.

$$\cos i_0 = 0, \quad i_0 = \frac{\pi}{2}.$$

В этом случае  $C_1 = 0$  (линия  $BE$  на рис. (8.17)) и система (8.6.8) имеет интегралы

$$i = i_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \Omega = \Omega_0 = \text{const},$$

а оставшиеся уравнения принимают вид:

$$\frac{de}{dn} = \frac{1}{2} e \sqrt{\varepsilon} \sin 2\omega, \quad (8.6.15)$$

$$\frac{d\omega}{dn} = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} \left( \cos 2\omega - \frac{1}{5} \right). \quad (8.6.16)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{de}{d\omega} = \frac{e \sin 2\omega}{\cos 2\omega - \frac{1}{5}}. \quad (8.6.17)$$

Производная (8.6.17) определена всюду, кроме особых значений  $\omega$ , задаваемых соотношениями (8.6.14). Рассмотрим два возможных случая в зависимости от знака знаменателя (8.6.17).

а) Пусть  $\cos 2\omega > 1/5$ , тогда угол  $\omega$  должен удовлетворять ограничениям

$$\omega_2 < \omega < \omega_1, \quad \omega_3 < \omega < \omega_4. \quad (8.6.18)$$

Интегрируя уравнение (8.6.17) с начальными условиями  $\omega(0) = \omega_0$ ,  $e(0) = e_0$ , получим

$$e(\omega) = e_0 \frac{\sqrt{5 \cos 2\omega_0 - 1}}{\sqrt{5 \cos 2\omega - 1}}. \quad (8.6.19)$$

Легко видеть, что интеграл (8.6.19) эквивалентен (8.6.13) и (8.6.13а) при  $i = \pi/2$ .

Введем постоянную, зависящую от начальных условий,

$$A_1 = e_0 \sqrt{5 \cos 2\omega_0 - 1}, \quad (8.6.20)$$

тогда

$$e = \frac{A_1}{\sqrt{5 \cos 2\omega - 1}}. \quad (8.6.21)$$

Для рассматриваемой эллиптической орбиты на интервалах (8.6.18) имеем  $A_1 > 0$ . Полученная зависимость  $e(\omega)$  для указанных интервалов построена на рис. 8.18. Поскольку на этих интервалах производная  $d\omega/dn > 0$  согласно (8.6.16), то с увеличением числа оборотов спутника угол  $\omega$  возрастает. Направление движения

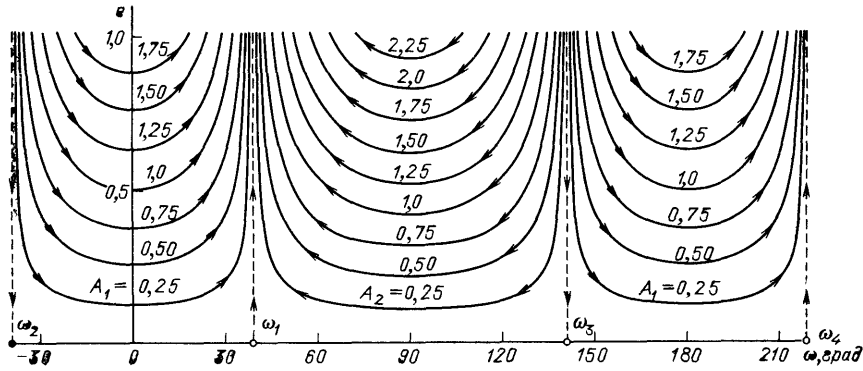


Рис. 8.18. Фазовые траектории  $e(\omega)$

вдоль фазовой траектории на рис. 8.18 отмечено стрелками. В процессе эволюции орбиты спутника наступает момент, когда эксцентриситет возрастает, доходя до значения  $e = 1$ .

б) Пусть теперь  $\cos 2\omega < 1/5$ ; тогда угол  $\omega$  должен удовлетворять условиям

$$\omega_1 < \omega < \omega_3 \text{ или } \omega_4 < \omega < \omega_2. \quad (8.6.22)$$

В этом случае можно записать

$$\frac{de}{d\omega} = - \frac{e \sin 2\omega}{\frac{1}{5} - \cos 2\omega}, \quad (8.6.23)$$

где знаменатель положителен. Интегрируя уравнение (8.6.23) с начальными условиями  $\omega(0) = \omega_0$ ,  $e(0) = e_0$ , получим

$$e = e_0 \frac{\sqrt{1 - 5 \cos 2\omega_0}}{\sqrt{1 - 5 \cos 2\omega}}. \quad (8.6.24)$$

Обозначим постоянную, зависящую от начальных условий,

$$A_2 = e_0 \sqrt{1 - 5 \cos 2\omega_0}; \quad (8.6.25)$$

тогда на рассматриваемых интервалах изменения аргумента

$$e = \frac{A_2}{\sqrt{1 - 5 \cos 2\omega}}. \quad (8.6.26)$$

Зависимость  $e(\omega)$ , где  $\omega_1 < \omega < \omega_3$ , построена на рис. 8.18. Аналогичный вид имеет зависимость  $e(\omega)$  при  $\omega_4 < \omega < \omega_2$ .

В этом случае  $d\omega/dn < 0$ , и с увеличением числа оборотов спутника угол  $\omega$  убывает. Направление движения вдоль фазовой траектории показано на рис. 8.18 стрелками. В процессе эволюции орбиты наступает момент, когда эксцентриситет возрастает, доходя до значения  $e = 1$ .

в) При особых значениях угла  $\omega = \omega_i$ , для которых справедливо условие  $\cos 2\omega_i = 1/5$ , имеем

$$\frac{d\omega}{dn} = 0, \quad \frac{de}{dn} = \pm \frac{\sqrt{6}}{5} e \sqrt{1 - e^2}. \quad (8.6.27)$$

Знак «+» соответствует особым значениям  $\omega_1, \omega_4$ , а знак «-» отвечает особым значениям  $\omega_2, \omega_3$ . Таким образом, при  $\omega = \omega_1, \omega_4$  эксцентриситет орбиты возрастает с увеличением числа оборотов спутника ( $e \leq 1$ ). При  $\omega = \omega_2, \omega_3$  эксцентриситет убывает ( $e \geq 0$ ).

Принтегрируем второе уравнение (8.6.27) с начальными условиями  $n = 0, e(0) = e_0$ ; тогда получим

$$\ln \left( \frac{e}{e_0} \frac{1 + \sqrt{1 - e_0^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right) = \pm \frac{\sqrt{6}}{5} n. \quad (8.6.28)$$

В этом соотношении сохраняется приведенное выше правило выбора знака с учетом рассматриваемого значения  $\omega_i$ . Фазовые траектории, начальные углы которых совпадают с особыми значениями  $\omega_i$ , показаны на рис. 8.18 вертикальными отрезками прямой, а направления перемещений с ростом числа оборотов спутника отмечены стрелками.

Итак, в рассматриваемом случае, когда орбита спутника наклонена под углом  $\pi/2$  к плоскости орбиты внешнего возмущающего тела, при любых начальных условиях (исключая  $\omega_0 = \omega_2$  и  $\omega_0 = \omega_3$ ) в результате эволюции орбиты ее эксцентриситет достигает значения  $e = 1$ . При этом  $a = \text{const}$ , следовательно, в итоге орбита оказывается не параболической, а прямолинейной, у которой фокусное расстояние равно большой полуоси. На заключительном этапе эволюции радиус перицентра уменьшается до нуля. Значит, орбита спутника пересечет поверхность центрального тела или условную границу его атмосферы, если центральное тело имеет атмосферу. В результате эволюции орбиты спутник падает на центральное тело. Этот вывод справедлив не только при  $i = \pi/2$ , но и для других орбит спутника с достаточно большими наклонениями.

На рис. 8.19 [39] показана качественная картина эволюции орбиты спутника с углом наклона  $i = \pi/2$  к плоскости орбиты внешнего возмущающего тела. Пунктирные линии отмечают особые значения аргумента перигея  $\omega_1$ , стрелки между ними показывают

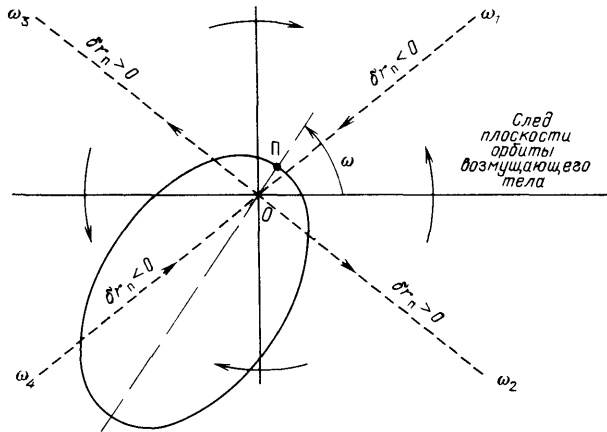


Рис. 8.19. Схема эволюции орбиты с углом наклона  $\pi/2$  к плоскости возмущающего тела

направление изменения угла  $\omega$  в зависимости от начального положения перигея.

Пусть  $R$  — радиус центрального тела или радиус условной границы его атмосферы. Тогда

$$r_{\text{п крит}} = R \quad (8.6.29)$$

— условие падения спутника на центральное тело, где  $r_{\text{п крит}}$  — критический радиус перигея орбиты спутника. Обозначим через  $e_{\text{крит}}$  критическую величину эксцентриситета орбиты спутника в момент выполнения условия (8.6.29). Тогда можно записать

$$a(1 - e_{\text{крит}}) = R, \quad (8.6.29a)$$

откуда

$$e_{\text{крит}} = 1 - \frac{R}{a}. \quad (8.6.30)$$

Критической величине эксцентриситета орбиты спутника соответствует значение аргумента перигея  $\omega_{\text{крит}}$ , которое согласно (8.6.19) и (8.6.24) определяется из уравнения

$$5 \cos 2\omega_{\text{крит}} - 1 = \left( \frac{e_0}{e_{\text{крит}}} \right)^2 (5 \cos 2\omega_0 - 1). \quad (8.6.31)$$

Число оборотов спутника  $N_{\text{сущ}}$  (или время  $t_{\text{сущ}}$ ) в процессе изменения аргумента перигея от  $\omega_0$  до  $\omega_{\text{крит}}$  определяет длительность существования спутника. Найдём  $N_{\text{сущ}}$ .

Предположим сначала, что постоянная интегрирования

$$\tilde{C} = e_0^2 (5 \cos 2\omega_0 - 1) \quad (8.6.32)$$

положительна. Тогда уравнение (8.6.16) с учетом (8.6.19) можно привести к виду

$$\frac{d\omega}{dn} = \frac{1}{10} (5 \cos 2\omega - 1) \sqrt{1 - e_0^2 \frac{5 \cos 2\omega_0 - 1}{5 \cos 2\omega - 1}}. \quad (8.6.33)$$

Обозначим через  $n_0$  число приведенных оборотов спутника к моменту, когда  $\omega = 0$  (величина  $n_0 < 0$ , если  $\omega_0 < 0$ ). Интегрируя теперь (8.6.33), получим

$$n - n_0 = 10 \int_0^\omega \frac{d\omega}{(5 \cos 2\omega - 1) \sqrt{1 - e_0^2 \frac{5 \cos 2\omega_0 - 1}{5 \cos 2\omega - 1}}}. \quad (8.6.34)$$

Как и в работе [39], введем согласно табл. 8.9 новые обозначения для постоянных и переменных соотношения (8.6.34).

Таблица 8.9

Замена постоянных и переменных в соотношении (8.6.34)

Новые обозначения	Исходные обозначения	
	при $\tilde{C} > 0$	при $\tilde{C} < 0$
$b$	$\frac{1 + \tilde{C}}{5}$	$\frac{1 + \tilde{C}}{5}$
$a_n$	$2 \left[ \frac{4(1+b)}{5} \right]^{-1/2}$	$2 \left[ \frac{6(1-b)}{5} \right]^{-1/2}$
$\sin \varphi$	$\sqrt{\frac{1+b \cos 2\omega}{1-b \cos 2\omega}}$	$\sqrt{\frac{1-b \cos 2\omega}{1+b \cos 2\omega}}$
$k^2$	$\frac{3(1-b)}{2(1+b)}$	$\frac{2(1+b)}{3(1-b)}$

В результате правая часть (8.6.34) приведет к эллиптическому интегралу первого рода:

$$n - n_0 = \text{sign}(\sin 2\omega) a_n \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

или

$$n - n_0 = \text{sign}(\sin 2\omega) a_n F(\varphi, k). \quad (8.6.35)$$

Число оборотов за время существования спутника до падения на центральное тело вычисляется по формуле

$$N_{\text{сущ}} = \frac{a_n}{A} [\text{sign}(\sin 2\omega) F(\varphi_{\text{крит}}, k) - \text{sign}(\sin 2\omega_0) F(\varphi_0, k)], \quad (8.6.36)$$

где  $\varphi_{\text{крит}} = \varphi(\omega_{\text{крит}})$ ,  $\varphi_0 = \varphi(\omega_0)$ . Формула (8.6.36) справедлива и в случае  $C < 0$ . При этом необходимо воспользоваться соответствующими обозначениями табл. 8.9.

Если  $\omega_0 = \omega_1$  или  $\omega_0 = \omega_4$ , то зависимость эксцентриситета  $e$  от приведенного числа оборотов  $n$  определяется соотношением (8.6.28), причем в правой части следует выбрать знак «+». Подставив в (8.6.28)  $e = e_{\text{крит}}$ , определим число оборотов спутника до момента падения на центральное тело

$$N_{\text{сущ}} = \frac{5}{A\sqrt{6}} \ln \left( \frac{e_{\text{крит}}}{e_0} \frac{1 + \sqrt{1 - e_0^2}}{1 + \sqrt{1 - e_{\text{крит}}^2}} \right). \quad (8.6.37)$$

Итак, за исключением специальных начальных условий  $\omega_0 = \omega_2$  и  $\omega_0 = \omega_3$ , эволюция любой орбиты спутника, плоскость которой ортогональна плоскости движения внешнего возмущающего тела, всегда приводит к падению спутника на центральное тело за ограниченное число оборотов, т. е. за ограниченное время [33], поскольку

$$t_{\text{сущ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} N_{\text{сущ}}. \quad (8.6.38)$$

Качественные и количественные оценки, полученные из рассмотрения модельной задачи, достаточно полно описывают эволюцию реальных орбит искусственных спутников под действием возмущений от внешних небесных тел.

В работе [17] рассмотрена задача в общем случае, когда плоскость начальной орбиты спутника не обязательно ортогональна плоскости движения внешнего возмущающего тела. Получены соотношения через эллиптические интегралы первого рода для вычисления числа оборотов спутника до момента падения на центральное тело.

Как пример, обсудим траекторию полета советской автоматической межпланетной станции АМС, запущенной к Луне 4 октября 1959 года. После сближения с Луной и получения фотографий ее обратной стороны АМС оказалась на геоцентрической орбите с начальной высотой перигея  $\sim 47$  тыс. км, начальной высотой апогея  $\sim 480$  тыс. км и наклоном орбиты к плоскости экватора  $\sim 80^\circ$ . Начальный период обращения  $\sim 15$  суток [6]. Несмотря на большую начальную высоту перигея, эволюция орбиты под влиянием возмущающего притяжения Луны и Солнца привела к падению АМС на поверхность Земли через 11 оборотов.



## КОРРЕКЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ

Фактическая траектория КА всегда отличается от номинальной из-за ошибок исполнения маневров, действия возмущающих факторов, неадекватности расчетной модели и т. д. Если отклонение фактической траектории от номинальной находится в пределах допуска, заданного в соответствии с требованиями решаемой задачи, то коррекции не требуется. Если же отклонение выходит за этот допуск, то необходима коррекция траектории движения. Для проведения коррекции КА должен иметь двигательную установку с необходимым запасом топлива и систему управления, обеспечивающую нужную ориентацию в пространстве.

**П.1. Постановка задачи коррекции.** До проведения коррекции следует решить навигационную задачу, т. е. уточнить текущие координаты и составляющие скорости. Для решения навигационной задачи используются результаты внешнетраекторных измерений, проводимых с помощью наземного измерительного комплекса, или результаты автономных измерений, проводимых на борту КА. Возможно также совместное использование результатов внешнетраекторных и автономных измерений.

Далее навигационные параметры движения сравниваются с требуемыми, и на основе принятой модели движения рассчитывается коррекция траектории. Расчет коррекции включает определение потребной ориентации вектора тяги, момента включения двигательной установки и длительность ее работы. Во многих случаях потребное изменение скорости не превышает нескольких десятков метров в секунду, а длительность работы двигательной установки при выполнении корректирующего маневра мала по сравнению с временем пассивного полета. Поэтому оказывается допустимой импульсная аппроксимация корректирующего маневра, что существенно упрощает его расчет.

Будем различать коррекцию околоземной эллиптической (или квазикруговой) орбиты и траектории полета к планетам Солнечной системы (или к Луне). В первом случае задача по существу сводится к переводу КА с одной орбиты на другую. Для выполнения такого маневра с минимальными затратами топлива можно опираться на результаты анализа оптимальных межорбитальных перелетов, компланарных и некомпланарных. В ряде случаев оказывается необходимым учитывать заданные временные ограничения.

Рассмотрим теперь задачу коррекции межпланетной траектории. В общем случае одноразовая импульсная коррекция позволяет ис-

править три параметра траектории с помощью трех составляющих приращения вектора скорости. Поэтому такую коррекцию называют *трехкомпонентной*. Для исправления всех шести параметров, определяющих межпланетную траекторию, необходимо по крайней мере двухразовое проведение трехкомпонентной коррекции.

Иногда величина корректирующего импульса скорости задана (в соответствии с располагаемым запасом топлива) и можно выбирать только его направление в пространстве. Такая коррекция является *двухкомпонентной*.

Если линия действия корректирующего импульса скорости фиксирована (например, коллинеарна направлению на некоторое небесное тело), а его величина и ориентация в одну или другую сторону вдоль этой линии могут выбираться, то имеет место однокомпонентная коррекция.

По числу исправляемых параметров траектории коррекция может быть *однопараметрической*, *двухпараметрической* и т. д.

**П.2. Двухпараметрическая коррекция.** Для межпланетной траектории наибольший интерес представляет двухпараметрическая коррекция. Действительно, построим картинную плоскость, проходящую через центр планеты назначения перпендикулярно вектору планетоцентрической скорости КА на номинальной траектории в точке пересечения картинной плоскости. С картинной плоскостью свяжем прямоугольную декартову систему координат  $P\xi\eta\zeta$ . Начало системы координат совпадает с центром масс планеты. Ось  $P\xi$  направлена вдоль линии пересечения картинной плоскости и плоскости гелиоцентрической траектории вправо, если смотреть с конца вектора планетоцентрической скорости. Ось  $P\eta$  направлена вверх, в полусферу, определенную направлением вектора кинетического момента траектории. Ось  $P\zeta$  направлена вдоль вектора планетоцентрической скорости  $V_{отн}$ . Остры построенной системы координат определяются соотношениями

$$\xi^0 = \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{V}_{отн}}{|\mathbf{K} \times \mathbf{V}_{отн}|}, \quad \eta^0 = \frac{\mathbf{V}_{отн}}{|\mathbf{V}_{отн}|} \times \xi^0, \quad \zeta^0 = \frac{\mathbf{V}_{отн}}{|\mathbf{V}_{отн}|},$$

где  $\mathbf{K}$  — кинетический момент в гелиоцентрическом движении КА.

Точка пересечения реализовавшейся траектории с картинной плоскостью определяет условия движения КА относительно планеты на этапе наибольшего сближения. Две координаты точки пересечения являются теми двумя корректируемыми параметрами, которые стремятся свести к номинальным значениям с заданной точностью. Оставшийся свободный параметр трехкомпонентной коррекции может быть использован, например, для минимизации величины корректирующего импульса скорости или для минимизации суммарной ошибки коррекции. Иногда свободный параметр используют для коррекции времени достижения картинной плоскости, чтобы обеспечить условия наблюдаемости с наземных измерительных комплексов.

Общие принципы оптимизации трехкомпонентной двухпараметрической коррекции были впервые исследованы в 1960 г. А. К. Платоновым и Р. К. Казаковой под руководством М. В. Келдыша. Полученные результаты позднее опубликованы в [31] и некоторых других работах\*). Следуя [31], обсудим задачу оптимизации в общем виде. Предположим, что условия коррекции в момент достижения картинной плоскости заданы двумя соотношениями:  $A = 0$ ,  $B = 0$ . Пусть на основе решения навигационной задачи и прогноза траектории с использованием принятой модели движения установлено, что ожидаемые терминальные условия в момент достижения картинной плоскости  $A^* \neq 0$  и  $B^* \neq 0$ . Требуется определить корректирующий импульс скорости  $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ , обеспечивающий нулевые терминальные условия и минимизирующий величину некоторой заданной функции  $J(\mathbf{V})$ . Здесь составляющие корректирующего импульса скорости  $V_x, V_y, V_z$  заданы в некоторой фиксированной системе координат.

Обозначим  $\mathbf{A} = \text{grad } A$ ,  $\mathbf{B} = \text{grad } B$ , где градиенты рассматриваются в пространстве  $V_x, V_y, V_z$ . Тогда в линейном приближении корректирующий импульс скорости должен удовлетворять соотношениям

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = -A^*, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} = -B^*.$$

Чтобы решить задачу Лагранжа о нахождении условного экстремума функции  $J(\mathbf{V})$ , рассмотрим вспомогательную функцию

$$H(\mathbf{V}) = J(\mathbf{V}) + \lambda(\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} + A^*) + \sigma(\mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + B^*),$$

где  $\lambda, \sigma$  — множители Лагранжа. Для нахождения неизвестных  $V_x, V_y, V_z, \lambda, \sigma$  имеем систему уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} + A^* = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + B^* = 0, \tag{П.1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial V_x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial V_y} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial V_z} = 0.$$

Сначала рассмотрим случай, когда ищется минимум величины  $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ . В этом случае систему уравнений (П.1) принимает вид

$$\begin{aligned} a_x V_x + a_y V_y + a_z V_z &= -A^*, & b_x V_x + b_y V_y + b_z V_z &= -B^*, \\ 2V_x + a_x \lambda + b_x \sigma &= 0, & 2V_y + a_y \lambda + b_y \sigma &= 0, \\ 2V_z + a_z \lambda + b_z \sigma &= 0. \end{aligned} \tag{П.2}$$

Здесь  $\text{grad } A = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\text{grad } B = (b_x, b_y, b_z)$  рассматриваются в выбранной системе координат. Решая систему (П.2), найдем со-

\*) Платонов А. К. Исследование свойств корректирующих маневров в межпланетных полетах // Космические исследования.— 1966.— Т. 4, вып. 5.  
Платонов А. К. Оптимальные свойства корректирующих маневров при использовании двигателя с ограниченной тягой // Космические исследования.— 1967.— Т. 5, вып. 2.

ставляющие минимального по величине корректирующего импульса скорости, обеспечивающего сведение к нулю ошибок  $A^*$  и  $B^*$  [31]:

$$\begin{aligned} V_x &= -\frac{a_x B^2 - b_x A \cdot B}{(A \times B)^2} A^* - \frac{b_x A^2 - a_x A \cdot B}{(A \times B)^2} B^*, \\ V_y &= -\frac{a_y B^2 - b_y A \cdot B}{(A \times B)^2} A^* - \frac{b_y A^2 - a_y A \cdot B}{(A \times B)^2} B^*, \\ V_z &= -\frac{a_z B^2 - b_z A \cdot B}{(A \times B)^2} A^* - \frac{b_z A^2 - a_z A \cdot B}{(A \times B)^2} B^*. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Решение (П.3) можно представить в векторной форме

$$\mathbf{V} = -\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2} A^* - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2} B^*,$$

или

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}A^* + \mathbf{N}B^*, \quad (\text{П.3 а})$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= -\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2} = -\frac{\mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})}{(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2}, \\ \mathbf{N} &= -\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2} = -\frac{\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A})}{(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2} \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

— фиксированные для данного момента времени коррекции векторы, через линейную комбинацию которых определяется оптимальный корректирующий импульс скорости. При любых величинах ошибок  $A^*$  и  $B^*$  оптимальный вектор  $\mathbf{V}$  будет находиться в плоскости векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$ , которая согласно (П.4) совпадает с плоскостью двух градиентов:  $\mathbf{A} = \text{grad } A$  и  $\mathbf{B} = \text{grad } B$ . Эту плоскость называют *плоскостью оптимальной коррекции*.

По построению плоскости оптимальной коррекции очевидно, что в рассматриваемой линейной постановке импульс скорости, коллинеарный нормали к указанной плоскости, не меняет терминальных параметров  $A$  и  $B$ . Поэтому направление  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  называют *нуль-направлением*.

В качестве первого случая конкретизации терминальных условий рассмотрим

$$A^* = \xi - \xi_\tau, \quad B^* = \eta - \eta_\tau, \quad \mathbf{A} = \text{grad } \xi, \quad \mathbf{B} = \text{grad } B, \quad (\text{П.5})$$

где  $\xi_\tau$ ,  $\eta_\tau$  — заданные терминальные значения координат в картинной плоскости. Построим систему координат  $Oxyz$ , начало которой находится в текущей точке траектории движения, а плоскость  $Oxy$  совпадает с плоскостью оптимальной коррекции. Ось  $Ox$  направлена по линии пересечения плоскости гелиоцентрической траектории с плоскостью оптимальной коррекции. Ось  $Oz$  направлена по нуль-

направлению в сторону движения КА. Ось  $Oy$  дополняет правую систему координат. Построенная таким образом подвижная система координат  $Oxyz$  в момент достижения картинной плоскости будет совпадать с  $P\xi\eta\zeta$ .

Рассмотрим семейство корректирующих импульсов скорости в плоскости оптимальной коррекции, имеющих одинаковую величину  $V_k$ , но различные направления. Будем задавать направление углом  $\psi$ , который отсчитывается от оси  $Ox$  в сторону оси  $Oy$ . Тогда составляющие корректирующего импульса скорости равны  $V_x = V_k \cos \psi$ ,  $V_y = V_k \sin \psi$ ,  $V_z = 0$ . Такому семейству корректирующих импульсов будет соответствовать семейство отклонений в картинной плоскости  $P\xi\eta\zeta$ :

$$\xi = V_k \cdot \mathbf{A} = V_k |\mathbf{A}| \cos \psi, \quad \eta = V_k \cdot \mathbf{B} = V_k |\mathbf{B}| \cos(\psi - \delta), \quad (\text{П.6})$$

где  $\delta$  — угол между градиентами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , который отсчитывается от  $\mathbf{A}$  в ту же сторону, что и угол  $\psi$ .

При фиксированной величине  $V_k$  соотношения (П.6) описывают эллипс с центром в начале координат  $P$ . Если  $V_k = 1$  м/с, то соотношения (П.6) будут описывать эллипс влияния, который характеризует влияние направления корректирующего импульса скорости на величину отклонения траектории в картинной плоскости.

Определим ориентацию эллипса влияния в картинной плоскости. С этой целью запишем

$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \varphi, \quad (\text{П.7})$$

где угол  $\varphi$  отсчитывается в картинной плоскости от оси  $P\xi$  в сторону оси  $P\eta$ . Используя соотношения (П.6) и соотношения (П.7), найдем

$$\begin{aligned} \rho_V &= \sqrt{|\mathbf{A}|^2 \cos^2 \psi + |\mathbf{B}|^2 \cos^2(\psi - \delta)}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|} (\cos \delta + \operatorname{tg} \psi \sin \delta), \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

где  $\rho_V = \rho/V_k$ . Затем из условия  $d\rho_V/d\psi = 0$  определим значения угла  $\psi_0$ , отвечающие большой и малой полуосям эллипса влияния:

$$\psi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{|\mathbf{B}|^2 \sin 2\delta}{|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 \cos 2\delta} \right) + \frac{\pi}{2} n, \quad n = 0, 1. \quad (\text{П.9})$$

Если теперь подставить значения  $\psi_0$  в (П.8), то можно вычислить величины большой полуоси эллипса влияния

$$\rho_{V\max} = \sqrt{\frac{1}{2} (|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 + \sqrt{|\mathbf{A}|^4 + 2|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 \cos 2\delta + |\mathbf{B}|^4})},$$

малой полуоси

$$\rho_{V\min} = \sqrt{\frac{1}{2} (|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - \sqrt{|\mathbf{A}|^4 + 2|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 \cos 2\delta + |\mathbf{B}|^4})},$$

а также углы ориентации его осей в картинной плоскости

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi^* &= \\ &= \frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|} \left[ \cos \delta + \sin \delta \sqrt{\frac{\sqrt{|\mathbf{A}|^4 + 2|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 \cos 2\delta + |\mathbf{B}|^4} \mp (|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 \cos 2\delta)}{\sqrt{|\mathbf{A}|^4 + 2|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 \cos 2\delta + |\mathbf{B}|^4} \pm (|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 \cos 2\delta)}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

В формуле (П.10) верхние знаки отвечают  $\rho_{v\max}$ , а нижние —  $\rho_{v\min}$ . Если градиенты  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  ортогональны ( $\delta = \pi/2$ ), то согласно (П.10)  $\varphi^* = 0$  и  $\varphi^* = \pi/2$ . Следовательно, оси эллипса влияния совпадают с осями координат  $P\xi$  и  $P\eta$ . В случае равенства градиентов по модулю ( $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ ) и  $\delta = \pi/2$  эллипс влияния трансформируется в окружность. Это имеет место в конце межпланетной траектории, когда КА находится вблизи картинной плоскости.

Если прогнозируемый промах в картинной плоскости определяется координатами  $\xi, \eta$  (или полярными координатами  $\rho, \varphi$ ), а требуется попасть в точку с координатами  $\xi_r, \eta_r$  (или  $\rho_r, \varphi_r$ ), то величина и направление корректирующего импульса скорости определяются следующим образом.

Представим корректирующий импульс скорости в виде суммы двух импульсов скорости  $\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k1} + \mathbf{V}_{k2}$ , где  $\mathbf{V}_{k1}$  обеспечивает сведение прогнозируемого промаха к нулю, а  $\mathbf{V}_{k2}$  — попадание из начала координат в заданную точку на картинной плоскости. Используя (П.8), найдем для первого импульса скорости

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_1 &= \frac{1}{\sin \delta} \left( \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{B}|} \operatorname{tg} \varphi - \cos \delta \right), \\ \rho_{v1} &= \sqrt{|\mathbf{A}|^2 \cos^2 \psi_1 + |\mathbf{B}|^2 \cos^2 (\psi_1 - \delta)} \end{aligned}$$

и аналогичные соотношения для второго импульса скорости. Далее из векторного треугольника скоростей можно вычислить величину корректирующего импульса скорости

$$V_k = \sqrt{V_{k1}^2 + V_{k2}^2 - 2V_{k1}V_{k2} \cos(\psi_2 - \psi_1)}$$

и его направление

$$\psi_k = \pi + \psi_1 - \arcsin \frac{V_{k2} \sin(\psi_2 - \psi_1)}{V_k}.$$

Предположим теперь, что семейство корректирующих импульсов скорости расположено в *плоскости коррекции*, не являющейся плоскостью оптимальной коррекции. Использование плоскости коррекции обычно вызвано соображениями упрощения системы ориентации для выполнения коррекции, конструктивными ограничениями на углы разворота КА относительно центра масс и т. д. Импульс скорости, расположенный в плоскости коррекции, можно разложить на две составляющие: вдоль нуль-направления и в плоскости оптимальной коррекции. Первая составляющая не влияет на

результаты коррекции  $A$  и  $B$ , а вторая влияет. Чем меньше угол между корректирующим импульсом скорости и нуль-направлением, тем неэффективнее расходуется топливо КА на коррекцию. Эллипс влияния для произвольной плоскости коррекции расположен внутри оптимального эллипса влияния и касается его в точках, соответствующих линии пересечения плоскостей коррекции и оптимальной коррекции.

Если вместо произвольно ориентированного корректирующего импульса скорости рассматривать его проекцию на плоскость оптимальной коррекции, то можно воспользоваться всеми полученными соотношениями для расчета маневра с целью устранения промаха.

**П.3. Коррекция времени прибытия.** Перейдем теперь к обсуждению задачи о коррекции момента времени  $T$  достижения картинной плоскости (времени прибытия). Это время отсчитывается от момента коррекции. Обозначим  $C = \text{grad } T$ . Если плоскость коррекции не ортогональна вектору  $C$ , то при любом направлении корректирующего импульса скорости в этой плоскости будет меняться время полета до картинной плоскости.

С учетом (П.3 а) — (П.5) можно записать [31]:

$$\Delta T = C \cdot V = \frac{B \times (A \times B)}{(A \times B)^2} \cdot C (\xi_T - \xi) + \frac{A \times (B \times A)}{(A \times B)^2} \cdot C (\eta_T - \eta),$$

или

$$\Delta T = T_\xi (\xi_T - \xi) + T_\eta (\eta_T - \eta), \quad (\text{П.11})$$

где

$$T_\xi = \frac{B \times (A \times B)}{(A \times B)^2} \cdot C, \quad T_\eta = \frac{A \times (B \times A)}{(A \times B)^2} \cdot C.$$

Соотношение (П.11) позволяет оценить величину изменения времени прибытия при коррекции координат.

Если требуется изменить только время прибытия, не меняя терминальных координат, то следует приложить корректирующий импульс скорости  $V_T$  по нуль-направлению. Эффективность этого импульса тем больше, чем меньше угол между градиентом времени  $C$  и нуль-направлением. Мерой эффективности служит производная  $\frac{\partial T}{\partial V_T} = \frac{A \times B}{|A \times B|} \cdot C$ , а угол  $i_T$  между вектором  $C$  и нуль-направлением

определяется из условия  $\cos i_T = \frac{\partial T / \partial V_T}{|C|}$ .

Для коррекции времени прибытия  $\Delta T$  необходимо приложить по нуль-направлению корректирующий импульс скорости величиной

$$V_T = \frac{|A \times B|}{(A \times B) \cdot C} \Delta T. \quad (\text{П.12})$$

В силу ортогональности плоскости оптимальной коррекции и нуль-направления суммарный корректирующий импульс скорости

для устранения промаха и времени прибытия вычисляется по формуле

$$V_{\Sigma} = \sqrt{V_K^2 + V_T^2}. \quad (\text{П.13})$$

По существу (П.13) определяет требуемое приращение скорости на реализацию трехкомпонентной трехпараметрической коррекции.

**П.4. Случаи вырожденных коррекций.** В работе [П.1] исследованы особые точки межпланетных траекторий, в которых характеристики вырождаются, т. е. некоторые терминальные параметры остаются неизменными при любой ориентации корректирующего импульса скорости. Так, в случае, когда угловая дальность от точки коррекции до картинной плоскости  $\Phi = \pi$ , корректирующий импульс скорости изменяет лишь параметры движения в плоскости траектории. Импульс скорости, перпендикулярный плоскости траектории, в линейной постановке не меняет координат в картинной плоскости. Это объясняется тем, что начальная и конечная точки траектории находятся на одной прямой по разные стороны от притягивающего центра, и боковой импульс скорости лишь поворачивает плоскость движения относительно указанной прямой. Эллипс влияния в рассматриваемом случае вырождается в отрезок оси  $P\xi$  (эффективность коррекции вдоль оси  $P\eta$  близка к нулю), а плоскость оптимальной коррекции не определена.

Если по условиям задачи допустима только одноразовая коррекция, а необходимо исправить три терминальных параметра  $\xi$ ,  $\eta$  и  $T$ , то нельзя проводить коррекцию в особых точках траектории.

**П.5. Оптимальные точки коррекции.** Обсудим задачу выбора оптимальной стратегии многократной идеальной коррекции межпланетной траектории из условия минимизации суммарного расхода топлива [П.1]. *Идеальной* называют коррекцию без ошибок прогноза движения и ошибок ее исполнения.

В терминах корректирующих импульсов скорости минимизируется величина

$$|\mathbf{I}| = \sum_{i=1}^n |\mathbf{V}_i|. \quad (\text{П.14})$$

Для совокупности равных по величине суммарных импульсов  $\mathbf{I}$  можно построить фигуру влияния в картинной плоскости и с ее помощью проанализировать влияние различных параметров на эффективность коррекции.

Сначала рассмотрим двухразовую коррекцию в предположении, что известны моменты времени и направления приложения импульсов  $\mathbf{V}_1(t_1)$ ,  $\mathbf{V}_2(t_2)$ . В этом случае аналогом единичной сферы в пространстве  $\mathbf{I}$  с метрикой (П.14) будет квадрат в плоскости  $(V_1, V_2)$ , отвечающий условию  $|\mathbf{V}_1| + |\mathbf{V}_2| = 1$ . Вершины квадрата расположены в точках  $\pm 1$  осей прямоугольной системы координат. Поскольку коррекция рассматривается в линейной постановке, в картинной плоскости  $(\xi, \eta)$  этому квадрату отвечает параллелограмм,



построенный на векторах  $\pm \rho_0(t_1)$  и  $\pm \rho_0(t_2)$  эллипсов влияния, соответствующих единичным векторам  $V^0(t_1)$  и  $V^0(t_2)$ . Каждую точку параллелограмма можно скорректировать единичным суммарным импульсом при двухразовой коррекции траектории. Варьируя моменты времени  $t_1, t_2$  и корректирующие импульсы  $V_1(t_1), V_2(t_2)$ , построим множество фигур влияния, заполняющих пространство внутри огибающей касательных к совокупности всех эллипсов влияния. Если огибающая имеет прямолинейные участки, то существуют отклонения  $\xi, \eta$ , требующие двухразовой коррекции.

Итак, для построения максимальной фигуры влияния при двухразовой коррекции следует обкатывать спрямляющей прямой совокупность эллипсов влияния одноразовой коррекции. Если исходная совокупность эллипсов влияния не всюду выпукла, то имеют место прямолинейные участки. Точки, принадлежащие прямолинейному участку, требуют двухразовой коррекции. Точки, принадлежащие исходной совокупности эллипсов влияния, требуют одноразовой коррекции. Наличие невыпуклых зон объясняется немонотонным изменением характеристик эллипсов влияния по времени. Для каждой траектории существует конечное число фиксированных моментов времени и направлений корректирующих импульсов скорости, где оптимальна двухразовая идеальная коррекция координат  $\xi, \eta$  в картинной плоскости. Такие моменты и направления определяются точками касания спрямляющей прямой исходной невыпуклой совокупности эллипсов влияния.

Полученные результаты можно обобщить для случая трехразовой коррекции. При этом роль единичной сферы в трехмерном пространстве  $(V_1, V_2, V_3)$  играет октаэдр  $|V_1| + |V_2| + |V_3| = 1$ . Максимальная фигура влияния в трехмерном пространстве терминальных параметров  $(\xi, \eta, \Delta T)$  получается обкаткой спрямляющей плоскостью фигур влияния одноразовой коррекции. Плоские участки построенной фигуры соответствуют трехимпульсной коррекции, линейчатые — двухимпульсной, а остальные точки — одноимпульсной.

Таким же образом можно проводить анализ для четырехимпульсной коррекции, когда появляется спрямляющая гиперплоскость и т. д.

Показано, что в задаче о минимизации расхода топлива на устранение ошибок терминальных параметров движения оптимальная стратегия включает случаи многократной коррекции. Отсюда возникает вопрос об оптимальном числе импульсов скорости для коррекции известных ошибок терминальных параметров. Как доказано в работе [П.1], оптимальное число импульсов скорости при идеальной коррекции не превышает числа корректируемых терминальных параметров.

Действительно, пусть  $m$  — число корректируемых терминальных параметров, а  $n$  — число импульсов скорости. Рассмотрим отобра-

жение в пространстве терминальных параметров исходной  $n$ -мерной фигуры

$$\sum_{i=1}^n |V_i| = 1 \quad (\text{П.15})$$

из пространства импульсов скорости. В силу линейной постановки задачи коррекции при  $n \geq m$  максимальные отклонения терминальных параметров (т. е. граница максимальной фигуры влияния) будут соответствовать ребрам или вершинам исходной фигуры (П.15). Поэтому каждая точка границы фигуры влияния в  $m$ -мерном пространстве терминальных параметров может быть разложена по  $m$  ближайшим векторам этого пространства, соответствующим некоторым  $m$  вершинам исходной фигуры (П.15). Следовательно, не требуется больше чем  $m$  импульсов для коррекции любого  $m$ -мерного вектора терминальных параметров.

Как уже отмечалось, на межпланетной траектории существуют особые точки, вблизи которых происходит резкое (немонотонное) изменение характеристик эллипсов влияния: существенно возрастает эффективность коррекции терминальных параметров движения в одном направлении картинной плоскости и сводится почти к нулю в ортогональном направлении. При такой ситуации выгодной по затратам топлива может оказаться многократная неоднородная коррекция. (*Неоднородной* называют коррекцию, когда для каждого корректирующего импульса скорости выбирается своя точка прицеливания в картинной плоскости, т. е. характеристики коррекции определяются из различных условий). В каждой особой точке следует корректировать ту совокупность терминальных параметров, которая требует наименьшего по величине импульса скорости по сравнению с другими точками траектории. Остальные терминальные параметры корректируются в своих, наиболее эффективных для них точках траектории.

**П.6. Коррекция с ограниченной тягой двигателя.** Рассмотренная импульсная коррекция межпланетной траектории КА отвечает идеализированному случаю использования двигателя с неограниченно большой тягой. Естественно возникает вопрос, как изменятся полученные рекомендации для оптимальной по расходу топлива стратегии проведения коррекции при использовании двигателя с ограниченной тягой. Такая задача исследована в работе [П.2] в общей постановке, когда допускается регулирование тяги двигателя от нуля до заданной максимальной величины при условии, что скорость истечения газов из сопла остается неизменной. Определяется оптимальный закон изменения вектора тяги по времени (т. е. величина и направление) из условия минимизации суммарных затрат топлива на коррекцию известных ошибок терминальных параметров движения.

Из анализа вариационной задачи установлено, что на участке включения двигателя величина тяги должна быть максимальной

допустимой. Показано также, что вектор  $V(t)$ , который в каждый момент времени  $t$  определяет оптимальное направление действия корректирующего ускорения  $a(t)$ , задается соотношением

$$V = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{grad } \beta_i. \quad (\text{П } 16)$$

Здесь  $\beta_i$  — составляющие вектора  $\beta$  корректируемых терминальных параметров траектории,  $n$  — размерность этого вектора,  $\lambda_i$  — постоянные множители, которые не зависят от точки траектории и выбираются так, чтобы получить заданный вектор корректирующего смещения.

Согласно (П.16), любому заданному вектору  $\beta$  соответствует вектор  $V(t)$  в пространстве, базисом которого являются векторы градиентов терминальных параметров движения. Поэтому вектор корректирующего ускорения  $a(t)$ , минимизирующий суммарное изменение скорости (или расход топлива), должен принадлежать пространству оптимальной коррекции, определяемому соотношением (П.16). При однопараметрической коррекции ускорение  $a(t)$  должно быть направлено по текущему градиенту корректируемого параметра, а при двухпараметрической коррекции — лежать в мгновенной плоскости оптимальной коррекции.

В каждой точке траектории эффективность управления характеризуется эллипсоидом влияния в пространстве терминальных параметров движения, который является линейным отображением единичной сферы в пространстве оптимальных управлений. Направление корректирующего ускорения  $a(t)$  в любой момент времени должно соответствовать точке эллипсоида влияния, имеющей максимальную проекцию на постоянный вектор  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  в пространстве терминальных параметров  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ . (Вектор  $\lambda$  направлен по нормали к поверхности эллипсоида влияния). Установлено, что коррекция должна производиться только в тех точках траектории, в которых максимальная проекция эллипсоида влияния на вектор  $\lambda$  превышает величину  $1/|\lambda|$ . Показано также, что наименьшие затраты на коррекцию достигаются в случае, когда величина корректирующего ускорения неограниченно возрастает, т. е. при импульсной коррекции.

Если на любом интервале времени полета совокупность эллипсоидов влияния всюду выпукла, то оптимальная коррекция с ограниченной тягой двигателя не может быть многообразовой. В случае не всюду выпуклой совокупности эллипсоидов влияния существуют такие векторы  $\lambda$ , для которых оптимальной оказывается многообразовая коррекция.

Составляющие постоянного вектора  $\lambda$  определяются из условия коррекции известного  $n$ -мерного промаха в пространстве терминальных параметров движения. Для их вычисления используются методы решения краевых задач.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абалакин В. К.* Основы эфемеридной астрономии.— М.: Наука, 1979.
2. *Аким Э. Л., Бажинов И. К., Павлов В. П., Почукаев В. Н.* Поле тяготения Луны и движение ее искусственных спутников.— М.: Машиностроение, 1984.
3. *Аким Э. Л., Энеев Т. М.* Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // *Космические исследования.*— 1963.— Т. 1, вып. 1.
4. *Аксенов Е. П.* Теория движения искусственных спутников Земли.— М.: Наука, 1977.
5. *Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г.* Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения искусственных спутников Земли // *Проблемы движения искусственных небесных тел.*— М.: Изд-во АН СССР, 1963.
6. *Александров С. Г., Федоров Р. Е.* Советские спутники и космические корабли.— М.: Изд-во АН СССР, 1964.
7. *Алексахин И. В., Компаниец Э. П., Красовский А. А.* Трассы суточных искусственных спутников Земли // *Космические исследования.*— 1964.— Т. 2, вып. 4.
8. *Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П.* Баллистика управляемых ракет дальнего действия.— М.: Наука, 1966.
9. *Астрономический календарь.* Постоянная часть.— М.: Наука, 1981.
10. *Атмосфера Земли верхняя.* Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли. ГОСТ 25646.115—84.— М.: Изд-во стандартов, 1985.
11. *Балк М. Б.* Элементы динамики космического полета.— М.: Наука, 1965.
12. *Бахтиян Б. П., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е.* Определение и коррекция движения: гарантирующий подход.— М.: Наука, 1980.
13. *Белецкий В. В., Егоров В. А.* Разгон космического аппарата в сфере действия планеты // *Космические исследования.*— 1964.— Т. 2, вып. 3.
14. *Борщевский М. З., Иослович М. В.* К задаче о повороте плоскости орбиты спутника при помощи реактивной тяги // *Космические исследования.*— 1969.— Т. 7, вып. 6.
15. *Брумберг В. А.* Релятивистская небесная механика.— М.: Наука, 1972.
16. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций.— М.: ИЛ, 1952.
17. *Гордеева Ю. Ф.* Зависимость элементов от времени в долгопериодических колебаниях в ограниченной задаче трех тел // *Космические исследования.*— 1968.— Т. 6, вып. 4.
18. *Грушинский Н. П.* Теория фигуры Земли.— М.: Физматгиз, 1963.
19. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы.— М.: Наука, 1964.
20. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы.— М.: Физматгиз, 1963.
21. *Дубошин Г. Н.* Теория притяжения.— М.: Физматгиз, 1961.
22. *Егоров В. А.* Пространственная задача достижения Луны.— М.: Наука, 1965.
23. *Егоров В. А., Гусев Л. И.* Динамика перелетов между Землей и Луной.— М.: Наука, 1980.

24. *Ефимов Г. Б., Охоцимский Д. Е.* Об оптимальном разгоне космического аппарата в центральном поле // *Космические исследования.*— 1965.— Т. 3, вып. 6.
25. *Загребин Д. В.* Введение в теоретическую гравиметрию.— Л.: Наука, 1976.
26. *Иванов Н. М., Поляков В. С.* Наведение автоматических межпланетных станций.— М.: Машиностроение, 1987.
27. *Ивашкин В. В.* Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет.— М.: Наука, 1977.
28. *Идельсон Н. И.* Теория потенциала и ее приложение к вопросам геофизики.— М.; Л.: Гостехиздат, 1932.
29. *Ильин В. А., Кузмяк Г. Е.* Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги.— М.: Наука, 1976.
30. *Калачев В. Л.* Исследование геометрии трасс искусственных спутников Земли // *Космические исследования.*— 1970.— Т. 8, вып. 3.
31. *Кельдыш М. В.* Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика.— М.: Наука, 1988.
32. *Кислик М. Д.* Сферы влияния больших планет и Луны // *Космические исследования.*— 1964.— Т. 2, вып. 6.
33. *Клеро А.* Теория фигуры Земли, основанная на началах гидродинамики.— М.: Изд-во АН СССР, 1947.
34. *Копнин Ю. М.* К задаче поворота плоскости орбиты спутника // *Космические исследования.*— 1965.— Т. 3, вып. 4.
35. *Кубасов В. Н., Дашков А. А.* Межпланетные полеты.— М.: Машиностроение, 1979.
36. *Лахтин Л. М.* Свободное движение в поле земного сфероида.— М.: Физматгиз, 1963.
37. *Лебедев А. А., Герасюга Н. Ф.* Баллистика ракет.— М.: Машиностроение, 1970.
38. *Левантовский В. И.* Механика космического полета в элементарном изложении.— М.: Наука, 1980.
39. *Лидов М. Л.* О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников // *Проблемы движения искусственных небесных тел.*— М.: Изд-во АН СССР, 1963.
40. *Лоуден Д. Ф.* Импульсный переход между эллиптическими орбитами // *Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета.*— М.: Наука, 1963.
41. *Лоуден Д. Ф.* Оптимальные траектории для космической навигации.— М.: Мир, 1966.
42. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— Собр. соч. Т. 2.— М., Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
43. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике.— М.: Наука, 1978.
44. *Мигра С. К.* Верхняя атмосфера.— М.: ИЛ, 1955.
45. *Мультион Ф.* Введение в небесную механику.— М.; Л.: Объединенное научно-техническое изд-во НКТП СССР, 1936.
46. Основы теории полета космических аппаратов/Под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова.— М.: Машиностроение, 1972.
47. *Охоцимский Д. Е.* Динамика космических полетов.— М.: Изд-во Московского ун-та, 1968.
48. *Охоцимский Д. Е.* Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения // *Космические исследования.*— 1964.— Т. 2, вып. 6.
49. *Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П.* Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты // *Успехи физических наук.*— 1957.— Т. 13, вып. 1.
50. *Погорелов Д. А.* Теория кеплеровых движений летательных аппаратов.— М.: Физматгиз, 1961.

51. Проблемы дислокации космических аппаратов в окрестностях точек либрации Земля — Луна/Под ред. Г. С. Титова и А. В. Брыкова.— М.: Машиностроение, 1979.
52. Рой А. Движение по орбитам.— М.: Мир, 1981.
53. Сихарулидзе Ю. Г. Баллистика летательных аппаратов.— М.: Наука, 1982.
54. Сихарулидзе Ю. Г. Оптимальное импульсное торможение при входе в атмосферу // Космические исследования.— 1970.— Т. 8, вып. 2.
55. Соловьев Ц. В., Тарасов Е. В. Прогнозирование межпланетных перелетов.— М.: Машиностроение, 1973.
56. Соловьев Ц. В., Шмакова Н. Ф. Оптимизация траекторий полета к Меркурию с маневром в гравитационном поле // Космические исследования.— 1974.— Т. 12, вып. 6.
57. Стандартная атмосфера. ГОСТ 4401-81.— М.: Изд-во стандартов, 1982.
58. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию.— М.: Наука, 1968.
59. Субботин М. Ф. Курс небесной механики. Т. 1.— Л.; М.: Гостехиздат, 1933.
60. Хавенсон Н. Г., Эльясберг П. Е. О возможности использования гравитационного поля Юпитера для пролета на заданном расстоянии от Солнца и выхода из плоскости эклиптики // Космические исследования.— 1972.— Т. 10, вып. 2.
61. Штернфельд А. А. Введение в космонавтику.— М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, Гл. ред. авиац. лит-ры, 1937.
62. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли.— М.: Наука, 1965.
63. Энеев Т. М., Платонов А. К., Казакова Р. К. Определение параметров орбиты искусственного спутника по данным наземных измерений // Искусственные спутники Земли.— 1960.— Вып. 4.
64. Якия Л. Д. Исследование верхней атмосферы с помощью ракет и спутников.— М.: Иностранная литература, 1961.
65. Barrar R. B. Two impulse transfer vs one impulse transfer: analytic theory // AIAA Journal.— 1963.— V. 33, No. 1.
66. Bielkowitz P. Ground tracks of Earth-period (24 hr) satellites // AIAA Journal.— 1966.— V. 4, No. 12.
67. Breakwell G. V., Gillespie R. W., Ross S. E. Researches in interplanetary transfer // ARS Journal.— 1961.— V. 31, No. 2.
68. Brunk W. E. Transfer between noncoplanar orbits with minimum velocity requirements // Advances in the Astronautical Sciences.— 1971.— V. 7.
69. CIRA 1965. COSPAR International Reference Atmosphere 1965.— Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. 1965.
70. Eckel K. J. Numerical solutions of noncoaxial optimum transfer problems // Journal of the Astronautical Sciences.— 1963.— V. 10, No. 3.
71. Edelbaum T. N. Propulsion requirements for controllable satellites // ARS Journal.— 1964.— V. 34, No. 8.
72. Edelbaum T. N. Some extensions of the Hohmann transfer maneuver // ARS Journal.— 1959.— V. 29, No. 11.
73. Galman B. A. Minimum energy deorbit // Journal of spacecraft and Rockets.— 1966.— V. 3, No. 7.
74. Galman B. A. Retro rocket alignment for maximum entry angle // ARS Journal.— 1962.— V. 32, No. 6.
75. Gobetz F. W. Optimum transfers between hyperbolic asymptotes // AIAA Journal.— 1963.— V. 1, No. 9.
76. Gobetz F. W., Doll J. R. A survey of impulsiv trajectories // AIAA Journal.— 1969.— V. 7, No. 5.
77. Hiller H. Optimum transfers between non-coplanar circular orbits // Planetary and Space Science.— 1965.— V. 13, No. 2.
78. Hoelker R. F., Silber R. The bi-elliptical transfer between co-planar circular orbits // Proc. 4th symposium Ballistic Missile and Space Technology.— Los Angeles, 1959.
79. Hohmann W. Die Erreichbarkeit der Himmelskorper.— Minich: R. Oldenbourg, 1925.

80. *Horner J. M.* Minimum impulse orbital transfers // *AIAA Journal*.— 1963.— V. 1, No. 7.
81. *Horner J. M.* Optimum impulse transfers between coplanar orbits // *ARS Journal*.— 1962.— V. 32, No. 7.
82. Journey to the outer worlds // *Spaceflight*.— 1977.— V. 19, No. 11.
83. *Lawden D. F.* Escape to infinity from circular orbits // *Journal of the British Interplanetary Society*.— 1953.— V. 12, No. 2.
84. *Lubard S.* Optimum launching to hyperbolic orbit by two-impulses // *AIAA Journal*.— 1963.— V. 1, No. 12.
85. *Marchal C.* Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires (duree indifferente) // *Astronautica Acta*.— 1965.— V. 11, No. 6.
86. *Munick H., McGill R., Taylor G. E.* Analytic solutions to several optimum orbit transfer problems // *The Journal of the Astronautical Sciences*.— 1960.— V. 7, No. 4.
87. *Okhotsimsky D. E., Golubiev Yu. F., Sikharulidze Yu. G.* Mars orbiter insertion by use of atmospheric deceleration // *Acta Astronautica*.— 1978.— V. 5, No. 9/10.
88. *Rider L.* Ascent from inner circular to outer co-planar elliptical orbits // *ARS Journal*.— 1960.— V. 30, No. 3.
89. *Rider L.* Characteristic velocity requirements for impulsive thrust transfer between noncoplanar circular orbits // *ARS Journal*.— 1961.— V. 31, No. 3.
90. *Roberts D. L.* The requirements of unmanned space missions to Jupiter // *Raumfahrtforschung*.— 1967.— Bd. 11, No. 1.
91. *Tempelman W. H.* Velocity and range considerations for the attainment of given intercept angles // *Journal of the Astrospace Sciences*.— 1961.— V. 28, No. 9.
92. *Ting Lu.* Optimum orbital transfer by impulses // *ARS Journal*.— 1960.— V. 30, No. 11.
93. *Ting Lu.* Optimal orbital transfer by several impulses // *Astronautica Acta*.— 1960.— V. 6, No. 5.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\Pi$	— потенциальная энергия	$q$	— скоростной напор
$A$	— азимут; работа	$R$	— радиус
$a$	— большая полуось орбиты	$r$	— расстояние; радиус
$\mathbf{a}$	— вектор ускорения	$\tilde{r}$	— относительный радиус
$B$	— боковое смещение	$\mathbf{r}$	— радиус-вектор
$b$	— малая полуось орбиты, прицельная дальность	$S$	— площадь
$\mathbf{C}$	$= (C_x, C_y, C_z)$ — векторный интеграл площадей	$S_{nk}$	— коэффициент тессеральной гармоники
$c$	— линейный эксцентриситет орбиты	$S_{nn}$	— коэффициент секториальной гармоники
$C_{nk}$	— коэффициент тессеральной гармоники	$T$	— период обращения
$C_{nn}$	— коэффициент секториальной гармоники	$\tilde{T}$	— время, отнесенное к периоду обращения
$E$	— полная энергия; эксцентриситетическая аномалия	$t$	— время
$e$	— эксцентриситет орбиты	$U$	— потенциал (силовая функция)
$\mathbf{F}$	$= (F_x, F_y, F_z)$ — вектор силы	$u$	— аргумент широты
$f$	— постоянная притяжения	$\tilde{V}$	— скорость, отнесенная к круговой
$\mathbf{f}$	— вектор Лапласа	$\mathbf{V}$	— вектор скорости
$g$	— ускорение свободного падения	$v$	— объем тела
$H$	— высота; высота однородной атмосферы	$W$	— скорость истечения газов из сопла двигателя
$h$	— постоянная интеграла энергии	$\alpha$	— прямое восхождение; коэффициент сжатия Земли
$i$	— наклонение орбиты, угол некомпланарности	$\Gamma$	— область ненулевой оптимальной ориентации тормозного импульса скорости
$\mathbf{i}$	— орт, направленный по оси $x$	$\delta$	— склонение
$J$	— интеграл Якоби	$\theta$	— угол наклона траектории к местному горизонту
$J_n$	— коэффициент зональной гармоники	$\vartheta$	— истинная аномалия
$\mathbf{j}$	— орт, направленный по оси $y$	$\lambda$	— долгота
$K$	— кинетическая энергия	$\mu$	— произведение постоянной притяжения на массу центрального тела
$\mathbf{k}$	— орт, направленный по оси $z$	$\nu$	— квадрат отношения скорости к местной круговой скорости
$L_1, \dots, L_5$	— точки либрации	$\rho$	— плотность; расстояние
$M$	— масса; материальная точка; средняя аномалия	$\mathbf{p}$	— радиус-вектор
$m$	— масса; материальная точка	$\sigma$	— угол, определяющий положение линии апсид в плоскости орбиты
$P$	— величина тяги двигателя	$\tau$	— безразмерное время
$P_n(z)$	— полином Лежандра		
$P_n^{(k)}$	— присоединенная функция Лежандра		
$p$	— параметр орбиты; давление		



- $\chi$  — угол ориентации тормозного импульса скорости  
 $\Phi$  — угловая дальность  
 $\varphi$  — широта  
 $\Omega$  — долгота восходящего узла  
 $\omega$  — аргумент перицентра, угловая скорость  
 $\Upsilon$  — знак весеннего равноденствия

## Нижние индексы

- а — апоцентр  
 ак — активный участок  
 ат — атмосфера  
 б — барицентр  
 в — восходящий  
 вл — влияния (сфера)  
 воз — возмущающий  
 впр — великое противостояние  
 вр — вращение  
 вх — вход в атмосферу  
 г — гиперболический  
 гм — гринвичский меридиан  
 гр — граничный  
 д — действия (сфера)  
 дв — движение  
 з — Земля  
 ид — идеальная (скорость)  
 к — конечный  
 кр — круговой  
 крит — критический  
 л — Луна  
 н — нисходящий, начальный  
 нв — невозмущенный  
 орб — орбитальный  
 отн — относительный  
 п — перицентр, полярный  
 пар — параболический  
 пер — перелет, переносный  
 пл — планета

- полн — полный  
 пот — потери  
 пр — притяжения (сфера)  
 пред — предельный  
 с — Солнце  
 сид — сидерический  
 син — синодический  
 ср — средний  
 сут — суточный  
 сущ — существование  
 т — топливо; тяжесть  
 х — характеристическая (скорость)  
 цб — центробежный  
 э — экваториальный  
 экс — экстремальное значение  
 эф — эффективный  
 б — боковой  
 max — максимальное значение  
 min — минимальное значение  
 n — трансверсальная составляющая  
 p — пассивный (участок)  
 r — радиальная составляющая  
 s — нормальная составляющая  
 t — касательная составляющая  
 w — бинормальная составляющая  
 0 — начальный  
 $\Sigma$  — суммарный  
 $\infty$  — в бесконечно удаленной точке

## Верхние индексы

- гц — геоцентрический  
 опт — оптимальное значение  
 пер — перелетный  
 полн — полный  
 max — максимальное значение  
 min — минимальное значение  
 0 — единичный вектор

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксенова формула 29  
Аномалия истинная 123  
Апоцентр 41  
Апсиды 41  
Аргумент перицентра 99, 119, 121  
— широты 100, 123  
Атмосфера Земли верхняя 361  
Атмосферы модель изотермическая 361, 362
- Баллистики задача обратная 79  
— — прямая 66  
Барицентр 213
- Великое путешествие 321  
Возмущения вековые 355  
— периодические 355  
Вращение атмосферы, влияние на эволюцию орбиты 373  
Время пролета перицентра 124  
— старта при полетах к планетам 308  
— существования ИСЗ 372, 373  
Высота апогея траектории 63, 70  
— однородной атмосферы 362
- Гельмерта формула 29  
Геоид 23—25  
Гоманна полуэллипс 137  
— траектория перелета 137  
Градиент потенциала силы тяжести 27  
Границы досягаемости 78
- Дальность пассивного участка угловая 66, 67  
Движение боковое 96  
— ИСЗ в нецентральной поле притяжения 403—410  
— КА под действием постоянного касательного ускорения 377—402
- Движение кеплеровское 46  
— продольное 92  
— спутника возмущенное 334, 337  
Долгота восходящего узла 99
- Загребина — Рязанова формула 29  
Задача двух тел 30  
— — — ограниченная 32, 33  
— — —, основное уравнение 32  
— трех тел 208  
— — — ограниченная 208  
— — — — круговая 208, 215—220  
— — —, упрощенная постановка 242—248  
Закон всемирного тяготения 40
- Изолинии потребных скоростей для реализации межпланетных траекторий 309  
Интеграл Лапласа 38  
— площадей 34.— 36, 337  
— энергии 33, 34  
— — в задаче трех тел 210—213  
Интегралы площадей в задаче трех тел 212  
Интервал достижимости 275  
Истинная аномалия 41, 49, 56, 57, 130
- Кеплера закон первый 41, 46  
— — третий 59  
— уравнение 58, 62  
Клеро эллипсоид 25  
Коррекция траектории движения 425  
— — — двухкомпонентная 426  
— — — двухпараметрическая 426  
— — — идеальная 432  
— — — неоднородная 434  
— — — однопараметрическая 426  
— — — трехкомпонентная 426  
Красовского эллипсоид 27

- Ламберта задача 293  
 — уравнение 106  
 Лапласа вектор 338  
 — интеграл 337  
 — неизменяемая плоскость 35, 211  
 Лежандра полиномы 17  
 — присоединенная функция 18  
 Либрация Луны 250  
 — — оптическая 250  
 — — физическая 250
- Маневр 134  
 — активно гравитационный 312, 313  
 — активный 312  
 — гравитационный 267—273, 310, 311  
 — двойной эллиптический 148  
 — оптимальный при перелете между гиперболическими орбитами 317  
 — пертурбационный 257  
 Маневры компланарные 134  
 — пространственные 134  
 Масконы 251  
 Метод игнорирования возмущений 256  
 — наименьших квадратов 125  
 — точечной сферы действия 256, 257  
 Модель относительной плотности атмосферы 369, 370  
 — фигуры Земли 26, 27  
 Молярная масса воздуха 361
- Наклонение орбиты 99, 122, 127  
 Нуль-направление 428
- Область действия 242, 243  
 — притяжения 246  
 Облет Луны 261  
 — нескольких небесных тел 310—327  
 Орбита критическая 370—371  
 — Луны 250  
 — оскулирующая 335  
 — перелета 134  
 — спутника 40, 41  
 — — восточная 99  
 — — гиперболическая 44, 46, 49—54, 59—61, 114  
 — — западная 99  
 — — круговая 43, 46, 55, 126—128  
 — — параболическая 44, 46, 55, 61, 62, 119—122  
 — — полярная 99  
 — — экваториальная 99
- Орбита Луны эллиптическая 43, 46, 47, 56, 105, 129  
 — — — второго рода 106  
 — — — граничная 106  
 — — — первого рода 106  
 Орбиты коаксиальные 159, 160  
 — планет 285
- Парабола безопасности 88, 91  
 Параметр орбиты 41, 123  
 Перелет между гиперболическими орбитами 312, 313  
 — — компланарными эллиптическими орбитами 159—162  
 — — некомпланарными круговыми орбитами 179—189  
 — с круговой орбиты на компланарную гиперболическую 162—169  
 — — — — эллиптическую 155—158  
 — — эллиптической орбиты на некомпланарную круговую 189—197  
 — трехимпульсный биэллиптический 148, 149  
 Переход перицентральный между гиперболическими орбитами 317  
 Перигей условный 282  
 Период обращения спутника 45, 409  
 — — апомалистический 409  
 — — драконический 409  
 — — оскулирующий 409  
 — — сидерический 409  
 Перицентр 41  
 Плоскость картинная 53  
 — оптимальной коррекции 428  
 — орбиты 122  
 — эклиптики 250  
 Поверхность изопотенциальная 11  
 — нулевой относительной скорости 221, 228  
 — уровенная потенциала силы тяжести 23  
 — уровня 11  
 Поворот плоскости круговой орбиты 170—179  
 — — орбиты под действием бинормального ускорения 358—360  
 Поле силовое 10  
 — — центральное 10  
 Полет в плоскости орбиты Луны 257—273  
 — сторону Солнца по биэллиптической траектории 325—329  
 — — — — — с гравитационным маневром в афелии 329—331  
 — — — — — траектории типа Го-манна 324, 325

- Полет «Веги-1» и «Веги-2» 321—323  
 — «Вояджера-2» 321, 322  
 — к Луне 252—257  
 — — с непрерывным выведением  
 273—280  
 — — — околоземной орбиты 273,  
 280—282  
 — — планетам 282—309  
 Полеты многоцелевые 310  
 Полярное сжатие Земли 404  
 Посадка на поверхность Луны 283,  
 284  
 Постоянная притяжения 10  
 Потенциал 9, 12  
 — поля притяжения Земли с уче-  
 том ее сжатия 403, 404  
 — — системы материальных точек  
 13  
 — силы тяжести 27  
 — тела произвольной формы 16—18,  
 21  
 — шара со сферическим распределе-  
 нием плотности 14, 15  
 Прецессия плоскости орбиты спут-  
 ника 127, 128  
 Прицельная дальность 50  
 Прямое восхождение 102, 103
- Работа силового поля 11  
 Радиус относительный 139  
 — сферы влияния 248  
 — центрального тела эффективный  
 53  
 Регрессия 407  
 Референц-эллипсоид 27
- Сектор гиперболический 115, 116,  
 118  
 — параболический 120  
 — эллиптический второго рода 111  
 — граничный 112  
 — — первого рода 110  
 Сидерический месяц 250  
 — период обращения спутника 139  
 — — планеты 306  
 Сила тяжести 23  
 Силы возмущающие 334  
 Синодический месяц 251  
 — период планет 306, 307  
 Система координат инерциальная 31  
 — — экваториальная геоцентриче-  
 ская 98  
 — — эллиптическая 98  
 Склонение 102  
 Скорость космическая вторая 44  
 — — первая 44
- Скорость маневра характеристиче-  
 ская 136  
 — секториальная 37  
 — спутника 42, 43  
 — — круговая 43—45  
 Спуск с орбиты 197—207  
 Спутник 30, 31  
 — суточный (синхронный) 130  
 — — стационарный 132  
 Суточное смещение орбиты спутни-  
 ка 128  
 — число витков спутника 128  
 Сфера влияния 248  
 — — Луны 252  
 — — планет 286  
 — действия 242, 243, 286  
 — — Луны 252  
 — притяжения 246  
 — — Луны 252  
 — — планет 286  
 Сфероид нормальный 25
- Тело центральное 36  
 — —, эффективный радиус 53  
 Точка прицеливания 276  
 Точки либрации 221, 229  
 — —, вычисление координат 230—  
 235  
 Траектории гоманновские перелета  
 Земля — планета 306  
 — движения КА под действием ма-  
 лой тяги 398  
 — долетные 263, 266  
 — межпланетные 286, 287  
 — —, точный расчет 288, 289  
 — облетные 265, 266, 274  
 Траектория к Луне пространствен-  
 ная 273  
 — навесная 81  
 — настильная 81  
 — облета нескольких планет 311  
 — оптимальная 72  
 — параболическая 88—90  
 — эллиптическая 256  
 Трасса первого витка 128  
 — спутника 126
- Угол бросания оптимальный 72—76,  
 90  
 Узел восходящий 36  
 — нисходящий 36  
 Универсальная газовая постоянная  
 361  
 Уравнения движения в оскулирую-  
 щих элементах 337—341, 365

- Уравнения для элементов возмущенного движения 337
- Ускорение, порождаемое силой сопротивления при движении ИСЗ во вращающейся атмосфере 373
- спутника под действием возмущающего тела 411
  - центрального тела под действием возмущающего тела 411
- Условная граница атмосферы 197
- Устойчивость точек либрации 235—242
- Фазы Луны** 251
- Функция потенциальная 9
- для центрального поля 12
  - силовая 9
- Хилла линии** 222
- поверхности 222, 226
- Центр притягивающий** 30
- Циолковского формула 135, 136
- Число оборотов ИСЗ за время его существования** 372
- — — ожидаемое 370
  - — — приведенное 369
- Эволюция орбиты ИСЗ в атмосфере** 360—377
- — под действием внешнего возмущающего тела 415
- Эйлера формула 120
- Эксцентриситет орбиты 41, 105, 118, 123
- — линейный 47
- Элементы орбиты спутника 99, 103
- оскулирующей орбиты 335
- Эллипс безопасности 76—78
- Якоби интеграл** 218, 219

Учебное издание

*ОХОЦИМСКИЙ Дмитрий Евгеньевич,  
СИХАРУЛИДЗЕ Юрий Георгиевич*

**ОСНОВЫ МЕХАНИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА**

Заведующий редакцией *Л. А. Русаков*  
Редактор *В. И. Левантовский*  
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*  
Технический редактор *Е. В. Морозова*  
Корректоры *О. А. Бутусова, Л. С. Сомова*

ИБ № 12408

Сдано в набор 10.08.89. Подписано к печати 19.07.90.  
Формат 60×90/16. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 28. Усл. кр.-отт. 28.  
Уч.-изд. л. 29,36. Тираж 2300 экз. Заказ № 800. Цена 6 р. 30 к.

Издательско-производственное и книготорговое  
объединение «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»  
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25

# FOUNDATIONS OF SPACEFLIGHT MECHANICS

by *D. E. OKHOTSIMSKY* and *Yu. G. SIKHARULIDZE*

## 1. Information about the authors

*Dmitrii OKHOTSIMSKY* — corresponding member of the USSR Academy of Sciences; professor; Doctor of Physical and Mathematical sciences; head of a department of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the USSR Academy of Sciences; member of the Editorial Board of the Space Research Journal; laureate of the Lenin and the State prizes. A leading expert in spaceflight mechanics, author of fundamental works and monographs.

*Yurii SIKHARULIDZE* — professor, Doctor of Technical sciences, head of a sector of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the USSR Academy of Sciences. One of the leading experts in motion control of air- and spacecraft, and spaceflight mechanics. Co-author of a monograph on re-entry control and author of a book on ballistics.

## 2. Abstract

In the book the basic principles of spaceflight mechanics are presented. Along with the presentation of fundamental problems much attention is given to applications. The theoretical material is illustrated by practical achievements in exploration and exploitation of space.

The issues connected with the theory of gravitation, the classical two-body problem and its application to studying applied ballistics problems and optimal transfers between orbits of various types are considered. The methods for computing spaceflight trajectories to the Moon and the Solar System planets are discussed. The theory of libration points is presented. Great attention is given to the perturbed motion and its application to estimating the satellite life-time, the satellite orbit evolution under the influence of the noncentral gravitational field and of the perturbing body.

The book is written in a clear and intelligible style and is largely application-oriented. At the same time the proof of the basic statements is sufficiently rigorous. It is intended for students and post graduates of universities as well as specialists in ballistics and the motion control of spacecraft.

## 3. Contents

Preface

### Chapter 1. Newton's potential

- 1.1. Law of gravitation.
- 1.2. Attraction of a spherical body.
- 1.3. Series expansion of the potential in spherical functions.
- 1.4. Geoid. Gravity force.

### Chapter 2. Two-body problem

- 2.1. Motion equations.
- 2.2. Integrals of the motion equations.
- 2.3. Velocity of a satellite.
- 2.4. Characteristics of orbits.
- 2.5. Connection between time and orbital position.

### Chapter 3. Elliptical motion in application to the ballistics problem

- 3.1. Direct problem of ballistics.
- 3.2. Optimal trajectory
- 3.3. Inverse problem of ballistics.
- 3.4. Parabolic trajectory.
- 3.5. Derivatives of terminal motion parameters with respect to initial parameters.

## **Chapter 4. Determination of an orbit in space**

- 4.1. Basic orbital elements.
- 4.2. Determination of an orbit by two positions and time.
- 4.3. Determination of an orbit by the position and velocity measurements.
- 4.4. Tracks of the Earth's satellites.

## **Chapter 5. Maneuvers in the central gravitational field**

- 5.1. Two-impulse transfer between coplanar circular orbits.
- 5.2. Three-impulse transfer between coplanar circular orbits.
- 5.3. Transfer from a circular orbit to a coplanar elliptical orbit.
- 5.4. Transfer between coplanar elliptical orbits.
- 5.5. Transfer from a circular orbit to a coplanar hyperbolic orbit.
- 5.6. Turn of the circular orbit plane.
- 5.7. Two-impulse transfer between noncoplanar circular orbits.
- 5.8. Three-impulse transfer between noncoplanar circular orbits.
- 5.9. Transfer from an elliptical orbit to a noncoplanar circular orbit.
- 5.10. Optimal direction of the velocity impulse for descent from an orbit.

## **Chapter 6. Three-body problem**

- 6.1. General formulation of the three-body problem.
- 6.2. Restricted circular three-body problem.
- 6.3. Points of libration.
- 6.4. Analysis of stability of libration points.
- 6.5. Simplified formulation of the three-body problem.

## **Chapter 7. Flight to the Moon and planets**

- 7.1. Conditions for the flight to the Moon.
- 7.2. Flight in the Moon orbit plane.
- 7.3. Three-dimensional trajectory to the Moon.
- 7.4. Flight to planets.
- 7.5. Sequential fly-by of several celestial bodies.
- 7.6. Flight to the Sun.

## **Chapter 8. Perturbed motion of a satellite**

- 8.1. Method of osculating elements.
- 8.2. Action of the perturbing tangent, normal and binormal forces.
- 8.3. Evolution of the Earth satellite orbit under the effect of atmosphere.
- 8.4. Motion under the effect of constant tangent acceleration.
- 8.5. Motion in the noncentral gravitational field.
- 8.6. Perturbing action of external celestial bodies.

## **Appendix. The correction of trajectory.**

References 93 titles including 29 in English and German. 19 tables. 163 figs.